مسئله‌ای در مکانیک: نردبانی که کنارِ دیوار لیز می‌خورد

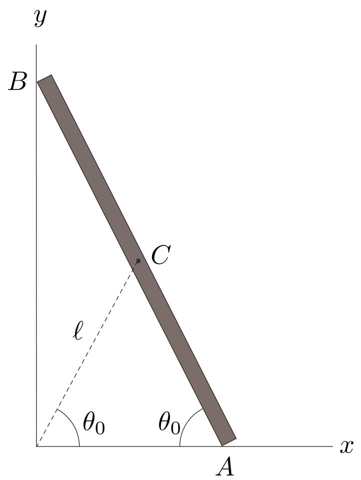
امیر آقامحمدی

چکیده— مسئله‌یِ نردبانی که کنارِ دیوار لیز می‌خورد بدونِ و با در نظر گرفتنِ اصطکاک بررسی شده است.

می‌خواهیم حرکتِ نردبانی کنارِ یک دیوار را بررسی کنیم. این مسئله از مسائلِ استانداردِ مکانیک است. معمولاً سئوال می‌شود که به ازایِ چه زاویه‌ای نردبان از دیوار جدا می‌شود؟ ما در این‌جا می‌خواهیم همین مسئله را با دقتِ بیش‌تری بررسی کنیم و به چند سئوال پاسخ دهیم. آیا هرگاه نیرویِ عمودی‌یِ سطح صفر شود معنی‌اش جدا شدنِ جسم از سطح است؟ علاوه بر این اگر فرض کنیم نردبان از دیوار جدا می‌شود، پس از آن چه می‌شود؟ آیا زمانی وجود دارد که سرِ دیگرِ نردبان هم از زمین بلند شود؟ اگر مسئله را بخواهیم کمی واقعی‌تر کنیم لازم است اصطکاک را هم در نظر بگیریم. اگر ضریبِ اصطکاکِ نردبان با زمین صفر نباشد در چه زاویه‌ای نردبان از دیوار جدا می‌شود؟

۱ بررسی حرکت نردبان قبل از جدا شدن از دیوار با چشم‌پوشی از اصطکاک

نردبانی به جرمِ m و طولِ 2ℓ که زاویه‌اش با افق θ_0 است به دیواری تکیه داده و ثابت نگه داشته‌ایم. در ابتدا برایِ سادگی از اصطکاکِ بینِ نردبان با زمین و دیوار چشم‌پوشی می‌کنیم. برایِ ساده‌سازی به جایِ نردبان که چهار نقطه‌یِ تکیه دارد میله‌ای که دو نقطه‌یِ تکیه دارد را به عنوانِ مدل می‌گیریم.



نردبان را رها می‌کنیم تا لیز بخورد. مکان، سرعت و شتابِ مرکزِ جرمِ نردبان بر حسب θ، زاویه‌ای که نردبان با زمین می‌سازد، و مشتقاتِ زمانی‌یِ آن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{i}\ell\cos\theta + \mathbf{j}\ell\sin\theta, \\ \dot{\mathbf{r}}_C &= -\mathbf{i}\ell\dot{\theta}\sin\theta + \mathbf{j}\ \ell\dot{\theta}\cos\theta, \\ \ddot{\mathbf{r}}_C &= -\mathbf{i}\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + \mathbf{j}\ \ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

نیروهایی که از طرفِ دیوار و کفِ زمین به نردبان وارد می‌شوند را N_B، و N_A می‌گیریم. قانونِ نیوتن برایِ نردبان عبارت است از

$$\begin{aligned} &N_B = -m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta), \\ &N_A - mg = m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta). \end{aligned} \tag{2}$$

معادله‌یِ دینامیکِ دورانی برای گشتاورها حولِ مرکزِ جرم عبارت است از

$$N_B\ell\sin\theta - N_A\ell\cos\theta = I_{\mathrm{cm}}\ddot{\theta}. \tag{3}$$

از حلِ سه معادله‌یِ اخیر نتیجه می‌شود

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell\cos\theta}{I_{cm} + m\ell^2}. \tag{4}$$

با ضرب کردنِ دو طرفِ این معادله در $\dot{\theta}$، هر دو طرفِ آن مشتقِ کاملِ زمانی می‌شوند و نتیجه‌یِ انتگرال‌گیری از آن عبارت است از

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{mg\ell(1 - \sin\theta)}{I_{cm} + m\ell^2} + C, \tag{5}$$

که C مقداری ثابت است و با شرایطِ اولیه تعیین می‌شود

$$C = -\frac{mg\ell(1 - \sin\theta_0)}{I_{cm} + m\ell^2}. \tag{6}$$

پس

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{mg\ell(\sin\theta_0 - \sin\theta)}{I_{cm} + m\ell^2}. \tag{7}$$

می‌توانستیم به جایِ استفاده از معادله‌یِ دینامیکِ دورانی (3) از پایستگی‌یِ انرژی استفاده کنیم و به رابطه‌یِ بالا برسیم. حالا بیایید سرعت و شتابِ یک نقطه‌یِ دل‌خواه از نردبان، مثلِ S که در فاصله‌یِ s از مرکزِ نردبان است، را به دست آوریم. جهتِ مثبت را در راستایِ

نردبان و به سمتِ پایین می‌گیریم. در این صورت $s=\ell$ مربوط به نقطه‌ي A، یک نقطه‌ي انتهاییِ نردبان است آن‌جا که در تماس با زمین است، و $s=-\ell$ مربوط به نقطه‌ي B، نقطه‌ي انتهاییِ دیگر است یعنی نقطه‌ای که نردبان در تماس با دیوار، است.

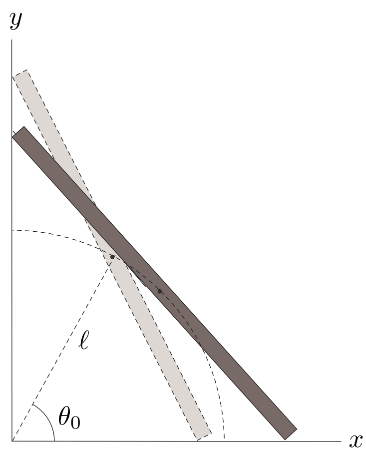
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_S &= \mathbf{i}(\ell+s)\cos\theta+\mathbf{j}(\ell-s)\sin\theta,\\
\dot{\mathbf{r}}_S &= -\mathbf{i}(\ell+s)\dot\theta\sin\theta+\mathbf{j}\ (\ell-s)\dot\theta\cos\theta,\\
\ddot{\mathbf{r}}_S &= -\mathbf{i}(\ell+s)(\ddot\theta\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta)+\mathbf{j}\ (\ell-s)(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta).
\end{aligned}\tag{8}$$

از این‌جا سرعت و شتابِ نقطه‌هاي A و B به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_A=2\mathbf{i}\ \ell\cos\theta,\quad \dot{\mathbf{r}}_A=-2\mathbf{i}\ \ell\dot\theta\sin\theta,\quad \ddot{\mathbf{r}}_A=-2\mathbf{i}\ \ell(\ddot\theta\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta)\\
&\mathbf{r}_B=2\mathbf{j}\ \ell\sin\theta,\quad \dot{\mathbf{r}}_B=2\mathbf{j}\ \ell\dot\theta\cos\theta,\quad \ddot{\mathbf{r}}_B=2\mathbf{j}\ \ell(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta).
\end{aligned}\tag{9}$$

با جاگذاریِ $\dot\theta$ و $\ddot\theta$ و لختیِ دورانیِ میله $I_{\rm cm}=m\ell^2/3$ می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_A &= \frac{3g}{2}(3\sin\theta-2\sin\theta_0)\cos\theta\mathbf{i},\\
\ddot{\mathbf{r}}_B &= \frac{3g}{2}(-1-2\sin\theta\sin\theta_0+3\sin^2\theta)\mathbf{j},\\
\ddot{\mathbf{r}}_C &= \frac{\ddot{\mathbf{r}}_A+\ddot{\mathbf{r}}_B}{2}\\
&= \frac{3g}{4}(3\sin\theta-2\sin\theta_0)\cos\theta\mathbf{i}+\frac{3g}{4}(-1-2\sin\theta\sin\theta_0+3\sin^2\theta)\mathbf{j}
\end{aligned}\tag{10}$$



با استفاده از (7،4،2) N_1 به دست می‌آید

$$N_B = \frac{m^2 g\ell^2 \cos\theta(3\sin\theta - 2\sin\theta_0)}{I_{cm} + m\ell^2}. \tag{11}$$

در زاویه‌یِ $\theta_1 = \arcsin(\frac{2}{3}\sin\theta_0)$، $N_B = 0$ می‌شود. آیا صفر شدنِ نیرویِ عمود بر سطح کافی است تا نتیجه بگیریم که جسم از سطح جدا می‌شود؟ پاسخ منفی است. در لحظه‌ای که نیرویِ عمود بر سطح می‌شود شتابِ عمود بر سطح صفر است. در این لحظه سرعتِ عمود بر سطح هم صفر است. اما صفر بودنِ این دو برایِ جدا شدنِ جسم از سطح کفایت نمی‌کند. جدا شدن از سطح به این بستگی دارد که یکی از مشتقاتِ بعدی‌یِ مؤلفه‌یِ عمود بر سطحِ سرعت غیرِصفر باشد. ممکن است $N_B = 0$ مقدارِ کمینه‌یِ نیرویِ عمود بر سطح باشد. در این حالت جسم از سطح جدا نمی‌شود. ممکن هم هست که نیرویِ عمود بر سطح تابعی نزولی باشد. در این صورت پس از این‌که $N_B = 0$ شد، تغییرِ علامت می‌دهد. در این‌حالت جسم از سطح جدا می‌شود و حتماً یکی از مشتقاتِ بعدی‌یِ مؤلفه‌یِ عمود بر سطحِ سرعت غیرِصفر است. همان‌طور که از (11) می‌بینیم پس از آن‌که θ از θ_1 می‌گذرد N_B تغییرِ علامت می‌دهد. یعنی آن‌که اگر نردبان مقید باشد که از دیوار جدا نشود پس از گذشتن از θ_1، N_B منفی می‌شود، یعنی از این پس نیرویی لازم است تا جلویِ جداشدنِ نردبان از دیوار را بگیرد. فرض کنید به جایِ آن‌که نردبان به دیوار تکیه داشته باشد، آن را به میله‌ای تکیه داده باشیم. در انتهایِ نردبان هم حلقه‌ای باشد و میله از آن حلقه رد شده باشد. در این صورت حرکتِ میله مقید است. در حینِ افتادنِ نردبان مدتی نیرویِ $N_B > 0$ است، تا آن‌که بالاخره در زاویه‌یِ $\theta_1 = \arcsin(\frac{2}{3}\sin\theta_0)$، $N_B = 0$ می‌شود. پس از گذشتن از این زاویه $N_B < 0$ می‌شود. از این به بعد نیرویِ N جلویِ جداشدنِ نردبان از میله را می‌گیرد. اما در این حالت که چنین قیدی وجود ندارد، نیرویی نیست که جلویِ جداشدنِ نردبان از دیوار را بگیرد. بنا بر این نردبان از دیوار جدا می‌شود.

با تحلیلِ ابعادی هم می‌توان چیزهایی در موردِ زاویه‌یِ جدا شدنِ نردبان از دیوار گفت. کمیت‌هایِ دخیل در مسئله θ_0، θ_1، $I_{\rm cm}$، m، و ℓ هستند. از این‌ها سه کمیتِ بی‌بعدِ θ_0، θ_1 و $\alpha := \frac{I_{\rm cm}}{m\ell^2}$ را می‌توان ساخت. پس

$$\theta_1 = f(\alpha, \theta_0). \tag{12}$$

البته ما در این‌جا α را $1/3$ گرفته‌ایم. در هر صورت θ_1 به جرم و طولِ نردبان بستگی ندارد. تحلیلِ ابعادی می‌گوید که به زاویه‌یِ اولیه‌یِ θ_0 و ثابتِ بی‌بعدِ α می‌تواند بستگی داشته باشد. هر چند محاسبه‌یِ صریح نشان می‌دهد که تنها به θ_0 بستگی دارد.

تا قبل از این که $N_B = 0$ شود، مرکزِ جرمِ نردبان رویِ دایره‌ای به شعاعِ ℓ حرکت می‌کند. زمانی که $\theta = \theta_1$ شود، سرعت و شتاب‌هایِ نقاطِ A، B، و C عبارت‌اند از

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{i}\sqrt{\frac{8g\ell}{9}\sin^3\theta_0}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_A = 0,$$
$$\dot{\mathbf{r}}_B = -\mathbf{j}\sqrt{2g\ell\sin\theta_0}\cos\theta_1, \quad \ddot{\mathbf{r}}_B = -\frac{3g}{2}\mathbf{j},$$
$$\dot{\mathbf{r}}_C = \frac{\dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_B}{2}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_C = -\frac{3g}{4}\mathbf{j} \tag{13}$$

سرعت و شتابِ نقطه‌یِ B در جهتِ $-\mathbf{j}$ است، پس انتظار داریم در راستایِ y حرکت کند و N_B هم‌چنان صفر بماند. بیایید به این سئوال بپردازیم که در لحظه‌یِ جداشدنِ نردبان همان‌طور که از رابطه‌یِ (8) پیداست مؤلفه‌یِ افقی‌یِ مکانِ سرِ نردبان و همه‌یِ مشتقاتِ زمانی‌یِ آن صفرند، پس چرا نردبان جدا می‌شود. در واقع باید ببینیم پس از آن‌که $N_B = 0$ می‌شود این کمیت‌ها چه می‌شوند. کمیت‌هایِ $S^\pm$ را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم

$$S_\pm(\theta_1) = \lim_{\epsilon\to 0^+} S(\theta)\big|_{\theta=\theta_1\pm\epsilon}. \tag{14}$$

کمیتِ S_+ (S_-) مقدارِ S درست پس (قبل) از آن است که $N_B = 0$ شود. بنا بر این

$$\dot\theta_-^2 = \frac{3g}{4\ell}\sin\theta_1, \qquad \ddot\theta_- = -\frac{3g}{4\ell}\cos\theta_1,$$
$$x_{A,-} = 0, \qquad \dot x_{A,-} = 0, \qquad \ddot x_{A,-} = 0, \cdots \tag{15}$$

برایِ آن‌که نردبان از دیوار جدا شود باید x_B بزرگ‌تر از صفر شود. برایِ آن‌که این اتفاق بیفتد باید وقتی که $\theta = \theta_1$ می‌شود، حداقل یکی از مشتقاتِ زمانی‌یِ x_B بزرگ‌تر از صفر شود. واضح است که مکانِ نقطه‌یِ B پیوسته است. برایِ آن‌که سرعتِ ناپیوسته باشد باید نیرویی بی‌نهایت به نقطه‌یِ B وارد شود که فیزیکی نیست. پس $x_{B,+} = 0$، $\dot x_{B,+} = 0$. حالا باید ببینیم‌حرکتِ نردبان از این پس چه می‌شود. مکانِ مرکزِ جرم، سرعت و شتابِ آن بر حسبِ x_B، θ و مشتقاتِ آن‌ها عبارت‌اند از

$$x_c = x_B + \ell\cos\theta, \qquad y_c = \ell sin\theta,$$
$$\dot x_c = \dot x_B - \ell\dot\theta\sin\theta, \qquad \dot y_c = \ell\dot\theta\cos\theta,$$
$$\ddot x_c = \ddot x_B - \ell(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta), \quad \ddot y_c = \ell(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta), \tag{16}$$

انرژی‌یِ مکانیکی پایسته است. چون نیرویِ افقی وجود ندارد مولفه‌یِ xِ تکانه‌یِ خطی‌یِ مرکز جرم پایسته است، پس $\dot x_c$ ثابت می‌ماند. انرژی عبارت است از

$$E = mg\ell\sin\theta_0 = \frac{m}{2}(\dot x_c^2 + \dot y_c^2) + \frac{1}{2}I_{\rm cm}\dot\theta^2 + mg\ell\sin\theta \tag{17}$$

و پس از آن‌که $N_B = 0$ می‌شود

$$mg\ell\sin\theta_0 = \frac{m}{2}[\dot{x}_{B,+}^2 + \ell^2\dot{\theta}_+^2 - 2\dot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+\sin\theta_1] + \frac{1}{2}I_{\rm cm}\dot{\theta}_+^2 + mg\ell\sin\theta_1 \quad (18)$$

$$\ddot{x}_{B,+} = \ell(\ddot{\theta}_+\cos\theta_+ - \dot{\theta}_+^2\sin\theta_+). \quad (19)$$

با استفاده از $\dot{x}_{B,+} = 0$ و جاگذاری در (18) نتیجه می‌دهد

$$\dot{\theta}_+^2 = \dot{\theta}_-^2 = \frac{3g}{4\ell}\sin\theta_1, \quad (20)$$

اگر از (18) نسبت به زمان مشتق بگیریم

$$\begin{aligned} & m[\dot{x}_{B,+}\ddot{x}_{B,+} + \ell^2\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ - \ddot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+\sin\theta_+ - \dot{x}_{B,+}\ell\ddot{\theta}_+\sin\theta_1 - \dot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+^2\cos\theta_+] \\ & +I_{\rm cm}\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+ + mg\ell\dot{\theta}_+\cos\theta_+ = 0, \\ \Rightarrow \quad & (m\ell^2 + I_{\rm cm})\ddot{\theta}_+ - m\ell\sin\theta_+\ddot{x}_{B,+} + mg\ell\cos\theta_+ = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

که هم‌راه با (19) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_{A,+} = \ddot{x}_{A,-} = 0, \\ & \ddot{\theta}_+ = \ddot{\theta}_- = -\frac{3g}{4\ell}\cos\theta_1, \end{aligned} \quad (22)$$

با مشتق‌گیری از (19) و معادله‌یِ اولِ (21) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \dddot{x}_{B,+} &= \ell\dddot{\theta}_+\sin\theta_+ + 3\ell\dot{\theta}_+\ddot{\theta}_+\cos\theta_+ - \ell\dot{\theta}_+^3\sin\theta_+, \\ 0 &= m[\ell^2\ddot{\theta}_+^2 + \ell^2\dot{\theta}\ \dddot{\theta}_+ - \dddot{x}_{B,+}\ell\dot{\theta}_+\sin\theta_+] + I_{\rm cm}\dot{\theta}_+\dddot{\theta}_+ \\ & \quad +I_{\rm cm}\ddot{\theta}_+^2 + mg\ell\ddot{\theta}_+\cos\theta_+ - mg\ell\dot{\theta}_+^2\sin\theta_+. \end{aligned} \quad (23)$$

با حلِ این دو معادله $\dddot{\theta}_+$ و $\dddot{x}_+$ به دست می آید

$$\begin{aligned} & \dddot{\theta}_+ = -\sqrt{\frac{27g^3}{16\ell^3}\sin^3\theta_1}, \\ & \dddot{x}_{B,+} = \frac{27}{8}\sqrt{\frac{g^3\sin\theta_1}{3\ell}}. \end{aligned} \quad (24)$$

این نتیجه با جداشدنِ نردبان از دیوار سازگار است.

۲ حرکتِ نردبان پس از جدا شدن از دیوار

حالا بیایید حرکت نردبان پس از جدا شدن از دیوار را بررسی کنیم. پس از جدا شدنِ نردبان از دیوار پایستگی‌یِ انرژی نتیجه می‌دهد

$$mg\ell\sin\theta_0 = \frac{m}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\dot{\theta}^2 + +mg\ell\sin\theta \tag{25}$$

که هم‌راه با پایستگی‌یِ مولفه‌یِ xِ سرعتِ مرکزِ جرمِ نردبان

$$\dot{x}_c = -\ell\dot{\theta}\sin\theta\big|_{\theta=\theta_1} = \sqrt{\frac{2g\ell\sin^3\theta_0}{9}} \tag{26}$$

منجر می‌شود به

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g[\sin\theta_0 - \sin\theta - \dfrac{\sin^3\theta_0}{9}]}{\ell(3\cos^2\theta + 1)} \tag{27}$$

معادلاتِ حاکم بر حرکتِ نردبان عبارت اند از

$$\begin{aligned} N_A - mg &= m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \\ N_A\ell\cos\theta &= -I_{\mathrm{cm}}\ddot{\theta}. \end{aligned} \tag{28}$$

زمانی که نردبان بخواهد از زمین بلند شود $N_A = 0$ و در نتیجه $\ddot{\theta} = 0$ و بالاخره $\dot{\theta}^2 = \dfrac{g}{\ell\sin\theta}$ می‌شود. اگر این اتفاق بخواهد رخ دهد در زاویه‌ای مثلِ θ_2 رخ می‌دهد که

$$\frac{g}{\ell\sin\theta_2} = \frac{6g[\sin\theta_0 - \sin\theta_2 - \dfrac{\sin^3\theta_0}{9}]}{\ell(3\cos^2\theta_2 + 1)}. \tag{29}$$

با ساده کردنِ این معادله می‌رسیم به

$$\sin^2\theta_2 - 2\sin\theta_2(\sin\theta_0 - \frac{\sin^3\theta_0}{9}) + \frac{4}{3} = 0 \tag{30}$$

که جوابِ آن

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_0 - \frac{\sin^3\theta_0}{9} \pm \sqrt{(\sin\theta_0 - \frac{\sin^3\theta_0}{9})^2 - \frac{4}{3}} \tag{31}$$

اما چون $\sin\theta_0 - \dfrac{\sin^3\theta_0}{9} < 1$ است، زیر رادیکال هم‌واره منفی است و جوابِ قابلِ قبولی برایِ θ_2 وجود ندارد. بنا بر این $N_A \neq 0$ است و نردبان از زمین بلند نمی‌شود. زمانی که نردبان افقی می‌شود

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g[\sin\theta_0 - \frac{\sin^3\theta_0}{9}]}{2\ell}} \qquad (32)$$

۳ بررسی حرکت نردبان قبل از جدا شدن از دیوار با در نظر گرفتنِ اصطکاکِ بینِ نردبان و زمین

بیایید اصطکاکِ بینِ نردبان با زمین را در نظر بگیریم. برایِ سادگیِ محاسبه در این‌جا ما هم‌چنان از اصطکاکِ بینِ نردبان و دیوار چشم‌پوشی می‌کنیم. ضریبِ اصطکاکِ بینِ نردبان با زمین، μ را کوچک ولی غیرِقابلِ‌چشم‌پوشی می‌گیریم. نردبان را رها می‌کنیم تا لیز بخورد. می‌خواهیم ببینیم به ازایِ چه‌مقداری از θ نردبان از دیوار جدا می‌شود؟[1] این زاویه را θ_2 می‌گیریم و آن را تا مرتبه‌یِ اولِ μ به دست می‌آورید. قانونِ نیوتن برایِ نردبان عبارت است از

$$\begin{aligned} N_B - \mu N_A &= -m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta), \\ N_A - mg &= m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta). \end{aligned} \qquad (33)$$

معادله‌یِ دینامیکِ دورانی برای گشتاورها حولِ مرکزِ جرم عبارت است از

$$N_B\ell\sin\theta + \mu N_A\ell\sin\theta - N_A\ell\cos\theta = I_{\mathrm{cm}}\ddot{\theta}. \qquad (34)$$

از حلِ (33) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} N_B &= \mu mg - m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + \mu m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \\ N_A &= mg + m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \end{aligned} \qquad (35)$$

که با جاگذاری در (34) و ساده کردنِ نتیجه می‌رسد به

$$(I_{cm} + m\ell^2)\ddot{\theta} - 2\mu m\ell^2\sin\theta(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = mg\ell(2\mu\sin\theta - \cos\theta). \qquad (36)$$

[1] برایِ آشناییِ مقدماتی با روشِ اختلال می‌توانید مرجعِ [۱] را ببینید.

اگر μ صفر بود حلِ معادله مثلِ مسئله‌ي قبل بود اما حالا که $\mu \neq 0$ است تا مرتبه‌ي صفرمِ اختلال جوابِ معادله‌ي (36)

$$\begin{aligned} [\dot\theta^{(0)}]^2 &= \frac{2mg\ell(\sin\theta_0 - \sin\theta)}{I_{cm} + m\ell^2}, \\ \ddot\theta^{(0)} &= -\frac{mg\ell\cos\theta}{I_{cm} + m\ell^2}, \end{aligned} \tag{37}$$

است. جوابِ معادله‌ي (36) تا مرتبه‌ي اولِ μ را

$$\dot\theta^2 = [\dot\theta^{(0)}]^2 + \mu F(\theta) \tag{38}$$

می‌گیریم. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\ddot\theta = \ddot\theta^{(0)} + \frac{\mu}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\theta). \tag{39}$$

توجه داریم که شرطِ اولیه منجر می‌شود به $F(\theta_0) = 0$. با جاگذاریِ (38) و (39) در (36) و نگه داشتنِ جملاتِ تا مرتبه‌ي اولِ μ می‌رسیم به

$$(I_{cm} + m\ell^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\theta) = 4mg\ell\sin\theta[\frac{m\ell^2(-2\sin\theta_0\sin\theta + 3\sin^2\theta - 1)}{I_{cm} + m\ell^2} + 1]. \tag{40}$$

با استفاده از $I_{cm} = \dfrac{m\ell^2}{3}$ می‌رسیم به

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\theta) = \frac{3g}{4\ell}\big[9\sin^3\theta - 6\sin^2\theta\sin\theta_0 + \sin\theta\big] \tag{41}$$

حالا کافی است از این معادله انتگرال بگیریم و از $F(\theta_0) = 0$ استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} F(\theta) = \quad & \frac{3g}{4\ell}\big[3(\cos^3\theta - \cos^3\theta_0) - 10(\cos\theta - \cos\theta_0) - 3(\theta - \theta_0)\sin\theta_0 \\ & + \frac{3}{2}(\sin 2\theta - \sin 2\theta_0)\sin\theta_0\big] \end{aligned} \tag{42}$$

با داشتنِ $F(\theta)$، $\dot\theta^2$ و $\ddot\theta$ را تا مرتبه‌ي اول داریم. با جاگذاریِ این‌ها در (35) و ساده کردنِ نتیجه معادله‌ای که زاویه‌ي جداشدن θ_2 را می‌دهد عبارت است از

$$N_B(\theta_2) \quad = \quad \mu mg - m\ell\big[(-\frac{3g}{4\ell}\cos\theta_2 + \frac{\mu}{2}F'(\theta_2))\big]\sin\theta_2 +$$

$$-m\ell\big[\frac{3g}{2\ell}(\sin\theta_0-\sin\theta_2)+\mu F(\theta_2)\big]\cos\theta_2$$
$$+\mu m\ell\big[-\frac{3g}{4\ell}\cos^2\theta_2+\frac{3g}{2\ell}(\sin\theta_0-\sin\theta_2)\sin\theta_2\big]=0 \quad (43)$$

توجه داریم که چون ما جواب را تا مرتبه‌ی اولِ μ می‌خواهیم جملاتِ داخلِ کروشه در خطِ آخر را تا مرتبه‌ی صفرم نگه داشته‌ایم. اگر μ صفر بود نردبان در زاویه‌ی $\theta_1=\arcsin(\frac{2}{3}\sin\theta_0)$ از دیوار جدا می‌شد. بنا بر این زاویه‌ی جدا شدن در این حالت، θ_2، تا مرتبه‌ی صفرمِ μ همان جوابِ قبل است و

$$\theta_2=\theta_1+\delta\theta. \quad (44)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\sin\theta_2=\sin(\theta_1+\delta\theta)\approx\sin\theta_1+\delta\theta\cos\theta_1,$$
$$\cos\theta_2\approx\cos\theta_1-\delta\theta\sin\theta_1. \quad (45)$$

توجه داریم که $\delta\theta$ از مرتبه‌ی μ است. با جاگذاری‌ِ این‌ها در (43) و نگه داشتنِ جملاتِ تا مرتبه‌ی اولِ μ، $\delta\theta$ و در نتیجه θ_2 به دست می‌آید. اگر فرض کنیم که نردبان در ابتدا قائم بوده $\theta_0=\pi/2$، روابطِ‌مان ساده‌تر می‌شود

$$F(\theta)=\frac{3g}{4\ell}\big[3\cos^3\theta-10\cos\theta-3(\theta-\pi/2)+\frac{3}{2}\sin 2\theta\big]$$
$$F'(\theta)=\frac{3g}{4\ell}\big[-9\cos^2\theta\sin\theta+10\sin\theta-3+3\cos 2\theta\big],$$
$$\sin\theta_2\approx\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\delta\theta,$$
$$\cos\theta_2\approx\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\delta\theta, \quad (46)$$

با استفاده از همه‌ی این‌ها نتیجه می‌شود $\delta\theta=-1.57\mu$، و

$$\theta_2=\arcsin(\frac{2}{3})-1.57\mu \quad (47)$$

اگر μ صفر باشد زاویه‌ی جداشدنِ نردبان $\theta_1=\arcsin(\frac{2}{3})\approx 41.8^\circ$ است. با فرضِ $\mu=0.1$

$$\theta_2\approx 34.7^\circ. \quad (48)$$

توجه داریم که مثلاً اگر $\mu=0.4$ باشد تقریبِ تا مرتبه‌ی اول به درد نمی‌خورد زیرا جمله‌ی مرتبه‌ی اول از همان مرتبه‌ی جمله‌ی مرتبه‌ی صفرم می‌شود.

مرجع

۱ – امیرِ آقامحمدی؛ اختلال: گاما، شماره‌یِ ۴ (پاییزِ ۱۳۸۳)، ۳۹ تا ۵۳