پَکِشِ بیشینه

مریم عرب سلمانی،[*] امیر آقامحمدی

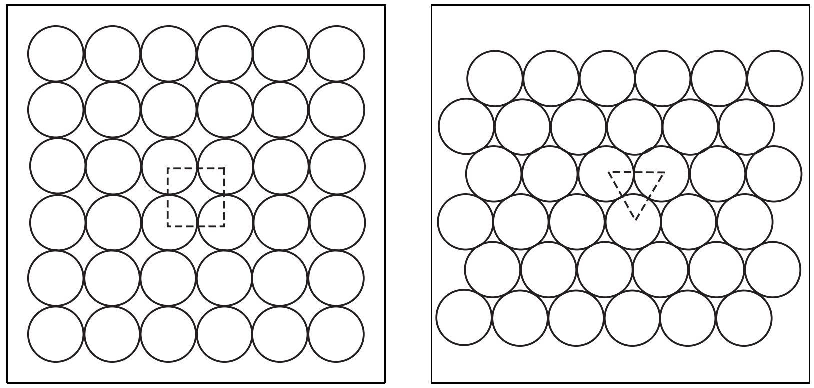
۱۳۸۰

چکیده: ابتدا پَکِش را تعریف می‌کنیم. سپس در بخشِ دوم مسئله‌یِ عبورِ مایعی از درونِ مقداری شن را مدل‌سازی می‌کنیم.

سطحی که تخت و نامحدود است را می‌توانیم با کاشی‌هایِ مربع‌شکل، با هر اندازه‌ای، فرش‌کنیم. اگر این سطح محدود باشد ممکن است در نزدیکیِ مرز جاهایی باقی بمانند که پوشیده نشده‌اند. هر چه کاشی‌ها کوچک‌تر باشند نسبت سطحِ پوشانده‌شده به سطحِ کل بیش‌تر می‌شود. اگر از آثارِ مربوط به مرز صرفِ‌نظر کنیم با آرایشی منظم از کاشی‌هایِ مربع‌شکل، می‌توانیم هر سطحِ تختی را کاملاً بپوشانیم. اگر کاشی‌ها را به صورت تصادفی روی سطح بریزیم، به طوری که کاشی‌ها رویِ هم را نپوشانند، همه‌ی سطح پوشانده نخواهد شد. اگر بخواهیم سطح را با کاشی‌هایِ دایره‌ای بپوشانیم حتیٰ با آرایشِ منظم هم همه‌یِ سطح را نمی‌توانیم بپوشانیم. البته بدیهی است با آرایش‌هایِ مختلفِ کاشی‌هایِ دایره‌ای اندازه‌یِ سطحِ پوشانده شده متفاوت است ولی هیچ آرایشی وجود ندارد که کلِ سطح را کاملاً بپوشاند. نسبت سطحِ پوشیده شده به کل سطح را "پکش" می‌گوییم. در موردی که کاشی‌هایِ مربعی به طورِ منظم کنارِ هم چیده شده‌اند پکش یک است. در موردِ آرایشِ نامنظمِ کاشی‌هایِ مربعی پکش عددی کوچکتر از یک است. اگر بخواهیم همان سطح را با کاشی‌هایِ دایره‌ای شکل بپوشانیم پکش حتماً کوچکتر از یک است. برایِ مثال دو نوع چیدن سکه‌هایِ دایره‌ای را در شکلِ ۱ می‌بینیم. شکلِ ۱ —الف پکشِ بیشینه دارد.

برایِ یک فضایِ سه بعدی پکش نسبتِ حجمِ اشغال‌شده به حجمِ کل است. فرض کنید می‌خواهیم تعدادی پرتقال را در جعبه‌ای بچینیم. بهترین نوعِ چیدن که در این‌جا

[*] A. Aghamohammadi://www.alzahra.ac.ir/mohamadi



شکلِ ۱ — الف شکلِ ۱ — ب

منظور جمع و جورترین نوع چیدن است، چه جور چیدنی است؟ به همین ترتیب مسئله قابلِ تعمیم به ابعادِ بالاتر است.

در سالِ ۱۶۱۱ کپلر این سئوال را در موردِ پر کردنِ یک فضایِ ۳ بعدی با تعدادی کره مطرح کرد. او ادعا کرد پکشِ بیشینه‌حدودِ ۷۴ درصد است. به همین خاطر این مسئله به " حدسِ کپلر " معروف است. طیِ سال‌هایِ پس از آن به دفعات ادعا شد که حدسِ کپلر اثبات شده‌است، که همیشه پس از مدتی معلوم می‌شد اثباتِ کامل و صحیحی نبوده‌است. تا آن که همین اواخر یعنی در سالِ ۱۹۹۸ بالاخره حدسِ کپلر اثبات شد.

ابتدا مسئله‌یِ دو بعدی را در نظرمی‌گیریم. برایِ سنجشِ فضایِ پوشانده‌شده از پکشِ σ استفاده می‌کنیم. در محاسبه‌یِ σ برایِ آرایشِ منظم کافی است ببینیم پکش در یک سلول واحد چه‌قدر است. سلولِ واحد به این صورت تعریف می‌شود که با چیدنِ منظمِ این سلول‌ها کنارِ هم کلِ سطح ساخته‌شود. برایِ پوشاندنِ سطحی نامحدود با سکه مدلی که در شکلِ ۱ —الف نشان داده‌شده بیشترین پکش را دارد. در این مدل سلولِ واحد مثلثی است که سه رأسش مرکز سه دایره‌ی مجاور است. اگر شعاعِ دایره‌ها را R بگیریم،

$$\sigma = 3(\frac{\pi R^2}{6})/(\sqrt{3}R^2) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \simeq 0.91. \qquad (۱)$$

بنا بر این در این نوع چیدن 91 درصدِ سطح پوشانده می‌شود. از آن جا که پکش کمیتی بدونِ بعد است و چون در این مثال هیچ کمیت دیگری به غیر از R با بعدِ طول نداریم، همان طورکه انتظار می‌رود σ به R بستگی ندارد. بنابراین حداکثر سطحی را که با تعدادی سکه‌یِ مشابه با هر شعاعِ دلخواهی، می‌توان پوشاند 0.91 سطحِ کل است. بدیهی است اگر سطحی را که می‌خواهیم بپوشانیم محدود باشد بسته به اندازه‌یِ سطح و شکلِ مرزِ آن پکش می‌تواند بیش‌تر و یا کم‌تر از 0.91 باشد. در واقع برایِ یک سطحِ محدود، حداقل یک مقیاسِ طول مثلِ L واردِ مسئله می‌شود. در این‌صورت σ به R/L بستگی خواهد داشت. در حدّ $R/L \to 0$ پکشِ بیشینه به 0.91 میل می‌کند.

کپلر ادعا کرده‌بود پکشِ بیشینه برایِ فضایی نامحدود که با تعدادی کره پُر شده $\pi/\sqrt{18}\approx 0.74$ است. اثبات‌هایِ متعددی برایِ این حدسِ ادعا شده‌بود که هیچ‌کدام کامل نبودند تا این که بالاخره همین اواخر در سالِ ۱۹۹۸ هِیلز[1] اثباتِ کاملی که به شدت بر محاسباتِ مفصلِ کامپیوتری متکی بود ارائه کرد. برنامه‌ای که هیلز ارائه داد چیزی حدودِ 3 گیگا بایت از حافظه‌ی کامپیوتر را اشغال می‌کرد. هیلز در 8 مقاله که مرجعِ [1] اولینِ آن‌ها بود حدسِ کپلر را اثبات کرد. پیش از آن راجِرز[2] در سالِ ۱۹۵۸ نشان داده‌بود

$$\sigma_{\max} < \sqrt{18}(\cos^{-1}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\pi)\simeq 0.77963557. \qquad (۲)$$

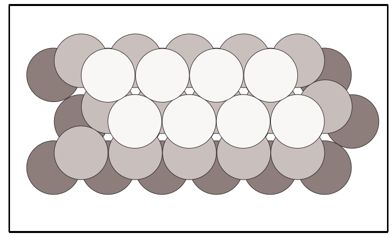
در سالِ ۱۹۸۳ نشان داده‌شد که این مقدارِ بیشینه باید کم‌تر از 77.844 باشد و بالاخره در سالِ ۱۹۸۶ این حدِ بالا تا 77.836 درصد کم شد. راجرز در سالِ ۱۹۵۸ گفته بود "**همه‌ی ریاضی‌پیشه‌ها باور دارند وهمه‌ی فیزیک‌پیشه‌ها می‌دانند که پکشِ بیشینه 74.048 درصد است**".

دو روش مختلفِ چیدن کره‌ها با پکشِ بیشینه روش‌هایِ HCP (پکشِ بیشینه‌یِ شش‌ضلعی[3]) و CCP (پکشِ بیشینه‌یِ مکعبی[4]) هستند. در هر دو این روش‌ها پکش بیشینه و برابر با $\pi/\sqrt{18}$ است. کره‌هایِ لایه‌ی اول را درست شبیهِ سکه‌ها با بیشترین پکش یعنی شکلِ ۱—الف کنار هم می‌چینیم. کره‌هایِ لایه‌ی دوم را رویِ حفره‌هایِ لایه‌ی اول قرار می‌دهیم. برایِ لایه‌ی سوم این آزادی وجود دارد که کره‌ها را به موازاتِ لایه‌ی اول قرار دهیم و یا این‌که چیدنِ لایه‌یِ سوم یک جابه‌جایی نسبت به لایه‌یِ اول داشته باشد. آرایشِ نوعِ اول HCP (شکلِ ۲—الف) و آرایشِ نوعِ دوم CCP (شکلِ ۲—ب) است. در مدلِ HCP سلولِ واحد منشوری است که قاعده‌ی آن یک شش ضلعیِ منتظم به ضلعِ $2R$ و راس‌هایِ آن شش کره به شعاعِ R هستند. ارتفاعِ این منشور $4\sqrt{\frac{2}{3}}R$ است و شاملِ 6 تا $1/6$ کره و یک نیم‌کره از لایه‌ی اول و جمعاً 3 کره‌ی کامل از لایه‌ی دوم و 6 تا $1/6$ کره و یک نیم‌کره از لایه‌ی سوم است. بنا بر این پکش

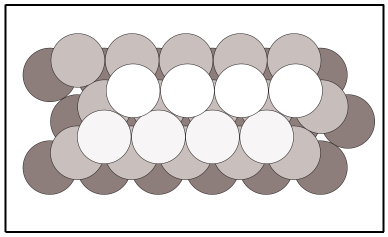
$$\sigma=\frac{6(\frac{4\pi R^3}{3})}{6\sqrt{3}R^2(4\sqrt{\frac{2}{3}}R)}=\frac{\pi}{\sqrt{18}}\simeq 0.74. \qquad (۳)$$

در مدلِ CCP سلولِ واحدی که در نظر می‌گیریم مکعبی به ضلعِ $2\sqrt{2}R$ است. در این مکعب 3 تا $1/8$ کره و 3 تا نیم‌کره از لایه‌ی اول و 3 تا $1/8$ کره و 3 تا نیم‌کره از لایه‌ی دوم و 2 تا $1/8$ کره از لایه‌ی سوم قرار دارد. بنا بر این پکش

$$\sigma=4\frac{4\pi R^3}{3}(2\sqrt{2}R)^{-3}=\frac{\pi}{\sqrt{18}}\simeq 0.74. \qquad (۴)$$



شکلِ ۲ — الف



شکلِ ۲ — ب

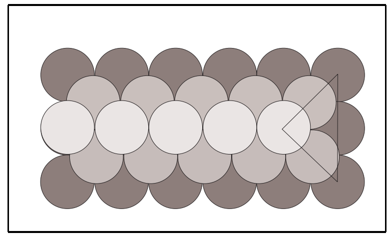
آرایشِ نوعِ سومی نیز وجود دارد. در این نوع آرایش لایه‌یِ اول را مثلِ شکلِ ۱—ب می‌چینیم. لایه‌یِ دوم را به همین صورت رویِ لایه‌یِ اول می‌چینیم. اگر به همین صورت برایِ لایه‌یِ سوم ادامه دهیم، آرایشی به دست می‌آید که پکشِ بیشینه‌یِ هرمی[5] یا PCP، نام دارد. این نوع آرایش را در شکلِ ۳ می‌بینید. با کمی دقت می‌توان دید که این مدل همان CCP است که چرخیده است. مثلثی که در شکلِ ۳ می‌بینید همان صفحه‌یِ لایه‌ها در شکلِ ۲—الف است.

حال اگر کره ها را به صورتِ تصادفی رویِ هم بریزیم پکش کم‌تر از پکشِ بیشینه است. پکشِ تصادفی برای پر کردن فضایی نامحدود با کره حدودِ 68 درصد است. پکش تصادفی در حالتی که شعاعِ هر کره قابلِ مقایسه با مقیاسِ طولِ فضایی که قرار است پوشانده شود باشد می‌تواند بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از 68 درصد شود. ظرفِ بزرگی را اگر یک‌بار با نخود پُر کنیم و سپس همان نخودها را آرد کنیم و درونِ ظرف بریزیم در هر دو حالت پکش به یک اندازه یعنی حدودِ 68 درصد است.

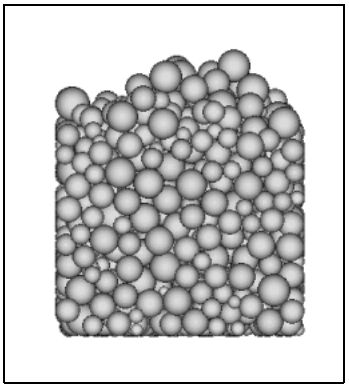
اگر به جای یک جور کره از چند جور کره با شعاع‌هایِ مختلف، مثلاً R_1 و R_2 و $\cdots$ استفاده کنیم، مسئله پیچیده‌تر می‌شود (شکلِ ۴ را ببینید). اگر دسته‌ای از کره‌ها بزرگ‌تر از دسته‌های دیگر باشند، $R_1 \gg R_2, R_3, \cdots$، کره‌هایِ کوچک‌تر در فضایِ خالی بینِ کره‌هایِ بزرگ‌تر قرار می‌گیرند، و پکش از 74 درصد بیش‌تر می‌شود. بنا بر این اگر بخواهیم با استفاده از کره پکش بیش از 74 درصد داشته باشیم بهتر است از مثلاً دو جور کره که شعاعِ یک نوعِ آن خیلی کوچک‌تر از دیگری است استفاده کنیم. یکی از مسائلی که اخیراً موردِ بررسی قرار گرفته، پکشِ بیضی‌گون‌ها است. خبرِ آن در همین شماره‌یِ گاما آمده است.

۱ مدلی برایِ محاسبه‌یِ زمانِ عبورِ شاره‌ای از یک ستونِ شن

می‌خواهیم ببینیم زمانی که طول می‌کشد مایعی از مقداری شن عبور کند، چه‌گونه به ابعادِ شن مربوط است. شن‌ها را کره می‌گیریم و چون شن‌ها را به صورت تصادفی رویِ هم ریخته‌ایم، پکش حدودِ 68 درصد است. ظرفِ استوانه‌ای شکلی که در انتهایش شیری



شکلِ ۳



شکلِ ۴

نصب شده را تا ارتفاعِ h از گلوله‌هایی کروی با شعاعِ r_1 پُر می‌کنیم. شعاعِ استوانه R است. سپس تا ارتفاعِ Δ بالایِ کره‌ها آب می‌ریزیم. آب در مسیری نامنظم از لابه‌لایِ کره‌ها به انتهایِ ظرف می‌رسد. اینک شیر را باز می‌کنیم. مدت زمانی که طول می‌کشد به اندازه‌یِ حجمِ v_1 آب از ظرف خارج شود، T_1 است. همین آزمایش را با کره‌هایی به شعاعِ r_2 تکرار می‌کنیم. در این حالت زمان خارجِ شدن همان‌حجم آب T_2 است. می‌خواهیم رابطه‌یِ بین T_2/T_1 و r_1 و r_2 را به دست آوریم. فرض کنید $R \gg r_1, r_2$.

حجمِ ظرف تا ارتفاعِ h، V است که به اندازه‌یِ σV از آن توسطِ گلوله‌ها پر شده‌است. σ پکش است. آب در فضایِ خالیِ بینِ کره‌ها که حجمِ آن $(1-\sigma)V$ است، حرکت می‌کند. سطحِ مقطعی از ظرف را در نظر بگیرید. مساحت این مقطع A است که بخشی از آن توسط کره‌ها پوشیده‌شده‌است. مقدارِ پوشیده‌شده توسطِ کره‌ها σA و N_1 تعدادِ کره‌هایی است که سطحِ A را قطع می‌کنند،

$$N_1 = \frac{\sigma A}{\pi r_1^2}.$$

در مدلی که ما درنظر می‌گیریم، استوانه به جایِ آن که با گلوله پر شده‌باشد، استوانه‌ای توپُر است که N_1 استوانه‌یِ با شعاعِ a_1 از داخلش در آورده‌باشیم. در این صورت،

$$(1-\sigma)A = N_1 \pi a_1^2$$

در این حالت آب به جایِ آن که از مسیر کج و کوله حرکت کند از این استوانه‌هایِ نازک پایین می‌آید. Q_1 شارِ عبوری از کلِ سطح و q_1 شارِ عبوری از هر یک از استوانه‌هایِ نازک است. در این صورت،

$$Q_1 = N_1 q_1$$

می‌توان نشان داد که در حالت پایا شار عبوری q از استوانه‌ای به شعاعِ a، $q = Ca^4$ است. حرکتِ پایایِ شاره درونِ استوانه در بیش‌ترِ کتاب‌هایِ مکانیکِ شاره‌ها بررسی می‌شود.

ضریبِ تناسبِ C به ویژگی‌هایِ سیال مانند گرانروی، چگالی و اختلافِ فشارِ دو سرِ استوانه بستگی دارد. با استفاده از روابطِ فوق می‌بینیم $Q_1 = \frac{(1-\sigma)AC}{\pi}a_1^2$، اینک اگر همین رابطه را برایِ کره‌هایِ نوعِ دوم بنویسیم خواهیم داشت $Q_2 = \frac{(1-\sigma)AC}{\pi}a_2^2$، و بنا بر این $\frac{Q_1}{Q_2} = (\frac{a_1}{a_2})^2$، اما $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$، و چون شار متناسب با عکسِ زمان است، بنا بر این

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2. \tag{۵}$$

این رابطه با نتایجِ تجربی سازگار است. ما برایِ انجامِ آزمایش باید تخمینی از شعاعِ شن‌ها می‌داشتیم. به این منظور شعاعِ 300 شن را اندازه‌گیری کردیم و میانگینِ آن‌ها را به عنوان شعاعِ کره در نظر گرفتیم. برایِ ایجادِ حرکت پایا به بالایِ استوانه لوله‌ای افقی وصل کردیم و انتهایِ آن را درون ظرفی پر از آب و با سطحِ مقطعِ 50 برابر استوانه قرار دادیم. به این ترتیب آبِ درونِ استوانه و ظرف هم سطح شدند. تا جایی که آبِ خارج شده از استوانه نسبت به آب درون ظرف قابلِ اغماض باشد. سطحِ آبِ درون ظرفِ بزرگ تغییرِ محسوسی نمی‌کند و ارتفاعِ آبِ روی شن تقریباً ثابت می‌ماند.

قدردانی: لازم می‌دانیم از محمدِ خرمی برایِ پیش‌نهادهایِ مفیدی که در موردِ این مقاله داشتند تشکر کنیم.

۲ مراجع

[1] Hales T. C.; An overview of the Kepler conjecture, math.MG/9811071.

[2] Donev A., Stillinger F. H., Chaikin P. M., & Torquato S.; Superdense Crystal packing of ellipsoids, cond-mat/0403286.

۳ یادداشت‌ها

1) Hales, 2) Rogers, 3) hexagonal close packing, 4) cubic close packing, 5) pyramidal close packing