هندسه‌یِ سطوحِ هم‌پتانسیلِ بارهایِ نقطه‌ای

شبنم خلیقی منفرد، سپیده نسایی، امیر آقامحمدی

۳۱ اردیبهشت ۱۳۸۶

چکیده

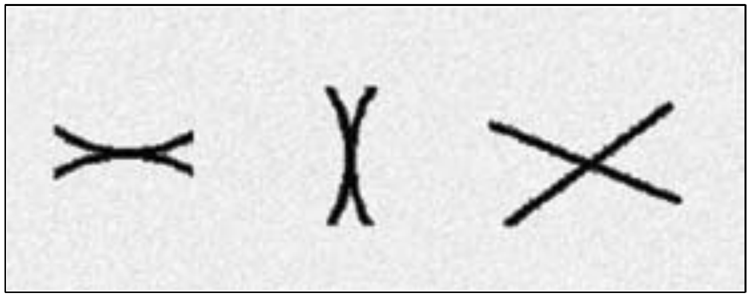
هندسه‌یِ سطوحِ هم‌پتانسیل برایِ توزیع‌هایِ مختلفی از بارهایِ نقطه‌ای بررسی می‌شود. برایِ اشکالِ منتظم علاوه بر مرکزِ جسم نقاطِ دیگری هم هستند که میدانِ الکتریکی در آن نقاط صفر است. با تغییرِ پیوسته‌یِ شکلِ توزیعِ بار و یا اندازه‌یِ بارها سطوحِ هم‌پتانسیل به طورِ پیوسته تغییر می‌کنند، تا جایی که ناگهان دو یا تعدادِ زوجی از نقاطِ تعادل هم‌زمان از مجموعه‌یِ نقاطِ تعادل حذف می‌شوند.

یکی از مباحثی که در دوره‌هایِ مقدماتیِ فیزیک تدریس می‌شود، فیزیکِ الکتریسیته است. از مهم‌ترین مفاهیمی که در این درس ارائه می‌شود، میدان و سطوحِ هم‌پتانسیل است. در تمامِ کتاب‌هایِ مقدماتیِ فیزیکِ الکتریسیته حتماً بخشی به معرفیِ خطوطِ میدان و سطوحِ هم‌پتانسیل اختصاص داده‌شده‌است. اما به نظر می‌رسد به جز موردِ بدیهیِ تک‌بارِ الکتریکی تصویری دقیق از سطوحِ هم‌پتانسیل به دانشجو منتقل نمی‌شود. مثلاً حتی در موردِ دو بارِ الکتریکی هم پیچیدگی‌هایی وجود دارد که به آن‌ها خواهیم پرداخت.

در حالتی که تنها یک بار الکتریکی q_1 را در نظر می‌گیریم، سطوحِ هم‌پتانسیل کره‌هایی به مرکز آن بار و خطوطِ میدان نیز شعاع‌هایِ آن کره‌ها هستند. حال اگر بارِ دیگری مثلِ q_2 را نیز در نزدیکیِ بارِ اول بگذاریم سطوح هم‌پتانسیل و خطوطِ میدان به چه شکل درمی‌آیند؟ معمولاً شکلِ زیر برایِ سطوحِ هم‌پتانسیل کشیده می‌شود.

چند سئوال می‌توان مطرح کرد:

۱) بنا به تعریف میدانِ الکتریکی در هر نقطه بر سطحِ هم‌پتانسیلی که از آن نقطه می‌گذرد، عمود است. بنابر این اگر دو سطحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را قطع کنند آن وقت



شکل ۱: قطع کردن و مماس شدنِ سطوحِ ...

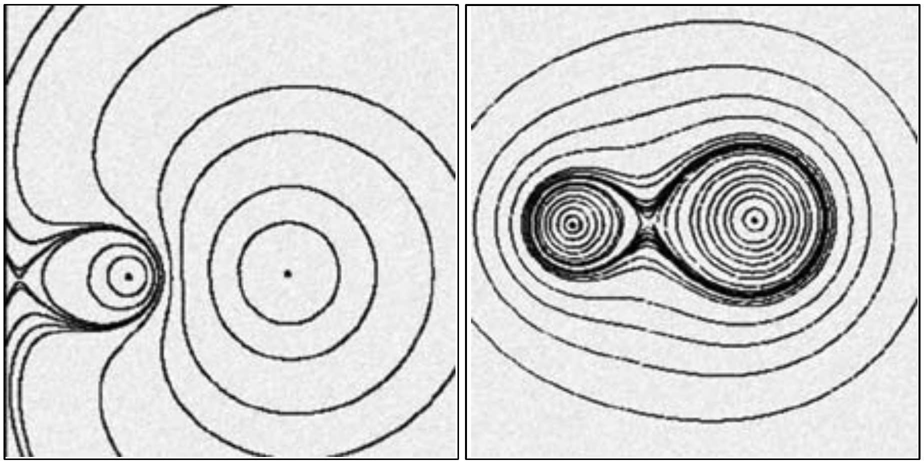
تکلیفِ جهتِ میدانِ الکتریکی در آن نقطه چه می‌شود؟ میدان بر کدام‌یک از سطوح عمود است؟

۲) در نزدیکیِ نقطه‌یِ A که این سطوح هم‌دیگر را قطع می‌کنند، هندسه‌یِ سطوحِ هم‌پتانسیل چه می‌شود؟ یک صفحه که از دو بار می‌گذرد، را در نظر بگیرید. سطحِ مقطعِ این صفحه و سطوحِ هم‌پتانسیل دو خم است. این دو خم با چه زاویه‌ای هم‌دیگر را قطع می‌کنند؟ این زاویه به چه چیزهایی بستگی دارد؟ با تغییرِ اندازه‌یِ بارها آیا نقطه‌یِ A جابه‌جا می‌شود؟ و یا اندازه‌یِ زاویه‌یِ بینِ دو خم تغییر می‌کند؟

در نزدیکیِ بارِ q_1 سطوحِ هم‌پتانسیل تقریباً کره‌هایی به مرکزِ بارِ q_1 هستند. در واقع درنزدیکیِ q_1 میدانِ الکتریکیِ ناشی از بارِ q_1 غالب است و میدانِ ناشی از q_2 اهمیتی ندارد. اما هر چه از بارِ q_1 دور می‌شویم، کره‌هایِ هم‌پتانسیل تغییرِ شکل داده و مثلِ آن است که به سمتِ بارِ q_2 کشیده می‌شوند. همین مطلب در موردِ سطوحِ هم‌پتانسیلِ ناشی از بارِ q_2 هم درست است. در واقع مثلِ آن است که سطوحِ هم‌پتانسیلِ ناشی از بارهایِ هم‌نام هم‌دیگر راجذب می‌کنند. این کشیده شدن تا جایی ادامه پیدا می‌کند که سطوحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را قطع کنند. مشکلِ جهتِ میدانِ الکتریکی در محلِ تقاطع به این شکل حل می‌شود که میدان در آن نقطه صفر است و بنا بر این جهتِ آن هیچ اهمیتی ندارد. در واقع سطوحِ هم‌پتانسیل تنها در نقاطی که میدان صفر است می‌توانند هم‌دیگر را قطع کنند. اما برایِ دو بارِ هم‌نام جایی که میدان صفر است به بارِ کوچک‌تر نزدیک‌تر است.

حالا می‌خواهیم به سئوالِ دوم به پردازیم. چنان که نشان خواهیم داد اگر چه محلِ میدانِ صفر به اندازه‌یِ بارها بستگی دارد، زاویه‌یِ بینِ دو سطح مستقل از اندازه و حتی فاصله و علامتِ بارها است. می دانیم که

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi. \qquad (۱)$$



شکل ۲: شکلِ سمتِ چپ سطوحِ پتانسیلِ دو بار ...

با انتخاب نقطه‌ي تقاطعِ A به عنوانِ مبدا مختصات داریم:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}|_A = \frac{\partial \Phi}{\partial y}|_A = \frac{\partial \Phi}{\partial z}|_A = 0. \quad (۲)$$

اما علاوه بر این Φ در معادله‌ي لاپلاس هم صدق می‌کند.

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (۳)$$

Φ را حولِ نقطه‌ي A بسط می‌دهیم.

$$\Phi(x,y,z) = \Phi_0 + ax + by + cz + dx^2 + ey^2 + fz^2 + gxy + hxz + kyz + \cdots \quad (۴)$$

در معادله‌ي فوق این شرط که همه‌ي مولفه‌هاي میدان در نقطه‌ي A صفر هستند، منجر به رابطه‌ي زیر می‌شود.

$$a = b = c = 0. \quad (۵)$$

اما تقارنِ مسئله نیز روي ضرایبِ معادله‌ي (4) قیدهاي دیگری هم می‌گذارد. مثلاً با استفاده از تقارنِ مسئله نسبت به $x \to -x$ داریم،

$$\Phi(x,y,z) = \Phi(-x,y,z) \implies d = e = 0. \quad (٦)$$

و از تقارنِ نسبت $y \to -y$، می‌توان نتیجه گرفت که $f = 0$. تقارنِ دیگری که باقی مانده است، دوران حولِ محورِ z است.

$$\Phi(u,0,z) = \Phi(0,u,z) \implies a = b. \quad (۷)$$

بنا بر این Φ در نزدیکیِ نقطه‌یِ A، عبارت است از

$$\Phi(x, y, z) \approx \Phi_0 + d(x^2 + y^2) + fz^2. \quad (۸)$$

اما Φ باید در معادله‌یِ لاپلاس صدق کند. با جای‌گذاریِ مقدارِ فوق برایِ Φ در معادله‌یِ لاپلاس $f = -2d$ می‌شود. پتانسیل در نقطه‌یِ A همان Φ_0 است. سطوحِ هم‌پتانسیلی که هم‌دیگر را در A قطع میکنند نیز پتانسیلِ‌شان Φ_0 است. بنا بر این برایِ چنین رویه‌ای $\Phi(x, y, z) = \Phi_0$ و معادله‌یِ رویه عبارت است از:

$$(x^2 + y^2) = 2z^2. \quad (۹)$$

این رویه معرفِ مخروطی با زاویه‌یِ نیم‌رأسِ θ

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (۱۰)$$

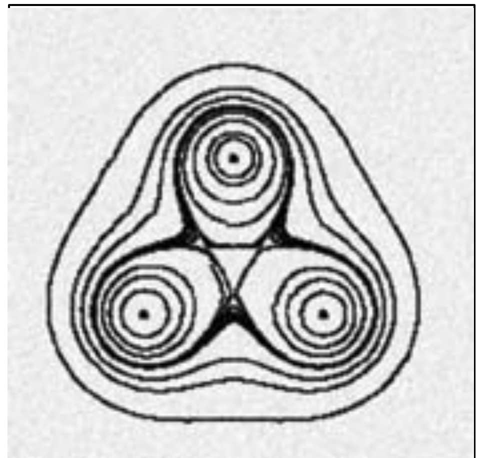
است.

در موردِ دو بارِ غیرِ هم‌نام، علیٰ‌رغمِ آن‌که بارها هم‌دیگر را جذب می‌کنند مثلِ آن است که سطوحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را دفع می‌کنند. در صورتی که اندازه‌یِ بارها مساوی نباشد در نقطه‌ای رویِ خطِ واصلِ دو بار و در خارجِ ناحیه‌یِ بینِ دو بار و در نزدیکیِ بارِ کوچک‌تر میدان صفر می‌شود. در این حالت سطوحِ هم‌پتانسیل به این شکل در می آیند:

در این حالت نیز کماکان سطوحِ هم‌پتانسیل هم‌دیکر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند. با استدلال‌هایی دقیقاً مشابهِ استدلال‌هایِ قبلی در نزدیکیِ این نقطه رویه مخروط و با همان زاویه‌یِ نیم‌رأس است.

حالا به جایِ دو بار، می‌خواهیم حالتِ سه بارِ الکتریکی را بررسی کنیم. ابتدا سه بار مشابه که روی رئوسِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع قرار گرفته‌اند را در نظر می‌گیریم. هم‌چنان در نزدیکیِ این سه بار سطوحِ هم‌پتانسیل تقریباً کروی هستند. از تقارنِ مسئله پیداست که در مرکزِ مثلث میدانِ الکتریکی صفر است. اما چنان‌که در شکل هم می‌بینیم سطوحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را در سه نقطه‌یِ دیگر هم قطع می‌کنند.

این مطلب را به سادگی با استفاده از تغییراتِ پتانسیل قابلِ درک است. رویِ هر یک از بارها پتانسیل بی‌نهایت است. اگر در امتدادِ میانه، که آن را محورِ y می‌گیریم، از یکی از بارها دور شویم اندازه‌یِ پتانسیل به مقدارِ صفر میل می‌کند. در محلِ تقاطعِ میانه‌ها $E_y = \partial\Phi/\partial y = 0$، و یا ϕ به عنوانِ تابعی از y کمینه است. بنا بر این برایِ آن که در فواصلِ دور مجدداً صفر شود باید رویِ محورِ y نقطه‌یِ دیگری هم باشد که ϕ در آن نقطه به عنوانِ تابعی از y کمینه شود. در این نقطه هم میدانِ الکتریکی صفر است. بنا به تقارن



شکل ۳: توضیح ...

دو نقطه‌ي دیگر رويِ دو میانه‌يِ دیگر هم هستند که در آن نقاط میدانِ الکتریکی صفر است.

در مرجعِ [2] نشان داده شده است که برايِ یک n−ضلعيِ منتظم، حداقل $n+1$ نقطه‌يِ با میدانِ صفر وجود دارد. برايِ حالتِ سه ضلعيِ منتظم کافی است نقاطِ رويِ میانه را بررسی کنیم. با استفاده از تقارنِ مسئله بدیهی است که مؤلفه‌ی x میدان صفر است. از صفر قرار دادنِ E_y می‌رسیم به

$$\frac{2y}{(a^2/4+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(h-y)^2} \qquad (۱۱)$$

که a طولِ ضلعِ مثلث و h طولِ میانه‌اش است. با حلِ عدديِ این معادله دو جواب رويِ میانه یه دست می‌آید که یکی از آن‌ها همان محلِ تقاطعِ میانه‌ها است.

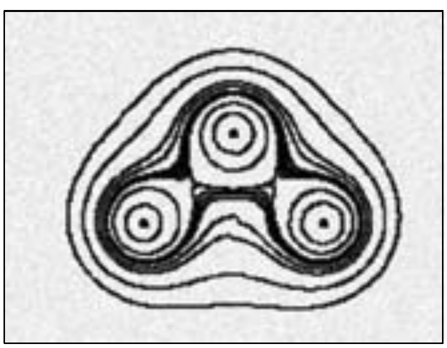
$$y_1 \approx 0.124a, \quad y_2 \approx 0.288a \qquad (۱۲)$$

با استفاده از تقارنِ مسئله واضح است که دو نقطه‌يِ دیگر با میدانِ صفر باید رويِ دو میانه‌يِ دیگر باشند.

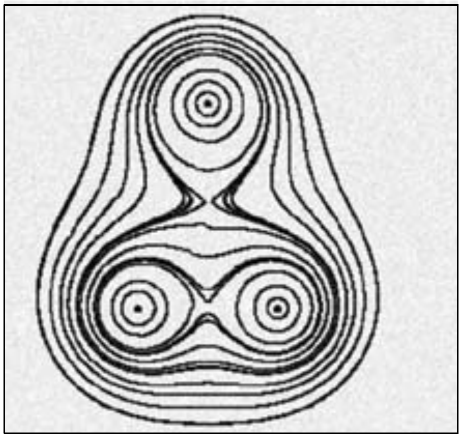
در این مرحله چندین سئوال می‌توان مطرح کرد. اگر مثلثِ متساوی‌الاضلاع را به طورِ پیوسته تغییرِ شکل بدهیم نقاطی که میدانِ الکتریکی در آن‌ها صفر است به چه صورت جابه‌جا می‌شوند؟ و یا این که اگر اندازه‌يِ بارهايِ رويِ رئوسِ مثلث را به طورِ پیوسته تغییر دهیم، نقاطِ با میدان صفر چه‌گونه جابه‌جا می‌شوند؟

فرض کنید در حالی که طولِ ساق‌هايِ مثلث ثابت‌اند، طولِ قاعده‌يِ آن را به تدریج زیاد کنیم. جواب‌هايِ معادله‌يِ $E_y = 0$ به هم نزدیک می‌شوند تا زمانی که این دو جواب

یکی شوند.در این حالت در سه نقطه میدانِ الکتریکی صفر است. در واقع در یکی از نقاط علاوه بر صفر بودنِ میدان، $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ هم صفر است. این مطلب را از منظرِ دیگری نیز می‌توان نگاه کرد. اگر تابعیتِ پتانسیلِ Φ را رویِ محورِ عمودیِ برحسبِ y بررسی کنیم می‌بینیم که میدان در دو نقطه صفر و رویِ بار بی‌نهایت است. در فواصلِ دورِ از بار پتانسیل به مقدارِ صفر میل می‌کند. در واقع در یکی پتانسیل بیشینه و در دیگری کمینه است. با تغییرِ پیوسته‌یِ طولِ قاعده این دو نقطه به هم نزدیک شده و و در حالتِ خاصی روی هم افتاده و از آن پس دیگر رویِ محورِ y میدان صفر نیست. با محاسبه‌ای عددی می‌توان نشان داد که تا وقتی قاعده حدودِ 3.5 درصد بزرگ‌تر از مقدارِ اولیه‌اش نشده‌است دو جواب رویِ میانه وجود دارد. از آن پس با زیاد کردنِ طولِ قاعده هر دو جواب از بین می‌روند. برایِ بررسیِ این مطلب می‌توان از روش‌هایِ توابعِ مختلط نیز کمک گرفت. در ابتدا دیدیم که معادله‌یِ $E_y = 0$ دو جوابِ حقیقی داشت. با ازدیادِ طولِ قاعده این دو جوابِ حقیقی به هم میرسند و پس از آن دیگر معادله جوابی حقیقی ندارد. می‌دانیم که جوابهایِ یک معادله‌یِ حقیقی حتماً مزدوجِ مختلطِ هم هستند. اگر معادله تعدادی جوابِ حقیقی داشت، با تغییرِ پیوسته‌یِ پارامترهایِ معادله، ممکن است این جواب‌هایِ حقیقی به هم نزدیک شوند و پس از تبه‌گن شدن به صورتِ زوج جواب از بین روند. در واقع این جواب‌ها از محورِ حقیقی خارج شده و به صورتِ دوجوابِ مزدوجِ مختلط درمی‌آیند. البته بر عکسِ این اتفاق نیز ممکن است رخ دهد. ممکن است دو جوابِ مزدوجِ مختلط به هم نزدیک شوند تا جایی‌که رویِ محورِ حقیقی به هم برسند و از آن پس با تغییرِ پیوسته‌یِ پارامترها به دو جوابِ متمایزِ حقیقی تبدیل شوند.



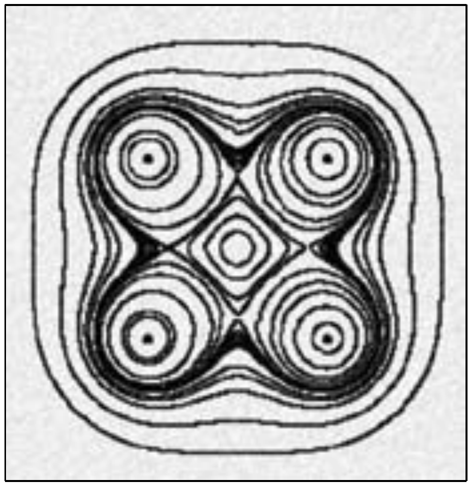
اگر به جایِ بزرگ کردنِ طولِ قاعده آن را کوچک کنیم، باز هم تا مدتی ۴ جواب داریم تا آن که دو جواب تبه‌گن شده و ۳ جواب خواهیم داشت. اگر طولِ قاعده را باز هم کوچک‌تر کنیم به ۲ جواب می‌رسیم.



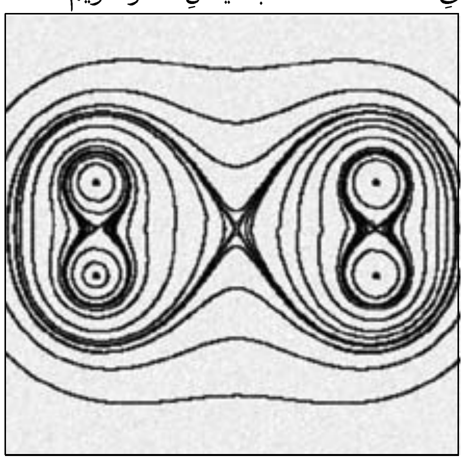
دو حالتِ حدی نیز وجود دارد. اگر طولِ قاعده را به‌قدری بزرگ کنیم که نسبت ارتفاع مثلث به آن خیلی کوچک شود، بارِ سوم درست تقریباً وسط دو بارِ دیگر خواهد بود و بدیهی است که دو نقطه‌ي با میدانِ صفر داریم. در حدی که دو بارِ رويِ قاعده بر هم منطبق شوند مسئله مشابهِ حالتی می‌شود که دو بارِ الکتریکی با بارهايِ q و $2q$ داشته باشیم. در این حالت فقط یک نقطه با میدانِ صفر وجود دارد.

اگر به جايِ طولِ اضلاعِ مثلث بارِ روی رئوسِ آن را به طورِ پیوسته تغییر دهیم نیز مشابه همین حالات رخ می‌دهد. مثلاً اگر در مثلثِ متساوی‌الساقینی که تنها دونقطه‌ي با میدانِ صفر دارد، بار رأس آن را به طورِ پیوسته تغییر دهیم، می‌توان به حالتی رسید که مجدداً ۴ نقطه با میدانِ صفر داشته باشیم. در این حالت شکلِ سطوحِ هم‌پتانسیل به طورِ کیفی شبیهِ اولین حالت می‌شود. برايِ مثلثی به طولِ قاعده‌ي 2 واحد و ارتفاعِ نظیرِ 3.5 واحد چنان‌چه بار رأس را 5.5 برابر بارِ بارهايِ قاعده بگیریم، میدانِ الکتریکی در 4 نقطه صفر می‌شود. برايِ یک مثلثِ دلخواه نیز علی‌الاصول 2 نقطه با میدانِ صفر وجود دارد که با تغییرِ طولِ اضلاع و یا اندازه‌ي بارها میتوان 3 و یا 4 نقطه‌ي با میدانِ صفر داشت.

ساده‌ترین چهارضلعیِ منتظم مربع است. اگر بارِ رويِ رئوسِ آن یکی باشد، 5 نقطه‌ي با میدانِ صفر داریم که 4 نقطه‌ي آن رويِ رئوسِ مربعی که اضلاعش کوچک‌تراز مربعِ اصلی و به اندازه‌ي زاویه‌ي $\pi/4$ نسبت به آن چرخیده، قرار دارند. نقطه‌ي پنجم نیز در مرکزِ مربع قرار دارد.



اگر این مربع را به طورِ پیوسته به یک مستطیل تبدیل کنیم، ابتدا سطوحِ هم‌پتانسیلِ دمبلی‌شکل برایِ بارهایِ نزدیک ایجاد می‌شود. مشابهِ حالت قبل جواب‌ها به صورتِ زوجِ جواب از بین می‌روند. پس از یکی شدنِ هر دو جوابی، آن دو جواب همراهِ هم از بین می‌روند. برایِ یک مستطیلِ کشیده به جایِ 5 نقطه، 3 نقطه با میدانِ صفر داریم.



برایِ هر N−ضلعیِ منتظم، $N+1$ نقطه با میدانِ صفر وجود دارد که با تغییرِ پیوسته‌یِ شکل بعضی از جواب‌ها ممکن است از بین روند. البته جواب‌ها نیز هم‌واره به صورتِ زوج از بین می‌روند.

قدردانی: از محمدِ خرمی، به خاطرِ بحث‌هایِ مفیدی که داشته تشکر می‌کنیم.

مرجع‌ها:

[1] S.D. Baker: On the field of equal charges at the corners of a reular polygon;

American Journal of Physics, vol. 52, p. 256 (March 1984). University Press, 1996) 571–578

ترجمه‌ی این مقاله در مجله‌ی فیزیک، سالِ ۷، شماره‌ی ۴، زمستانِ ۱۳۶۸، صص ۱۴۹ تا ۱۵۰ چاپ شده است.