بسمه تعالی

تابعِ گرین برایِ معادله‌یِ نیوتن

دانشگاهِ الزهرا— ۱۳۸۲
امیرِ آقامحمدی

ذره‌ای در نظر بگیرید که تحتِ نیرویِ $F(t)$ قرار دارد. برایِ به دست آوردنِ مکانِ ذره، $x(t)$، باید معادله‌یِ

$$m\ddot{x} = F(t), \tag{۱}$$

را هم‌راه با شرایطِ اولیه‌یِ $x(0) = x_0$ و $\dot{x}(0) = v_0$ حل کنیم. در این مرحله t را مثبت می‌گیریم. یک راهِ استاندارد برایِ حلِ چنین معادله‌ای جای‌گذاریِ $v = \dot{x}$ در معادله‌یِ (۱)

$$m\dot{v} = F(t), \tag{۲}$$

و دو بار انتگرال‌گیری از آن است. اگر چه این روش در این مورد کار می‌کند، در حالتی که علاوه بر نیرویِ $F(t)$ نیرویِ دیگری به ذره وارد می‌شود، دیگر نمی‌توان از معادله انتگرال گرفت و باید به دنبالِ روش‌هایِ دیگری باشیم. یکی دیگر از روش‌هایِ حلِ این معادله استفاده از روشِ تابعِ گرین است. اساسِ این روش بر این مبنا است که به جایِ حلِ معادله‌یِ (۱) که یک معادله‌یِ دیفرانسیل است، مسئله را تبدیل به محاسبه‌یِ یک انتگرال کنیم. اما لازم است که قبلاً یک بار معادله‌یِ (۱) را به ازایِ یک نیرویِ ضربه حل کرده باشیم. البته این روش تنها برایِ معادله‌هایِ خطی کاربرد دارد. بدیهی است اگر معادله‌ای غیرخطی را بتوان خطی کرد، روشِ گرین می‌توان را برایِ معادله‌یِ خطی شده به کار برد.

تابعی مثلِ $G(t, t')$ که در معادله‌یِ زیر با شرایطِ اولیه‌یِ هم‌گن صدق می‌کند، را در نظر بگیرید.

$$m\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = \delta(t-t'), \qquad G(0,t') = 0, \quad \frac{d}{dt}G(0,t') = 0 \tag{۳}$$

$\delta(t-t')$ تابعِ دلتایِ دیراک است. در ابتدا برایِ سادگی جواب را محدود به $t' > 0$ می‌کنیم. حالتِ کلی‌تر بعداً بررسی می‌شود.در این‌جا $G(t,t')$ مکان ذره‌ای در زمانِ t است که در زمان‌هایِ $t \neq t'$ آزاد است و در زمانِ $t = t'$ ضربه‌ای به آن وارد شده است. تغییرِ اندازه‌حرکتی که این ضربه ایجاد می‌کند ، و یا همان اندازه‌یِ این ضربه برابر است با

$$\Delta P = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt' \delta(t-t') = 1. \tag{۴}$$

در واقعِ ایده‌یِ روشِ گرین آن است که ما نیرویِ $F(t)$ را به صورتِ بی‌نهایت ضربه‌یِ پشتِ سرِهم ببینیم. پاسخِ معادله به نیرویِ $F(t)$ جمعِ پاسخ‌ها به بی‌نهایت ضربه‌یِ پشتِ سرِهم است. بنا بر این لازم است معادله‌یِ دیفرانسیل خطی باشد. با استفاده از خطی بودنِ معادله‌یِ (۱)، هر گاه جوابِ هر ضربه را داشته باشیم جوابِ کلی جمعِ این جواب‌ها است. به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که

$$x(t) = \int_0^\infty dt' F(t') G(t,t'), \tag{۵}$$

در معادله‌یِ (۱) صدق می‌کند.

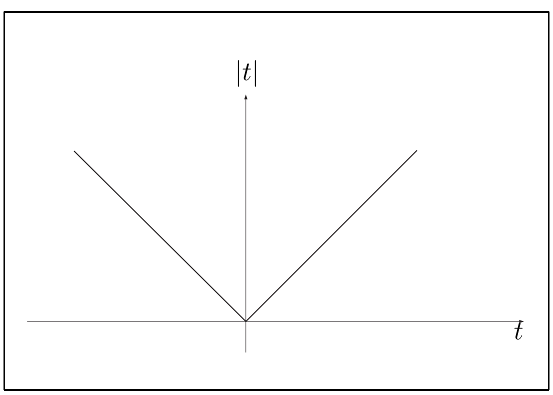
$$m\ddot{x} = m\int_0^\infty dt' F(t')\ddot{G}(t,t') = \int_0^\infty dt' F(t')\delta(t-t') = F(t). \tag{۶}$$

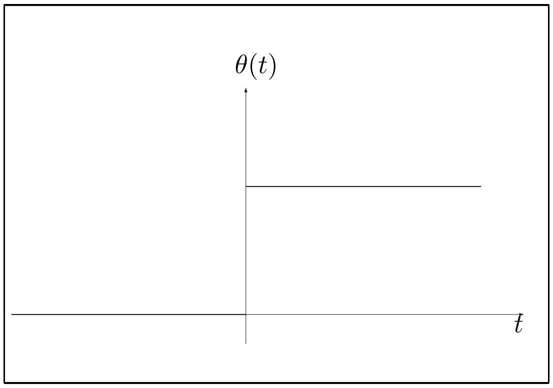
البته این جوابِ $x(t)$، جوابِ خاصِ معادله‌یِ (۱) با شرطِ اولیه‌یِ هم‌گن است. برایِ داشتن جوابی با شرایطِ دل‌خواهِ x_0 و v_0 باید جوابِ عمومی معادله‌یِ (۱) را با جوابِ خاصِ آن جمع کنیم و سپس شرایطِ اولیه را اعمال کنیم. در این صورت جوابِ معادله‌یِ (۱) عبارت است از

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^\infty dt' F(t') G(t,t'). \tag{۷}$$

خوب است که یادآوری شود

$$\delta(t-t') = \frac{d}{dt}\theta(t-t') = \frac{d^2}{dt^2}(\frac{|t-t'|}{2}). \tag{۸}$$





که $\theta(t-t')$ تابعِ پله‌ای است و به صورتِ زیر تعریف می‌شود.

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 0 & t-t'<0 \\ 1 & t-t'>0 \end{cases} \qquad (۹)$$

بنا بر این اگر تابعی در نقطه‌ای پیوسته ولی مشتقش به اندازه‌یِ محدودی ناپیوسته باشد، در مشتقِ دومش در آن نقطه، تابعِ دلتایِ دیراک ظاهر می‌شود. $G(t,t')$ تابعی است که مشتقِ دومِ آن نسبت به t، تابعِ دلتا است، پس باید تابعی پیوسته از t باشد، زیرا در غیر این صورت در مشتق‌گیری از آن نسبت به t، تابعِ دلتا و در مشتقِ دوم نسبت به t مشتقِ تابعِ دلتا ظاهر می‌شد. اما از معادله‌یِ (۳) پیداست که در مشتقِ دومِ آن، تنها تابعِ دلتا ظاهر شده است. بنا بر این تابعِ $G(t,t')$ در $t=t'$ پیوسته و مشتقِ آن ناپیوسته است. برایِ آن که مقدارِ ناپیوستگی را در $t=t'$ به دست آوریم، کافی است که از معادله‌یِ (۳) در ناحیه‌یِ کوچکی در نزدیکیِ t' از t انتگرال بگیریم.

$$\int_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} dt\ m\frac{d^2}{dt^2}G = \int_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} dt\ \delta(t-t'), \qquad (۱۰)$$

که ار آن نتیجه می‌شود،

$$m[\frac{d}{dt}G(t,t')|_+ - \frac{d}{dt}G(t,t')|_-] = 1. \qquad (۱۱)$$

اما سمتِ راستِ معادله‌یِ دیفرانسیلِ G در (۳) برایِ $t \neq t'$ صفر است و $G(t,t')$ را در دو ناحیه‌یِ $t' < t$ و $t' > t$ به راحتی می‌توان به دست آورد.

$$G(t,t') = \begin{cases} a+bt & t'>t \\ c+dt & t'<t \end{cases} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از شرایطِ مرزیِ $G(0,t')=0, \quad \dot{G}(0,t')=0$ ثابت‌هایِ a و b صفر می‌شوند. لازم به یادآوری است که $t>0$ گرفتیم. شرطِ پیوستگیِ $G(t,t')$ و ناپیوستگیِ آن در $t=t'$ منجر به روابطِ زیر می‌شوند، که از آن‌ها می‌توان c و d را به دست آورد.

$$c + d\ t' = 0, \qquad d = \frac{1}{m} \qquad (۱۳)$$

بنا بر این تابعِ گرینِ معادله‌ي (۱) عبارت است از

$$G(t,t') = \frac{t-t'}{m}\theta(t-t') = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t' > t \\ (t-t')/m & t' < t \end{array} \right. \quad (۱۴)$$

این جواب براي تابعِ گرین، همان‌طور که از ابتدا هم گفته شد برای $t, t' > 0$ است. جوابِ معادله‌ي (۱) نیز عبارت است از

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^\infty dt' F(t') \frac{t-t'}{m}\theta(t-t') = x_0 + v_0 t + \int_0^t dt' F(t') \frac{t-t'}{m} \quad (۱۵)$$

فرض کنید نیروي $F(t)$ به صورتِ زیر باشد.

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ F_0 e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (۱۶)$$

در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \int_0^t dt' F_0 e^{-\alpha t'} \frac{t-t'}{m} \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{m\alpha^2}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

در $\alpha = 0$ نیرو به نیروي ثابت تبدیل می‌شود، در این حالت

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \lim_{\alpha\to 0} \frac{F_0}{m\alpha^2}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}) \\ &= x_0 + v_0 t + \lim_{\alpha\to 0} \frac{F_0}{m\alpha^2}(\alpha t - 1 + 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \cdots) \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{F_0 t^2}{2m} \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که البته این جواب همان است که انتظارش را داشتیم.

فرض کنید معادله‌ي نیوتن به شکلِ معادله‌ي (۱) نباشد، مثلاً براي نوسانگرِ هماهنگِ واداشته داریم،

$$m\frac{d^2}{dt^2}x + kx = F(t) \quad (۱۹)$$

باید تابعِ گرین در معادله‌ي زیر با شرطِ اولیه‌ي هم‌گن صدق کند.

$$m\frac{d^2}{dt^2}G + kG = \delta(t-t'), \qquad G(0,t') = 0, \quad \dot{G}(0,t') = 0 \quad (۲۰)$$

تابعِ گرین در $t = t'$ پیوسته و مشتقِ آن ناپیوسته است. مقدارِ ناپیوستگیِ مشتقِ G را در $t = t'$ را مثلِ حالتِ قبل می‌توان به دست آورد.

$$\int_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} dt\ m\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') + \int_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} dt\ G(t,t') = \int_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon} dt\ \delta(t-t'), \qquad (۲۱)$$

چون G مقدارش محدود است، انتگرالِ آن در حدِ $\epsilon \to 0$ صفر است. بنا بر این ناپیوستگیِ مشتقِ G درست شبیهِ معادله‌ي (۱۱) خواهد شد. در $t \neq 0$، G در معادله‌ي نوسان‌گر بدونِ نیروي خارجی صدق می‌کند. پس

$$G(t,t') = \begin{cases} a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t & t' > t \\ c\sin\omega_0 t + d\cos\omega_0 t & t' < t \end{cases} \qquad (۲۲)$$

شرایطِ اولیه منجر به $a = 0$ و $b = 0$ می‌شوند. $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ است. با استفاده از شرطِ پیوستگيِ $G(t,t')$ و با داشتنِ مقدارِ ناپیوستگيِ آن در $t = t'$، می‌توان c و d را به دست آورد. در این صورت تابعِ گرین به صورتِ زیر در می آید.

$$G(t,t') = \frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{m\omega_0}\theta(t-t') \qquad (۲۳)$$

$x(t)$ نیز رابطه‌يِ زیر به دست می آید. لازم به ذکر است جمله‌يِ آخر جوابِ خاصِ معادله با شرایطِ اولیه‌يِ هم‌گن است. دو جمله‌يِ اول نیز جوابِ عمومی قسمتِ هم‌گنِ معادله است و اضافه شده‌اند تا شراطِ اولیه مربوط به x_0 و v_0 را برآورده کنند.

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \int_0^t dt' F(t')\frac{\sin\omega_0(t-t')}{m\omega_0}. \qquad (۲۴)$$

براي حالتِ نوسان‌گرِ هماهنگِ میرايِ واداشته معادله‌يِ حرکت عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \qquad (۲۵)$$

مشابهِ همان محاسباتِ قبل را باید انجام دهیم. در این صورت

$$G(t,t') = e^{-\gamma(t-t')}\frac{\sin[\omega_1(t-t')]}{m\omega_1}\theta(t-t') \qquad (۲۶)$$

که $\gamma = b/(2m)$ و $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ است. $x(t)$ نیز از انتگرالِ زیر به دست می آید.

$$x(t) = e^{-\gamma t'}(x_0\cos\omega_1 t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t) + \int_0^t dt' F(t')\frac{e^{-\gamma t'}\sin\omega_0(t-t')}{m\omega_0}. \qquad (۲۷)$$

در مواردی که تا کنون بحث شد، در محاسبه‌يِ تابعِ گرین $t, t' > 0$ گرفتیم. در این‌جا می‌خواهیم تابعِ گرین را براي t' و t' دل‌خواه به دست آوریم. در ابتدا همان حالت اول را

در نظر بگیرید. جوابِ کليِ معادله‌يِ (۳) دو بخشِ عمومی و خصوصی دارد و عبارت است از

$$G(t,t') = \alpha + \beta t + \frac{t-t'}{m}\theta(t-t') \tag{۲۸}$$

حال شرایطِ اولیه‌یِ هم‌گن را به این معادله اعمال می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \frac{t'}{m}\theta(-t') \\ 0 &= \beta - \frac{t'}{m}\delta(-t') + \frac{1}{m}\theta(-t') \Rightarrow \beta = -\frac{1}{m}\theta(-t') \end{aligned} \tag{۲۹}$$

در این صورت تابعِ گرینِ معادله‌ی (۱) عبارت است از

$$G(t,t') = \frac{t-t'}{m}[\theta(t-t') - \theta(-t')] \tag{۳۰}$$

این تابع تنها برایِ $t < t' < 0$ و $t > t' > 0$ مخالفِ صفر است. در این صورت جوابِ کليِ معادله‌ی (۱) عبارت است از

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t') \frac{t-t'}{m}[\theta(t-t') - \theta(-t')] \\ &= x_0 + v_0 t + \int_{-\infty}^{t} dt' F(t') \frac{t-t'}{m} - \int_{-\infty}^{0} dt' F(t') \frac{t-t'}{m} \\ &= x_0 + v_0 t + \int_{0}^{t} dt' F(t') \frac{t-t'}{m} \end{aligned} \tag{۳۱}$$

اما این جواب همانی است که قبلاً به دست آورده بودیم. تنها تفاوت در این است که t لزومی ندارد که مثبت باشد. بنا بر این شرطِ $t > 0$ را می‌توانیم کنار بگذاریم. مشابهِ همین محاسبه را برای نوسان‌گرِ نامیرا می‌توان انجام داد. در این صورت تابعِ گرین عبارت است از

$$G(t,t') = \frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{m\omega_0}[\theta(t-t') - \theta(-t')] \tag{۳۲}$$

تابعِ گرینِ نوسانگرِ نامیرا را به عنوانِ تمرین به دست آورید.

اگر ما تنها به جواب‌هایِ $x(t)$ برایِ $t > 0$ علاقه‌مند باشیم، نیازی نیست که از شکلِ اخیرِ معادله‌یِ گرین که بحث شد استفاده کنیم. در واقع در حالتِ اخیر که تابعِ گرین برایِ همه‌یِ t و t' ها تعریف شده است این امکان را می‌یابیم که برایِ معادله‌هایِ پیچیده‌تر که به راحتی نمی‌توان جواب را حدس زد، از روش‌هایی مثلِ انتگرال فوریه استفاده کنیم.