حرکت ذره‌ای روی یک سطحِ شیب‌دار

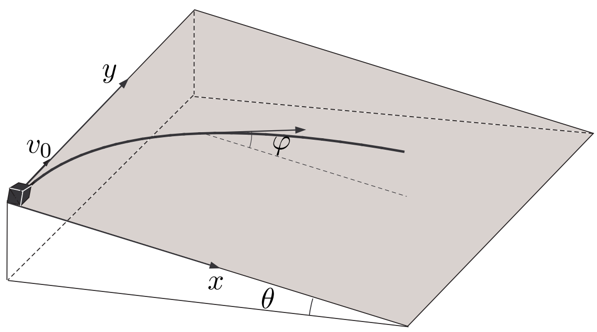
امیر آقامحمدی

چکیده— حرکت ذره‌ای روی یک سطحِ شیب‌دار با اصطکاک بررسی می‌شود. به ازایِ مقادیرِ مختلفِ ضریبِ اصطکاک بحث می‌شود.

یکی از مسائلِ استانداردِ کتاب‌هایِ مکانیکِ مقدماتی بررسیِ حرکتِ ذره رویِ سطحِ شیب‌دار است. در این‌گونه مسائل معمولاً حرکت در یک بُعد و در راستایِ سطحِ شیب‌دار است. ما در این‌جا می‌خواهیم این مسئله را در حالتِ کلی بررسی کنیم.

۱ بررسیِ حرکتِ ذره‌ای که در عرضِ سطحِ شیب‌دار پرتاب شده

ذره‌ای را در زمانِ $t = 0$ رویِ سطحِ شیب‌داری با شیبِ θ با سرعتِ اولیه‌یِ $v_0\mathbf{j}$ پرتاب می‌کنیم. محورِ x در راستایِ بیش‌ترین شیب و ضریبِ اصطکاکِ ذره با سطح μ است. پارامترِ α را با رابطه‌یِ $\alpha := \mu \cot\theta$ تعریف می کنیم. می‌خواهیم حرکتِ ذره رویِ سطحِ شیب‌دار را به ازایِ α هایِ مختلف بررسی کنیم.



مختصه‌یِ طولِ مسیر را s می‌گیریم. قانونِ نیوتن را برایِ راستایِ محورِ x، y و راستایِ مماس بر مسیر عبارت‌اند از

$$
\begin{aligned}
& mg\sin\theta(1-\alpha\cos\varphi) = m\ddot{x},\\
& -\alpha mg\sin\theta\sin\varphi = m\ddot{y},\\
& mg\sin\theta(\cos\varphi-\alpha) = m\ddot{s}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

۱.۱ $\alpha = 0$

در این حالت سطحِ شیب‌دار بدونِ اصطکاک است. مؤلفه‌یِ yِ سرعت ثابت می‌ماند و حرکتِ ذره یک حرکتِ پرتابی با شتابِ $g\sin\theta$ است.

۲.۱ $\alpha = 1$

این حالت در [1] هم بررسی شده است. به ازایِ $\alpha = 1$ معادله‌هایِ (1) ساده می‌شود. از اولین و آخرین معادله‌یِ (1) نتیجه می‌شود

$$\ddot{s}+\ddot{x}=0, \quad \Rightarrow \quad \dot{s}+\dot{x}=C, \tag{2}$$

که C ثابتی است که از شرایطِ اولیه مقدارش به دست می‌آید. پس

$$\dot{s}+\dot{x}=v_0, \tag{3}$$

اما با توجه به این که

$$\dot{x} = \dot{s}\cos\varphi,$$
$$\dot{y} = \dot{s}\cos\varphi, \tag{4}$$

نتیجه می‌شود

$$\dot{s} = \frac{v_0}{1+\cos\varphi},$$
$$\dot{x} = \frac{v_0\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$
$$\dot{y} = \frac{v_0\sin\varphi}{1+\cos\varphi}, \tag{5}$$

با توجه به این‌که شیبِ مسیر $\tan\varphi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ است، با مشتق‌گیری از آن می‌توانیم $\dot{\varphi}$ را به دست آوریم

$$\dot{\varphi}(1+\tan^2\varphi) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \tag{6}$$

حالا با استفاده از قوانینِ نیوتن (1) و جاگذاریِ $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ می‌رسیم به

$$\dot{\varphi} = -\frac{g}{v_0}\sin\theta\ \ \sin\varphi(1+\cos\varphi). \tag{7}$$

از این رابطه پیداست که به ازایِ هر φِ حادّه $\dot{\varphi} < 0$ و بنابراین φ تابعی نزولی از زمان است. φ از مقدارِ اولیه‌اش $\pi/2$ کم می‌شود تا جایی‌که صفر شود، در حقیقت

$$\lim_{\varphi\to 0}\dot{\varphi} = 0. \tag{8}$$

در زمان‌هایِ بزرگ $\phi \approx 0$ است و معادله‌یِ (7) به صورتِ زیر در می آید

$$\dot\varphi \approx -\frac{2g\sin\theta}{v_0}\,\varphi, \quad \Rightarrow \quad \varphi \propto \mathrm{e}^{-\dfrac{2gt\sin\theta}{v_0}}. \tag{9}$$

بنا بر این در زمان‌هایِ بزرگ از مرتبه‌یِ $\frac{v_0}{2g\sin\theta}$، φ به صورتِ نمایی به سمتِ صفر می‌رود. در زمان‌هایِ بزرگ روابطِ (5) به صورتِ زیر در می آیند

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty}\dot s = \lim_{t\to\infty}\dot x = \frac{v_0}{2},\\ &\lim_{t\to\infty}\dot y = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

بنا بر این اگر $\mu = \tan\theta$ باشد، در زمان‌هایِ بزرگ ذره رویِ خطی راست با سرعتِ ثابتِ $\frac{v_0}{2}$ در راستایِ بیش‌ترین شیبِ سطحِ شیب‌دار پایین می آید.

۳.۱ $\alpha < 1$

با حذفِ $\cos\varphi$ از اولین و آخرین معادله‌یِ (1) می‌رسیم به

$$\ddot x + \alpha\ddot s = g\sin\theta(1-\alpha^2), \tag{11}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه و استفاده از شرایطِ اولیه می‌رسیم به

$$\dot x + \alpha\dot s = g\sin\theta(1-\alpha^2)t + \alpha v_0, \tag{12}$$

که با استفاده از (4) می‌رسیم به

$$\dot s = \frac{g\sin\theta(1-\alpha^2)t + \alpha v_0}{\alpha + \cos\varphi},$$

$$\dot{x} = \frac{(g\sin\theta(1-\alpha^2)t + \alpha v_0)\cos\varphi}{\alpha + \cos\varphi},$$

$$\dot{y} = \frac{(g\sin\theta(1-\alpha^2)t + \alpha v_0)\sin\varphi}{\alpha + \cos\varphi}, \tag{13}$$

با محاسبه‌ای شبیهِ آن‌چه منجر به (7) شد می‌رسیم به

$$\dot{\varphi} = -\frac{g\sin\theta(\alpha + \cos\varphi)\sin\varphi}{g\sin\theta(1-\alpha^2)t + \alpha v_0}. \tag{14}$$

به ازایِ $\alpha < 1$ و برایِ φ یِ حادّه $\dot{\varphi} < 0$ و φ نزولی است. بنابراین φ کوچک می‌شود تا آن‌که به ازایِ $\varphi \to 0$، $\dot{\varphi} \to 0$ می‌شود. برایِ آن‌که تابعیتِ φ بر حسبِ زمان در زمان‌هایِ بزرگ را به دست آوریم لازم است معادله‌یِ (14) را برایِ φ هایِ کوچک حساب کنیم

$$\dot{\varphi} \approx -\frac{\varphi}{(1-\alpha)t}, \quad \Rightarrow \quad \varphi \propto t^{-\dfrac{1}{1-\alpha}}. \tag{15}$$

بنابراین در زمان‌هایِ بزرگ φ به صورتِ توانی به سمتِ صفر می‌رود. با استفاده از (13) و (15) و تقسیمِ $\dot{y}$ بر $\dot{\varphi}$ می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
\int_0^L \mathrm{d}y &= \frac{v_0^2}{g\sin\theta}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} \\
&= \frac{v_0^2}{g\sin\theta}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\left((1+\tan^2\frac{\varphi}{2}) + \tan^2\frac{\varphi}{2}(1+\tan^2\frac{\varphi}{2})\right) \\
L &= \frac{v_0^2}{6g\sin\theta},
\end{aligned} \tag{16}$$

که L بیش‌ترین پیش‌رفتگی‌یِ ذره در راستایِ y است.

در زمان‌هایِ بزرگ با استفاده از روابطِ (13) جمله‌یِ غالبِ $\dot{x}$ و $\dot{s}$ به صورتِ زیر در می آیند

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \dot{s} \sim g\sin\theta(1-\alpha)t,\\
&\lim_{t\to\infty} \dot{x} \sim g\sin\theta(1-\alpha)t,\\
&\lim_{t\to\infty} \dot{y} = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

بنا بر این اگر $\mu < \tan\theta$ باشد، در زمان‌هایِ بزرگ ذره رویِ خطی راست با شتابِ ثابتِ $g\sin\theta(1-\alpha)$ در راستایِ بیش‌ترین شیبِ سطحِ شیب‌دار پایین می آید.

۴.۱ $\alpha > 1$

معادله‌هایِ (13) و (14) برایِ $\alpha > 1$ نیز برقرارند. در این حالت اصطکاک بزرگ است و سرعتِ ذره در زمانِ

$$T = \frac{\alpha v_0}{g\sin\theta(\alpha^2-1)} \tag{18}$$

صفر می‌شود. پس از این‌که ذره ساکن شد چون اصطکاک بزرگ است ذره ساکن می‌ماند.

۵.۱ حلِ دقیق

ما در بخش‌هایِ قبلی بیش‌تر بر بررسی‌یِ رفتار حدّی‌یِ سیستم تأکید داشتیم ولی این مسئله را می‌توان به شکلِ دقیق هم حل کرد. به عنوانِ مثال بیاید رابطه‌یِ φ بر حسبِ زمان را به طور دقیق به دست آوریم. از معادله‌یِ (14) می‌رسیم به

$$\frac{-(1-\alpha^2)\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)(1-\cos^2\varphi)} = \frac{g\sin\theta(1-\alpha^2)\mathrm{d}t}{g\sin\theta(1-\alpha^2)t+\alpha v_0} \tag{19}$$

اما این معادله جداشدنی است

$$\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\alpha+\cos\varphi} + \frac{(1-\alpha)\mathrm{d}\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)} - \frac{(1+\alpha)\mathrm{d}\cos\varphi}{2(1+\cos\varphi)} = \frac{g\sin\theta(1-\alpha^2)\mathrm{d}t}{g\sin\theta(1-\alpha^2)t+\alpha v_0} \tag{20}$$

با انتگرال‌گیری از این معادله از ابتدا یعنی وقتی‌که $\varphi = \frac{\pi}{2}$ تا زمانِ t نتیجه می‌شود

$$t = \frac{\alpha v_0}{g\sin\theta(1-\alpha^2)}\left\{\left(\frac{\alpha+\cos\varphi}{\alpha\sin\varphi}\right)\tan^\alpha\frac{\varphi}{2} - 1\right\} \tag{21}$$

برایِ حالتِ $\alpha \leq 1$، زمانِ رسیدن به حالتِ نهایی بی‌نهایت و حالتِ نهایی $\varphi = 0$ است. اما در حالتِ $\alpha > 1$، زمانِ رسیدن به حالتِ نهایی محدود و مقدارِ نهاییِ φ از معادله‌یِ زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{\alpha+\cos\varphi_f}{\alpha\sin\varphi_f}\right)\tan^\alpha\frac{\varphi_f}{2} = 1. \tag{22}$$

۲ مراجع

[1] Irodov I. E.; Fundamental laws of mechanics, Mir Publishers Moscow 2002, page 64.