اختلال

امیر آقامحمدی

تعدادِ مسائلی که می‌توان دقیق حل کرد نسبت به تعدادِ مسائلی که حلِ دقیق ندارند، یا به سادگی قابلِ حل نیستند، خیلی کم است. اختلال تکنیکی است که گاهی با استفاده از آن می‌توانیم اطلاعاتی، هر چند تقریبی، در موردِ سیستمِ موردِ نظرمان به دست آوریم. البته این تکنیک زمانی به درد می‌خورد که سیستمِ موردِ نظرِ ما در نزدیکیِ سیستمی باشد که حلِ دقیقِ آن را بلدیم. منظور از نزدیکی هم آن است که معادله‌ایِ که می‌خواهیم حل کنیم تنها در یک جمله‌یِ کوچک با معادله‌یِ حل‌پذیر اختلاف داشته باشد. در این‌جا بیش‌ترِ مثال‌هایی که می‌زنیم به روشِ دقیق هم قابلِ حل‌اند. به این طریق می‌توانیم جوابِ دقیق را با جوابِ تقریبی مقایسه کنیم. در برنامه‌یِ رسمیِ آموزشِ فیزیک در دوره‌یِ کارشناسی تقریباً تنها در درسِ مکانیکِ کوانتمی و آن هم در محاسبه‌یِ اختلالیِ مقادیرِ ویژه‌یِ یک عمل‌گر روشِ اختلال موردِ استفاده‌یِ جدّی قرار می‌گیرد. اما از روشِ اختلال در حلِ معادله‌هایِ جبری، معادله‌یِ دیفرانسیل، انتگرال‌گیری، و $\cdots$ می‌توان استفاده کرد. در این مقاله سعی می‌شود با مثال‌هایِ مختلف این روش معرفی شود.

مثالِ ۱ — معادله‌یِ $x^2 = 1+\epsilon$، $(\epsilon \ll 1)$ را در نظر بگیرید. جوابِ این معادله عبارت است از

$$x = \pm\sqrt{1+\epsilon} \approx \pm(1+\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{8}+\cdots). \tag{1}$$

حالا بیایید این معادله را با روشِ اختلال حل کنیم. اگر ϵ را صفر بگیریم، جوابِ معادله‌یِ (1)، $x_0 = \pm 1$ است. فرض کنیم جوابِ معادله‌یِ (1) به صورتِ بسطِ تیلوری از ϵ است.

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots. \tag{2}$$

این بسط را در معادله‌یِ (1) جاگذاری می‌کنیم.

$$(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)^2 = 1+\epsilon \tag{3}$$

ضرایبِ توان‌هایِ مختلفِ ϵ در دو طرفِ رابطه‌یِ (3) را باید مساوی باشند.

$$\begin{array}{ll} \epsilon^0; & x_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm 1 \\ \epsilon^1; & 2x_0x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pm 1/(2x_0) = \pm 1/2 \\ \epsilon^2; & x_1^2 + 2x_0x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \mp x_1^2/(2x_0) = \mp 1/8 \\ \cdots & \cdots \end{array} \tag{4}$$

A. Aghamohammadi: perturbation; v 1, 2004

دو جواب این‌جا به دست می‌آید:

$$x = \pm(1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \cdots), \qquad (5)$$

که همان جوابِ معادله‌ي (1) است که از بسطِ جوابِ دقیق به دست آورده بودیم. ϵ را 0.01 بگیریم. $x^2 = 1.01$ و جذرِ آن تا هشت رقمِ معنی‌دار $x = 1.0049875$ می‌شود. با استفاده از روشِ اختلال و فقط تا رتبه‌ي دوم ϵ به همین جواب می‌توان رسید.$\square$

مثالِ ۲— مثالِ دیگری را در نظر بگیریم.

$$x^2 - (3 + 2\epsilon)x + 2 + \epsilon = 0. \qquad (6)$$

در حدّ ِ $\epsilon = 0$ جواب‌هاي این معادله $x = 1, 2$ است. بسطِ (2) براي x را در معادله‌ي (6) جاگذاری می‌کنیم. ضرایبِ توان‌هاي مختلفِ ϵ صفر هستند.

$$\begin{array}{lll}
\epsilon^0; & x_0^2 - 3x_0 + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1, 2 & \\
\epsilon^1; & 2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{2x_0 - 1}{2x_0 - 3} & \\
\epsilon^2; & x_1^2 + 2x_0x_2 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{2x_1 - x_1^2}{2x_0 - 3} & \\
\cdots & \cdots & (7)
\end{array}$$

از این‌جا دو جوابِ معادله‌ي (6) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
x &= 1 - \epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots \\
x &= 2 + 3\epsilon - 3\epsilon^2 + \cdots \square \qquad (8)
\end{aligned}$$

در مثال‌هاي قبلی با اضافه شدنِ جمله‌ي اختلال رتبه‌ي معادله و بنا بر این تعدادِ جواب‌ها عوض نمی‌شد. اما اگر با اضافه شدنِ جمله‌ي اختلال رتبه‌ي معادله بالا رود براي $\epsilon \neq 0$ ممکن است جواب‌هایی به دست آید که در حدّ ِ $\epsilon = 0$ نداشتیم.

مثالِ ۳— معادله‌ي

$$\epsilon x^2 + x - 1 = 0. \qquad (9)$$

در حدّ ِ $\epsilon = 0$ رتبه‌ي یک است در حالی که براي $\epsilon \neq 0$ رتبه‌ي دو می‌شود. تنها جوابِ این معادله در حدّ ِ $\epsilon = 0$، $x_0 = 1$ است. بسطِ (2) براي x را در معادله‌ي (9) جاگذاری می‌کنیم.

$$\epsilon(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)^2+(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)-1=0. \tag{10}$$

همه‌ي ضرايبِ ϵ در رابطه‌ي بالا صفر هستند.

$$\begin{array}{lll}
\epsilon^0; & x_0-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=1 \\
\epsilon^1; & x_1^2+x_0^2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1 \\
\epsilon^2; & 2x_0x_1+x_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=2 \\
\cdots & \cdots
\end{array} \tag{11}$$

معادله‌ي (9) دو جواب دارد، اما با اين روش تنها يک جواب را به دست مي‌آوريم. نتيجه‌اي که مي‌توانيم بگيريم اين است که با جاگذاري بسطِ تيلورِ (2) تنها همان جوابي که در حدِّ $\epsilon=0$ داشتيم را مي‌توانيم به دست آوريم. به زبانِ ديگر هر گاه با اضافه شدنِ اختلال رتبه‌ي معادله بالا برود ممکن است معادله جواب‌هاي ديگري داشته باشد اما اين جواب‌هاي اضافيِ احتمالي را نمي‌توان به صورتِ بسطِ تيلور بر حسبِ ϵ نوشت. به اختلال‌هايي از اين نوع اختلالِ تکين[1] مي‌گويند. بياييد بسطِ

$$x=\epsilon^\alpha(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)=:\epsilon^\alpha X. \tag{12}$$

را براي x (يا براي X) در نظر بگيريم.

$$\epsilon^{2\alpha+1}(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)+\epsilon^\alpha(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)-1=0. \tag{13}$$

کوچک‌ترين توانِ ϵ در پرانتزِ اول $2\alpha+1$ و در پرانتزِ دوم α است. $\alpha=0$ هماني است که قبلاً به دست آورده‌ايم. در آن مورد کوچکترين توانِ ϵ در پرانتزِ دومِ رابطه‌ي (10) از رتبه‌ي جمله‌ي آخر يعني از رتبه‌ي ϵ^0 است. حالتِ ديگر آن است که جمله‌ي اول و دومِ رابطه‌ي (9) هم‌رتبه باشند، يعني آن که کوچک‌ترين توانِ ϵ در پرانتزِ اول با کوچک‌ترين توانِ ϵ در پرانتزِ دومِ رابطه‌ي (13) هم‌رتبه باشند.

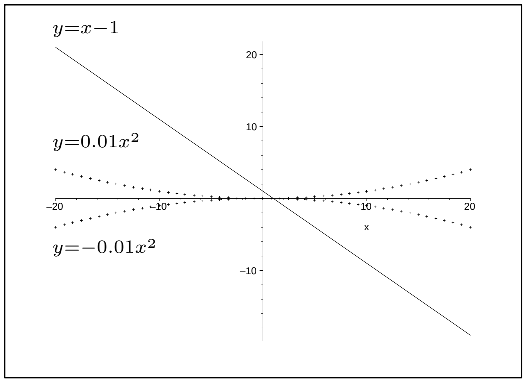
$$2\alpha+1=\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1. \tag{14}$$

در اين صورت X برحسبِ ϵ بسطِ تيلور ولي x برحسبِ ϵ بسطِ لوران خواهد داشت. چنين بسطي براي x منجر به جوابِ زير مي‌شود.

$$x=-\frac{1}{\epsilon}-1+\epsilon+\cdots \tag{15}$$

[1] singular perturbation

در حدِّ $\epsilon \ll 1$ معادله‌ي (9) دو جواب دارد که یکی در نزدیکيِ یک است. اندازه‌يِ جوابِ دیگر خیلی بزرگ است.



برايِ به دست آورنِ جواب کافی است که محلِ تقاطعِ $y = \epsilon x^2$ و $y = 1 - x$ را به دست آوریم. برايِ $\epsilon = 0.01$ این جواب حدودِ 101- است. با کوچک شدنِ ϵ، تقعرِ سهمی کم‌تر می‌شود و نقطه‌يِ تقاطعِ آن با $y = 1 - x$ یعنی جواب به سمتِ $-\infty$ می‌رود. در $\epsilon = 0$ این جواب از بین می‌رود و با منفی شدنِ ϵ جواب از $+\infty$ شروع می‌کند به کوچک شدن. البته جوابِ دیگر به ازايِ $\epsilon \ll 1$، هم‌واره حول و حوشِ 1 باقی می‌ماند. در واقع با تغییرِ کوچکی در پارامترِ مسئله، یعنی ϵ، یکی از جواب‌هايِ معادله از مقدارِ $-\infty$ به $+\infty$ تغییرِ می‌کند. $\square$

مثال‌هایی در فیزیک وجود دارند که پدیده‌يِ مشابهی رخ می‌دهد، مثلاً پدیده‌يِ تبخیر. با تغییرِ پارامترِ دما به مقدارِ خیلی کوچک چگالی تغییرِ بسیار بزرگی (مثلاً برايِ آب تا 1000 برابر) دارد. این نوع پدیده‌ها در حدِّ ترمودینامیکی یعنی در حدِّ تعدادِ زیادِ ذرات اتفاق می‌اُفتد.

فرض کنید خودمان را به معادله‌هايِ حقیقی محدود کنیم. گاهی اوقات با اضافه شدنِ جمله‌يِ اختلال رتبه‌يِ معادله تغییری نمی‌کند ولی تعدادِ جواب‌هايِ معادله کم می‌شود. منظور تعدادِ جواب‌هايِ حقیقيِ معادله است. اگر خودِمان را به جواب‌هايِ حقیقی محدود نکنیم، تعدادِ جواب‌ها عوض نمی‌شود، بلکه با تغییر پارامترِ اختلال بعضی از جواب‌ها از محورِ حقیقی جدا شده و به صفحه‌يِ مختلط می‌روند. اگر یک معادله‌يِ حقیقی را مزدوجِ مختلط کنیم، معادله عوض نمی‌شود. بنا بر این جواب‌هايِ آن‌هم عوض نمی‌شوند. پس جواب‌ها یا باید حقیقی باشند و یا این‌که اگر جوابی مختلط بود مزدوجِ مختلطِ این جواب هم جواب است. فرض کنید به ازايِ مقداری از پارامترِ اختلال جواب‌ها حقیقی باشند. با تغییرِ پارامترِ اختلال ممکن است جواب‌های حقیقی به هم نزدیک شده و وقتی جواب‌ها تبه‌گن شدند، مثلاً دوتایی (یا هر عددِ زوجِ دیگری)، به صورت جواب‌هايِ مزدوجِ مختلط به صفحه‌يِ مختلط می‌روند.

مثالِ ۴– معادله‌يِ $x^2 + \epsilon = 0$ به ازايِ $\epsilon = 0$ یک جوابِ صفرِ دوگانه دارد. اگر ϵ به

تدریج منفی شود، جواب‌های تبه‌گن رویِ محورِ حقیقی از هم جدا می‌شوند. اگر ϵ را دوباره به تدریج به سمتِ صفر ببریم این دوجواب حقیقی به هم نزدیک می‌شوند، تا در $\epsilon = 0$ جواب‌ها تبه‌گن شوند. با مثبت شدنِ ϵ این دو جواب به صورتِ دو جوابِ مزدوجِ مختلطِ $\pm i\sqrt{|\epsilon|}$ در می آیند.$\square$

در ابتدا که اختلال را تعریف کردیم، گفتیم که جمله‌ي اختلال باید جمله‌يِ کوچکی باشد. اما سئوالی ممکن است مطرح شود: چه‌قدر کوچک؟

مثالِ ۵— این معادله توسط ویلکینسون[2] مطرح شد.

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-20)+\epsilon x^{19}=0 \tag{16}$$

به ازایِ $\epsilon = 0$ جواب‌هايِ این معادله اعدادِ صحیحِ 1 تا 20 است. ببینیم ϵ چه‌قدر کوچک باشد تا بتوانیم از روشِ عاديِ اختلال استفاده کنیم. چون رتبه‌يِ چند جمله‌ای عوض نمی‌شود اختلال تکین نیست. بیایید ببینیم جوابِ $x = k$ (مثلاً $x = 16$) چه‌قدر عوض می‌شود. بسطِ زیر را در نظر بگیرید،

$$x = k + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots. \tag{17}$$

این بسط را در معادله‌يِ (16) جاگذاری می‌کنیم.

$$(k-1+\epsilon x_1+\cdots)(k-2+\epsilon x_1+\cdots)\cdots+\epsilon(k+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)^{19}=0 \tag{18}$$

ضرایبِ مختلفِ ϵ صفراَند. مثلاً برای رتبه‌هايِ اول و دومِ ϵ به روابطِ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &x_1[(k-1)!\ (20-k)!]+k^{19}=0\\ &x_2[(k-1)!\ (20-k)!]+x_1^2[(k-1)!\ (20-k)!][\frac{1}{21-k}+\cdots+\frac{1}{k-1}] \end{aligned} \tag{19}$$

برايِ $k = 16$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{16^{19}}{15!4!}=-0.24\times 10^{10}\\ x_2 &= \end{aligned} \tag{20}$$

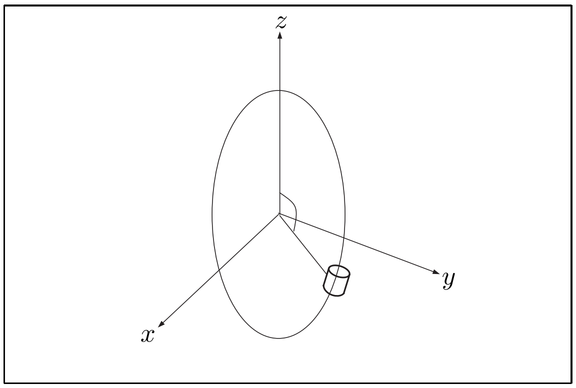
بنا بر این حتی اگر $\epsilon = 10^{-10}$ هم بگیریم، روشِ اختلال جواب‌هايِ خوبی نمی‌دهد. اگر مسئله را دقیق‌تر بررسی کنیم به ازايِ $\epsilon = 10^{-10}$ بعضی از جواب‌ها، مثلاً 1 و 2 تغییرِ

---

[2] Wilikinson

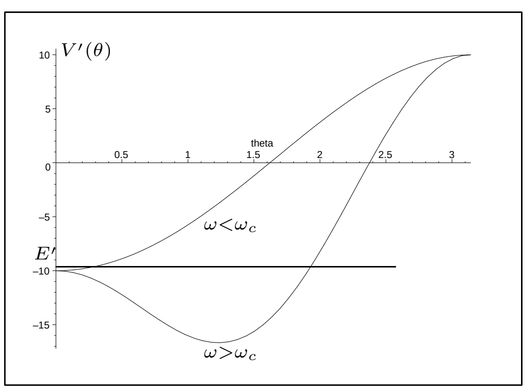
چندانی نمی‌کنند ولی دیگر جوابی رویِ محورِ حقیقی و حول و حوشِ 16 وجود ندارد. این جواب با جوابِ 15 به صورتِ یک زوج جوابِ مزدوجِ مختلط در آمده‌اند. در صورتی که ϵ کوچک‌تر شود همه‌یِ جواب‌ها را می‌توان از اختلال در آورد.□

مثالِ ٦– حلقه‌ای صلب به شعاعِ R را با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω می‌چرخانیم. دانه‌یِ تسبیحی را از این حلقه رد کرده‌ایم. رویِ این سیستم کار انجام می‌شود و انرژی بقاً ندارد ولی کمیتِ دیگری با بُعدِ انرژی می‌توانیم پیدا کنیم که ثابتِ‌حرکت است.



$$
\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + V'(\theta) \\
V'(\theta) &:= -\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta - mgR\cos\theta. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

شکلِ $V'(\theta)$ بستگی به مقدارِ ω دارد. در صورتی که $\omega < \omega_c := \sqrt{g/R}$ باشد نقاطِ $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نقاطِ تعادل هستند که اولی تعادلِ پایدار و دومی تعادلِ ناپایدار است. در صورتی که $\omega > \omega_c$ باشد سه نقطه‌یِ تعادل وجود دارد. در نقاطِ $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ تعادل ناپایدار و در $\theta = \cos^{-1}(\omega_c/\omega)$ تعادل پایدار است. در این‌جا تعدادِ نقاطِ تعادل به طورِ ناپیوسته تغییر می‌کند.



فرض کنید انرژی کمی بزرگ‌تر از $-mgR$ باشد.

$$E' =: -mgR(1-\epsilon) \tag{22}$$

می‌خواهیم نقاطِ بازگشت را به دست آوریم. از شکل هم پیداست که براىِ $\omega < \omega_c$، این زاویه $\theta \approx 0$ و براىِ $\omega > \omega_c$ جوابی محدود و دور از صفر دارد. با تعریفِ $\lambda := (\omega/\omega_c)^2$ معادله‌ىِ (21) به صورتِ زیر در می‌آید.

$$2\lambda(1-\epsilon) = \sin^2\theta + 2\lambda\cos\theta. \tag{23}$$

بسطی به صورتِ زیر براىِ θ در نظر می‌گیریم،

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \cdots. \tag{24}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned} \sin\theta &\approx \sin\theta_0 + \epsilon\theta_1\cos\theta_0 \\ \cos\theta &\approx \cos\theta_0 - \epsilon\theta_1\sin\theta_0. \end{aligned} \tag{25}$$

و جاگذاری در رابطه‌ىِ (21) از صفر قرار دادنِ ضرایبِ ϵ^0 و ϵ^1 به روابطِ زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_0 + 2\lambda\cos\theta_0 &= 2\lambda \\ 2\theta_1\sin\theta_0\cos\theta_0 - 2\theta_1\lambda\sin\theta_0 &= -2\lambda. \end{aligned} \tag{26}$$

به سادگی می‌توان دید که براىِ $\lambda < 1$، $\cos\theta_0 = 2\lambda - 1$ است ولی براىِ $\lambda > 1$ معادله‌ىِ بالا جواب ندارد. در واقع اگر دقیق‌تر به مسئله نگاه کنیم بسطِ تیلورِ (24) براىِ $\lambda > 1$ جوابِ خوبی نیست. براىِ این حالت از شکل هم پیداست که θ باید خیلی کوچک باشد. براىِ θ ىِ کوچک (23) به صورتِ زیر در می‌آید،

$$2\lambda(1-\epsilon) = \theta^2 + 2\lambda(1 - \frac{\theta^2}{2}) \quad \Rightarrow \quad \theta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - 1}}\epsilon^{1/2} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \tag{27}$$

بنا بر این براىِ $\lambda > 1$ بسطِ θ بر حسبِ ϵ بسطِ تیلور نیست و از $\epsilon^{1/2}$ شروع می‌شود.$\square$

مثالِ ۷— معادله‌ىِ زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2 - 2\epsilon x - \epsilon = 0. \tag{28}$$

با جاگذاريِ بسطِ (2) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \epsilon^0; &\qquad x_0^2 = 0 \\ \epsilon^1; &\qquad 2x_0x_1 = 2x_0. \end{aligned} \tag{29}$$

از این معادلات x را نمی‌توان به دست آورد. از بسطی نظیرِ بسطِ (12) استفاده می‌کنیم. $x_0 \neq 0$ می‌گیریم، در واقع x_0 ضریبِ اولین جمله‌ي غیرِصفرِ در بسطِ بر حسبِ ϵ را x_0 می‌گیریم. در این صورت داریم

$$\epsilon^{2\alpha}(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)^2 - 2\epsilon^{\alpha+1}(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots) - \epsilon = 0 \tag{30}$$

کوچک‌ترینِ توانِ ϵ در پرانتزِ اول $\epsilon^{2\alpha}$ و در پرانتزِ دوم $\epsilon^{\alpha+1}$ و جمله‌يِ آخر ϵ است. دستِ‌کم یکی از جملاتِ پرانتزهايِ اول و دوم باید از رتبه‌يِ ϵ باشد. اگر $2\alpha < \alpha + 1$ (یعنی $\alpha < 1$) باشد، اولین جمله‌ي پرانتزِ اول از رتبه‌يِ ϵ است. در این صورت $\alpha = 1/2$. اگر $2\alpha > \alpha + 1$ (یعنی $\alpha > 1$) باشد، اولین جمله‌يِ پرانتزِ دوم از رتبه‌يِ ϵ است. در این صورت $\alpha = 0$ که با $\alpha > 1$ سازگار نیست. پس $\alpha = 1/2$.

$$x = \epsilon^{1/2}(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots). \tag{31}$$

با جاگذاريِ این بسط در (28) نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned} \epsilon^1; &\qquad x_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 1 \\ \epsilon^{3/2}; &\qquad 2x_0x_1 - 2x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1. \end{aligned} \tag{32}$$

و جوابِ معادله‌يِ (28) خواهد شد،

$$x = \pm\epsilon^{1/2} + \epsilon. \tag{33}$$

معادله‌يِ (28) را دقیق هم می‌شود حل کرد و جوابِ آن عبارت است از

$$x = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon} \approx \pm\epsilon^{1/2} + \epsilon \pm \epsilon^{3/2}. \tag{34}$$

$\Box$.

گاهی با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که علاوه بر پارامترِ کوچکِ ϵ پارامترهایِ دیگری نیز در مسئله وجود دارد. برایِ مقادیری از این پارامترها یک بسط و برایِ مقادیرِ دیگری از پارامترها بسطِ دیگری از ϵ جوابِ مسئله است.
مثالِ ۸– معادله‌یِ زیر را در نظر بگیرید.

$$(x-1)(x-\tau) = -\epsilon x. \tag{35}$$

با فرضِ این که جواب بسطِ تیلوری از ϵ باشد به جوابِ زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} x &= \tau + \frac{\epsilon\tau}{1-\tau} + \frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3} + \cdots \\ x &= 1 - \frac{\epsilon\tau}{1-\tau} - \frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3} + \cdots \end{aligned} \tag{36}$$

البته این جواب‌ها در حدِّ $\tau \to 1$ به درد نمی‌خورند. اگر τ آن‌قدر به 1 نزدیک شودکه جملاتِ مختلف هم‌رتبه شوند این بسط را باید کنار گذاشت. مثلاً اگر جمله‌هایِ دوم و سوم هم رتبه باشند

$$\frac{\epsilon\tau}{1-\tau} = \mathcal{O}(\frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3}), \quad \Rightarrow \quad 1-\tau = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \tag{37}$$

با تعریفِ $\sigma\epsilon^{1/2} := 1-\tau$ رابطه‌یِ (35) به صورتِ زیر در می آید.

$$(x-1)(x-1+\epsilon^{1/2}\sigma) = -\epsilon x. \tag{38}$$

x جوابِ این معادله را می‌توان به صورتِ بسطِ تیلوری از $\epsilon^{1/2}$ نوشت.

$$x = 1 - \frac{\epsilon^{1/2}}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-4}) + \cdots \tag{39}$$

□

معادلاتِ دیفرانسیلی را نیز مشابهِ معادله‌هایِ جبری گاهی می‌توان به روشِ اختلالی حل کرد.
مثالِ ۹– بیایید سقوطِ آزادِ ذره‌ای به جرمِ m در حضورِ مقاومتِ هوا را بررسی کنیم. فرض کنید نیرویِ مقاومتِ هوا متناسب با سرعت باشد. اگر مقاومتِ هوا کوچک باشد می‌توان مسئله را به روشِ اختلال حل کرد. بیایید اول این گزاره که مقاومت هوا کوچک باشد را دقیق‌تر کنیم. معادله‌یِ نیوتن و شرطِ اولیه برایِ چنین ذره‌ای

$$m\ddot{x} = mg - bv, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \tag{40}$$

مقاومتِ هوایِ کوچک یعنی این که $|bv| \ll mg$ یا $|v| \ll mg/b$. بنا بر این همواره به ازایِ هر b ای می‌توان سرعتی پیدا کرد که چنین شرطی را برآورده کند. $\epsilon := b/m$ می‌گیریم. ϵ بعددار است پس در بسطِ

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots, \tag{41}$$

x_1، x_2 و $\cdots$ بُعدِ طول ندارند. با جاگذاریِ این بسط در معادله‌ی نیوتن و شرط‌هایِ اولیه

$$\begin{aligned}
&(\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + \epsilon^2\ddot{x}_2 + \cdots) = g - \epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)\\
&\dot{x}_0(0) + \epsilon\dot{x}_1(0) + \epsilon^2\dot{x}_2(0) + \cdots = v_0\\
&x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) + \cdots = 0,
\end{aligned} \tag{42}$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{array}{llll}
\epsilon^0; & \ddot{x}_0 = g & \dot{x}_0(0) = v_0, & x_0(0) = 0\\
\epsilon^1; & \ddot{x}_1 = -\dot{x}_0 & \dot{x}_1(0) = 0, & x_1(0) = 0\\
\epsilon^2; & \ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 & \dot{x}_1(0) = 0, & x_2(0) = 0\\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array} \tag{43}$$

با حلِ این معادله‌ها $x(t)$ به دست می‌آید.

$$x(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2} - \frac{bgt^3}{6m} + \frac{b^2 g t^4}{24m^2} + \cdots \tag{44}$$

معادله‌یِ (40) را می‌شود دقیق هم حل کرد.

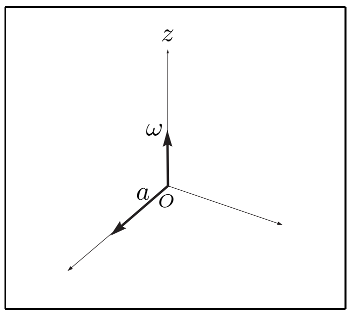
$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{mg}{b} - (\frac{mg}{b} - v_0)\mathrm{e}^{-bt/m}\\
x(t) &= \frac{mgt}{b} - \frac{m}{b}(\frac{mg}{b} - v_0)(\mathrm{e}^{-bt/m} - 1).
\end{aligned} \tag{45}$$

□

ما تا این‌جا برایِ استفاده از روشِ اختلال بسطی که برایِ جواب حدس می‌زدیم را در معادله جاگذاری می‌کردیم و ضرایبِ توان‌هایِ مختلفِ ϵ را صفر می‌گذاشتیم. یک راهِ معادل این است که جمله‌یِ اختلال را مثلاً به سمتِ راستِ معادله ببریم. با صفر گذاشتنِ جمله‌یِ اختلال جوابِ رتبه‌یِ صفر به دست می‌آید. اگر جمله‌یِ صفر را در سمتِ راست جاگذاری کنیم معادله‌ای به دست می‌آید که می‌توانیم از آن جوابِ رتبه‌یِ یک را به دست

آوریم. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم جواب‌های رتبه‌هایِ بالاتر را به دست آوریم. به این روش، روشِ تکرار می‌گویند.

مثالِ ۱۰ – صفحه‌يِ بزرگی حولِ محورِ z که بر صفحه عمود است و از نقطه‌يِ O می‌گذرد، با سرعتِ زاویه‌يِ ثابتِ ω دوران می‌کند. جسمِ کوچکی به جرمِ m را رويِ این سطح و در فاصله‌يِ a از نقطه‌يِ O قرار می دهیم. ضریبِ اصطکاکِ m با صفحه μ است. بردارِ مکانِ ذره را تا رتبه‌يِ دومِ μ به دست آورید. تا این رتبه جسم به مبدأ نزدیک می‌شود و یا از آن دور می‌شود؟



اندازه‌يِ نیرويِ اصطکاک μmg و جهتِ آن عکسِ جهتِ سرعتِ نسبيِ جسم نسبت به صفحه است. سرعتِ نسبيِ جسم نسبت به صفحه $\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}$ است. بنا بر این نیرويِ اصطکاک عبارت است از

$$\vec{f}=-\mu mg\frac{\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}}{|\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}|}. \tag{46}$$

شتابِ جسم نیز عبارت است از

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=-\mu g\frac{\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}}{|\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}|}. \tag{47}$$

شرایطِ اولیه نیز $\vec{r}(t=0)=\hat{i}a$ و $\vec{v}(t=0)=0$ است. برايِ آن که سرعت را تا رتبه‌يِ اول به دست آوریم کافی است که سمتِ راست رابطه‌يِ بالا را تا رتبه‌يِ صفرم قرار دهیم. در این صورت

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt}=\mu g\frac{\vec{\omega}\times\hat{i}a}{|\vec{\omega}\times\hat{i}a|}. \tag{48}$$

از حل این معادله سرعت تا رتبه‌يِ اول $\vec{v}_1$ و مکان تا رتبه‌يِ اول $\vec{r}_1$ را می توان به دست آورد.

$$\vec{v}_1=\mu gt\hat{i},\qquad \vec{r}_1=a\hat{i}+\frac{1}{2}\mu gt^2\hat{j}. \tag{49}$$

و به همین ترتیب با جای‌گذاری مقادیرِ مکان و سرعت تا رتبه‌ي اول می‌توان سرعت و مکان را تا رتبه‌ي دوم به دست آورد.

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \mu g \frac{(\omega a - \mu g t)\hat{j} - 1/2\ \mu g t^2 \omega \hat{i}}{\sqrt{(\omega a - \mu g t)^2 + 1/4\ \mu^2 g^2 t^4 \omega^2}}. \tag{50}$$

چون صورتِ کسر تا رتبه‌ي اول است و ما می‌خواهیم نتیجه تا رتبه‌ي دوم درست باشد کافی است مخرجِ کسر را تا رتبه‌ي اول نگه داریم. با صرفِ نظر از جمله‌هايِ بالاتر از رتبه‌ی دو داریم.

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \mu g \left[\frac{(\omega a - \mu g t)\hat{j}}{(\omega a - \mu g t)} - \frac{1/2\ \mu g t^2 \omega \hat{i}}{\omega a} \right]. \tag{51}$$

در جمله‌ي آخر چون μ^2 داریم کافی است مخرج را تا رتبه‌ي صفرم نگه داریم. پس از ساده کردن و انتگرال‌گیری سرعت و مکان را تا رتبه‌ي دوم به دست می آید.

$$\vec{v}_2 = \mu g t \hat{j} - \frac{\mu^2 g^2 t^3}{6a}\hat{i}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{1}{2}\mu g t^2 \hat{j} + (a - \frac{\mu^2 g^2 t^4}{24a})\hat{i}. \tag{52}$$

فاصله‌ي ذره تامبدأ تا رتبه‌ي دومِ μ عبارت است از

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{6}\mu^2 g^2 t^4 + a^2}\ > a \tag{53}$$

پس ذره تا این رتبه از مبدأ دور می‌شود. $\square$

فرض کنید تابعِ $V(x)$ در نقطه‌ي x_0 کمینه است. اگر $V(x)$ را حولِ نقطه‌ي x_0 بسط دهیم.

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 V''(x_0) + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 V'''(x_0) + \cdots \tag{54}$$

برايِ سادگی مبدأ مختصات را در x_0 می‌گذاریم. در این جا خودِمان را به حالتی که جمله‌ي رتبه‌ي دو بر حسبِ x غیرِصفر است محدود می‌کنیم. در صورتی که x به اندازه‌ي کافی به 0 نزدیک باشد می‌توان از جمله‌هايِ رتبه‌ي دوم به بالا صرفِ نظر کرد. فرض کنید که $V(x)$ پتانسیلِ باشد، مسئله تبدیل به مسئله‌ي نوسان‌گرِ هم‌آهنگ می‌شود و نیرو عبارت است از

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad k > 0. \tag{55}$$

در تقریبِ بعدی می‌توانیم جمله‌هایِ بعدی را نگه داریم. جمله‌یِ رتبه‌یِ دوم را همیشه با انتقالِ مبدأ می‌توان حذف کرد.

$$m\ddot{x} = -kx + \beta x^3. \tag{56}$$

تا وقتی که جمله‌یِ رتبه‌یِ سه از جمله‌یِ خطی کوچک‌تر است، این معادله، معادله حرکتِ یک نوسانگرِ غیرِهم‌آهنگ است. هر چند حرکت دوره‌ای است ولی حرکت هم‌آهنگ نیست.
مثالِ ۱۱— نوسان‌گرِ غیرِهم‌آهنگی را در نظر بگیرید.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^3. \tag{57}$$

در رتبه‌یِ صفرمِ ϵ،

$$x_0(t) = A\cos\omega_0 t, \tag{58}$$

و در رتبه‌یِ بعدی

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3 \tag{59}$$

انتظار داریم جوابِ مسئله دوره‌ای باشد، ولی طرفِ راستِ رابطه‌یِ بالا متناظر با یک نیرویِ واداشته با همان فرکانسِ طبیعیِ سیستم است. اتفاقی که می‌افتد این است که تشدید رخ می‌دهد، جواب بزرگ می‌شود و جواب دوره‌ای نیست. اما می‌دانیم که جوابِ مسئله دوره‌ای است. در این‌جا نیز روشِ اختلالِ عادی جوابِ درست نمی‌دهد. در واقع نشان می‌دهیم که فرکانسِ طبیعیِ سیستم که مربوط به حرکتِ هم‌آهنگِ در رتبه‌یِ صفر است عوض می‌شود. به این‌کار بازبهنجارش[3] گفته می‌شود. بسطِ زیر را برایِ فرکانس در نظر بگیرید

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon\Omega_1. \tag{60}$$

با جاگذاریِ این بسط و بسطِ تا رتبه‌یِ اولِ x در (57) نتیجه می‌شود:

$$\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + +(\omega^2 + \epsilon\Omega_1)(x_0 + \epsilon x_1) = \epsilon(x_0 + \epsilon x_1)^3. \tag{61}$$

renormalization[3]

معادله‌هایِ حاکم بر x_0 و x_1 عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \epsilon^0; \qquad & \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \\ \epsilon^1; \qquad & \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \Omega_1 x_0 = x_0^3 \end{aligned} \tag{62}$$

x_0 حرکتش کماکان هم‌آهنگ است، ولی با فرکانسِ ω به‌جایِ فرکانسِ ω_0.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -\Omega_1 A \cos\omega t + A^3 \cos^3 \omega t \\ &= A^3[-\frac{\Omega_1}{A^2}\cos(\omega t) + \frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t)]. \end{aligned} \tag{63}$$

برایِ آن که تشدید رخ ندهد و حرکت دوره‌ای بماند باید ضریبِ $\cos(\omega t)$ صفر باشد،

$$\Omega_1 = \frac{3}{4}A^2. \tag{64}$$

برایِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ فرکانس مستقل از دامنه است ولی برایِ نوسان‌گرِ غیرِهم‌آهنگ فرکانس به دامنه بستگی دارد،

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{3}{4}\epsilon A^2. \tag{65}$$

حرکتِ آونگ مثالی از نوسان‌گرِ غیرِهم‌آهنگ است. طولِ آونگ را l می‌گیریم. وقتی دامنه‌یِ حرکتِ آونگ آن‌قدر کم نباشد که بتوان از جمله‌یِ غیرِهم‌آهنگ صرفِ‌نظر کرد

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \approx -\frac{g}{l}(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots). \tag{66}$$

برایِ این آونگ $\epsilon = g/(6l)$. اگر دامنه حرکت را A بگیریم، فرکانسِ حرکت از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \epsilon\Omega_1 = \frac{g}{l}(1 - \frac{A^2}{8}). \tag{67}$$

در مواردی که اضافه‌کردنِ جمله‌یِ اختلال جوابِ رتبه‌یِ صفر را عوض می‌کند بازبهنجارش رخ می‌دهد. مشابهِ همین اتفاق در نظریه‌یِ میدان‌هایِ کوانتمی می‌اُفتد.□

۱ مراجع

[1] Nayfeh, Ali. H.; Introduction to Perturbation.

[2] Bender, Carl. M., Orszag, Steven. A.; Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.