به نامِ خدا

امتحانِ میانِ‌ترمِ اولِ ریاضی‌فیزیک I | دانش‌گاهِ الزهرا— آبان‌ماهِ ۸۹

مسئله‌ی1)

الف) کمیتِ زیر چه‌قدر است؟

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$$

ب) انتگرال زیر را بر حسبِ V به دست آورید

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}}{3}\cdot \mathrm{d}S,$$

این انتگرال رویِ سطحِ S است که حجمِ V را در برمی‌گیرد.

ج) رابطه‌ی زیر را تحقیق کنید

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + \nabla u\cdot\nabla v,$$

و سپس کمیتِ زیر را حساب کنید

$$\nabla^2(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}).$$

د) کمیتِ زیر را حساب کنید

$$\nabla - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\times(\mathbf{r}\times\nabla)$$

مسئله‌ی2) رویه‌ای با معادله‌ی

$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x + 4y,$$

را در مختصاتِ دکارتی در نظر بگیرید.

الف) بردارِ یکه‌ی عمود بر این رویه را در نقطه‌ای با مختصاتِ $x = 1, y = 1$ به دست آورید.

ب) معادله‌ای صفحه‌ای که در همان نقطه بر رویه مماس است را به دست آورید.

مسئله‌یِ3) فرض کنید قانونِ کولن به جایِ شکلِ استانداردی که می‌شناسیم به شکلِ

$$\phi = \frac{q}{r^{1-\epsilon}}, \quad 0 < \epsilon \ll 1,$$

بود. برایِ $r \neq 0$ کمیت‌هایِ زیر را محاسبه کنید

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi, \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla^2\phi, \\ \nabla\times\mathbf{E}, &\quad \oint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}S, \end{aligned}$$

که انتگرال رویِ سطحِ کره‌ای به شعاعِ R است.

مسئله‌یِ4) رابطه‌یِ مختصاتِ (u, v, ϕ) و مختصاتِ استوانه‌ای‌یِ متداول عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \rho &= a\sinh u \sin v, \quad & 0 \leq u \\ z &= a\cosh u \cos v, \quad & 0 \leq v \leq \pi \\ \phi &= \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{aligned}$$

الف) رویه‌هایِ $u = u_0$ و $v = v_0$ که u_0 و v_0 مقادیری ثابت هستند چه رویه‌هایی هستند؟ به طورِ کیفی دو تا از هرکدام از این رویه‌ها را بکشید.

ب) متریکِ مربوط به این مختصات را به دست آورید.

ج) $\nabla\phi$ را در این مختصات بنویسید. ϕ یک تابعِ اسکالر است.

مسئله‌یِ5) موفق باشید.

ممکن است این روابط به دردِ شما بخورند.

$$\nabla\phi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right],$$

$$\oint_S \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}S = \int \nabla\cdot V\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$