به نامِ خدا

امتحانِ پایانِ‌ترمِ ریاضی‌فیزیکِ I — دانش‌گاهِ الزهرا— دی‌ماهِ ۸۳

مسئله‌یِ1) مختصاتِ سهموی بر حسبِ مختصاتِ دکارتی‌یِ متداول عبارت‌اند از

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{\eta\,\xi}\cos\phi, \\ y = 2\sqrt{\eta\,\xi}\sin\phi, \qquad 0 \leq \eta < \infty, \qquad 0 \leq \eta < \infty, \qquad \leq \phi \leq 2\pi \\ z = \xi - \eta, \end{cases}$$

الف— شکلِ متریکِ صفحه در این مختصات چیست؟

ب— بردارهایِ پایه‌یِ این مختصات را بر حسبِ بردارهایِ پایه‌یِ مختصاتِ دکارتی بنویسید.

ج— ∇f را در این مختصات بنویسید.

مسئله‌یِ2) الف— تانسورِ سه‌بعُدی‌یِ A_{ij} چند مؤلفه‌یِ مستقل دارد؟ اگر A_{ij} متقارن باشد، آن‌گاه چند مؤلفه‌یِ مستقل دارد؟

ب— تانسورِ سه‌بعُدی‌یِ T_{ijkl} چند مؤلفه‌یِ مستقل دارد؟

ج— اگر تانسورِ T_{ijkl} تقارن‌هایِ زیر را داشته باشد

$$T_{ijkl} = T_{ijlk} = T_{jilk}$$

آن‌گاه چند مؤلفه‌یِ مستقل دارد؟

مسئله‌یِ3) دو ماتریسِ A و B داده شده‌اند:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

جابه‌جاگرِ این دو را حساب کنید. ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهایِ این دو را پیدا کنید. یک تبدیلِ متعامدِ U پیدا کنید که A و B را قطری کند، یعنی:

$$A' = \widetilde{U} A U, \qquad B' = \widetilde{U} B U, \qquad U\widetilde{U} = \widetilde{U} U = \mathbb{1}.$$

که A' و B' قطری هستند.

مسئله‌یِ4) در پایه‌یِ

$$|e_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |e_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دو بردارِ $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ عبارت‌اند از

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

الف— استقلال یا وابستگی‌ِ خطی‌ِ دو بُردارِ $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ را بررسی کنید.

تبدیلِ T به شکلِ زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} T|u_1\rangle := |u_1\rangle + \sqrt{3}|u_2\rangle, \\ T|u_2\rangle := \sqrt{3}|u_1\rangle. \end{cases}$$

ب— نمایشِ ماتریسیِ T در پایه‌ِی $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ را بنویسید.

ج— نمایشِ ماتریسیِ T در پایه‌ی $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ را بنویسید.

مسئله‌ِی5) الف— با فرضِ شکلِ مرسومِ معادله‌ِی اویلر— لاگرانژ

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0,$$

رابطه‌ِی زیر را اثبات کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0.$$

ب— بر طبقِ اصلِ فرما نور در مسیری حرکت می‌کند که زمانِ حرکتش کمینه شود، یعنی انتگرالِ زیر کمینه شود،

$$\int dt = \int \frac{ds}{v} = c\int ds\ n(x,y),$$

که $n(x,y)$ ضریب شکستِ محیط و $\mathrm{d}s$ عنصرِ طولِ مسیرِ نور است. فرض کنید ضریب شکستِ محیطی

$$n(x,y) = \alpha(y-y_0), \qquad y > y_0$$

است. مسیر نور در این محیط را به دست آورید.

ممکن است یکی از این انتگرال‌ها به دردِ شما بخورد.

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2-a^2}} = \cosh^{-1}(\frac{v}{a}) + C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+a^2}} = \sinh^{-1}(\frac{v}{a}) + C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{v}{a}) + C.$$