گاما، شماره ی ۱، زمستان ۱۳۸۲

زمین چه قدر پخ است؟[1]

X1-008 (2002/03/21) e-mail: mamwad@mailaps.org محمّد ِ خرمّی

مقدار ِ پخی یِ زمین، بر این اساس به دست می‌آید که این پخی ناشی از چرخش ِ زمین در زمان ی است که زمین مذاب بوده است.

0 مقدمه

یک توده یِ مذاب، تحت ِ گرانش ِ خود به شکل ِ کره در می‌آید، چون با این شکل انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی یِ آن کمینه می‌شود. چنین‌توده ای، اگر بچرخد پخ می‌شود، چون به ذره‌ها یِ آن نیرو یِ مرکزگریز وارد می‌شود و این نیرو در جاها یِ دورتر از محور ِ چرخش بزرگ‌تر است. برا یِ محاسبه یِ مقدار ِ این پخی، دو راه ِ هم‌ارز هست. در هر دو راه، ساده‌تر این است که محاسبه در چارچوب ِ چرخان ی انجام شود که توده نسبت به آن ساکن است. یک راه این است که انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی یِ این توده، به اضافه یِ انرژی یِ پتانسیل مرکزگریز ِ آن را حساب کنیم. نتیجه تابع ِ شکل ِ توده است. شکل ِ تعادلی یِ توده آن شکل ی است که این مجموع را کمینه می‌کند. راه ِ دیگر این است که تابع ِ پتانسیل ِ کل را در سطح ِ توده حساب کنیم. در حالت ِ تعادل، مقدار ِ این تابع باید رو یِ این سطح ثابت باشد. انجام ِ دقیق ِ هر دومحاسبه دشوار است. اما اگر سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش زیاد نباشد، می‌شود این محاسبه‌ها را تا اولین مرتبه یِ غیرِصفر نسبت به این سرعت انجام داد، و تغییرِشکل ِ تقریبی یِ توده نسبت به کره را به دست آورد.

فرض کنید توده از یک مایع ِ تراکم‌ناپذیر به جرم ِ M ساخته شده، شعاع َش در حالت ِ کروی R است، و با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ω می‌چرخد. با یک تحلیل ِ ابعادی می‌شود مرتبه یِ تغییر ِ فاصله یِ نقطه‌ها یِ مختلف ِ سطح ِ توده از مرکز (نسبت به R) را برآورد کرد:

$$\delta R \sim \frac{R^4\,\omega^2}{G\,M}, \qquad (1)$$

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-008.ps

که در آن δR تغییرِفاصله، و G ثابت ـ نیرو يِ گرانش است. کوچک‌بودن ـ ω یعنی $(\delta R)/R$ کوچک باشد، یا

$$\frac{R^3\,\omega^2}{G\,M} \ll 1. \tag{2}$$

در بخش ـ 1، δR را با کمینه‌کردن ـ انرژی يِ پتانسیل ـ کل به دست می‌آوریم. در بخش ـ 2، همین کمیت را با این روش به دست می‌آوریم که تابع ـ پتانسیل ـ کل رو يِ سطح ـ توده کمینه شود. در بخش ـ 3 هم مقدارها يِ عددی را برا يِ زمین حساب می‌کنیم.

1 انرژی يِ پتانسیل ـ کل ـ توده يِ چرخان

انرژی يِ پتانسیل ـ گرانشی يِ یک توده

$$U_G = -\frac{G}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3}$$

است، که در آن ρ چگالی يِ جرمی يِ توده است. اگر ρ تغییر کند، انرژی يِ پتانسیل ـ گرانشی هم تغییر می‌کند، و داریم

$$\delta U_G = -G\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{G}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{4}$$

در جمله يِ اول ـ طرف ـ راست، انتگرال‌گیری رو يِ $\mathbf{r}'$ پتانسیل ـ گرانشی يِ اولیه را می‌دهد. بنابراین،

$$\begin{aligned}\delta U_G &= \int \mathrm{d}^3r\;\delta\rho(\mathbf{r})\,\phi_G(\mathbf{r}) - \frac{G}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\\ &=: \delta U_1 + \delta U_2,\end{aligned} \tag{5}$$

که در آن ϕ_G پتانسیل ـ گرانشی يِ ناشی از ρ است. در مسئله يِ ما،

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases}\rho_0, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}, \tag{6}$$

که در آن

$$\rho_0 := \frac{M}{4\pi\,R^3/3}, \tag{7}$$

و

$$\rho(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases}\rho_0, & r<R+\delta R(\hat{\mathbf{r}})\\ 0, & r>R+\delta R(\hat{\mathbf{r}})\end{cases}, \tag{8}$$

که در آن

$$r(\hat{\mathbf{r}}) = R + \delta R(\hat{\mathbf{r}}) \tag{9}$$

معادله یِ سطح ِ توده، و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار ِ یکه یِ شعاعی است.

در نقطه‌ها یِ بیرون ِ کره یِ به شعاع ِ R، پتانسیل ِ ϕ_G می‌شود

$$\phi_G(\mathbf{r}) = -\frac{G\,M}{r}. \tag{10}$$

چون مشتق ِ این پتانسیل در $r = R$ پیوسته است، برا یِ $r < R$ هم این رابطه تا مرتبه یِ یک نسبت به $R - r$ درست است. ناحیه یِ انتگرال‌گیری در جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (5) از مرتبه یِ δR است. پس اگر برا یِ ϕ_G از (10) استفاده کنیم، جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (5) تا مرتبه یِ دو نسبت به δR درست است. به این ترتیب، این جمله می‌شود

$$\begin{aligned}
\delta U_1 \;&=\; -G\,M \int \mathrm{d}^3 r\; \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{r},\\
&=\; -G\,M \int \mathrm{d}\Omega \int_R^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r\,\rho_0,\\
&=\; -G\,M\,\rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\; \frac{(R+\delta R)^2 - R^2}{2},\\
&=\; -\frac{G\,M\,\rho_0}{2} \int \mathrm{d}\Omega\; [2R\,\delta R + (\delta R)^2].
\end{aligned} \tag{11}$$

به نظر می‌رسد در طرف ِ راست ِ این رابطه دو جمله با مرتبه‌ها یِ متفاوت هست، جمله یِ اول از مرتبه یِ یک و جمله یِ دوم از مرتبه یِ دو. اما چنین نیست. δR باید این قید را بر آورد که حجم ِ توده یِ ماده عوض نشود، چون توده تراکم‌ناپذیر است. پس

$$\int \mathrm{d}\Omega \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r^2 = \int \mathrm{d}\Omega \int_0^{R} \mathrm{d}r\; r^2, \tag{12}$$

یا

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \int \mathrm{d}\Omega \int_R^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r^2,\\
&=\; \int \mathrm{d}\Omega\; [R^2\,\delta R + R\,(\delta R)^2],
\end{aligned} \tag{13}$$

که در آن تساوی یِ دوم تا مرتبه یِ دو نسبت به δR درست است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\int \mathrm{d}\Omega\; R\,\delta R = -\int \mathrm{d}\Omega\; (\delta R)^2, \tag{14}$$

و با جاگذاری ي این در (11)،

$$\delta U_1 = \frac{G\,M\,\rho_0}{2}\int \mathrm{d}\Omega\;(\delta R)^2. \tag{15}$$

برا يِ محاسبه ي δU_2، توجه می‌کنیم که ناحیه يِ انتگرال‌گیری از مرتبه يِ $(\delta R)^2$ است. بنابراین اگر در انتگرال‌ده به جا يِ r و r' بگذاریم R، نتیجه تا مرتبه يِ دو نسبت به δR درست است. داریم

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}'), \tag{16}$$

[1]، که در آن Y_{lm} ها هم‌آهنگ‌ها يِ کروی اند و $r_<$ و $r_>$، به ترتیب کمینه و بیشینه يِ $\{r, r'\}$ اند. نتیجه می‌شود δU_2 تا مرتبه يِ دو نسبت به δR چنین است.

$$\begin{aligned}
\delta U_2 &= -\frac{G}{2R}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\,\delta\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}'),\\
&= -\frac{G\,\rho_0^2}{2R}\sum_{l,m}\frac{4\pi\,R^4}{2l+1}\left|\int \mathrm{d}\Omega\;\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\int_R^{R+\delta R}\mathrm{d}r\right|^2,\\
&= -\frac{3G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left|\int \mathrm{d}\Omega\;\delta R(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\right|^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

تابع ِ δR را می‌شود بر حسب ِ هم‌آهنگ‌ها يِ کروی بسط داد:

$$\delta R = \sum_{l,m} a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{18}$$

در این‌جا $a_{0\,0}$ تا مرتبه يِ یک نسبت به δR صفر است؛ چون از (14) نتیجه می‌شود تا مرتبه يِ یک نسبت به δR،

$$\int \mathrm{d}\Omega\;\delta R(\hat{\mathbf{r}}) = 0. \tag{19}$$

اما طرف ِ چپ ِ رابطه يِ بالا برابر ِ $a_{0\,0}$ است [1]. پس تا مرتبه يِ یک نسبت به δR،

$$a_{0\,0} = 0. \tag{20}$$

حالا می‌شود δU_1 و δU_2 را بر حسب ِ a_{lm} ها نوشت. با استفاده از

$$a_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega\;\delta R(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{21}$$

[1]، نتیجه می‌شود

$$\delta U_1 = \frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}|a_{lm}|^2, \tag{22}$$

و

$$\delta U_2 = -\frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{3}{2l+1}|a_{lm}|^2, \tag{23}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\delta U_G = \frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1-\frac{3}{2l+1}\right)|a_{lm}|^2. \tag{24}$$

دیده می‌شود همه ي این جمله‌ها مثبت اند، جز جمله‌ها ي $l = 1$، که صفر اند. پس اگر انرژی ي دیگر ي در کار نمی‌بود، کمینه ي پتانسیل متناظر با این بود که همه ي a_{lm} ها صفر باشند، جز a_{1m} ها. اما a_{1m} ها متناظر با انتقال ِ صلب ِ توده اند (تا مرتبه ي اول) که البته انرژی ي پتانسیل ِ گرانشی را عوض نمی‌کنند. اگر این شرط را می‌گذاشتیم که مرکزِجرم ِ توده در مبدئ باشد، a_{1m} ها صفر می‌شدند.

حالا به انرژی ي پتانسیل ِ مرکزگریز بپردازیم. در چارچوب ِ چرخان با سرعت ِ زاویه‌ای ي ω، باید یک نیرو ي مرکزگریز اضافه کنیم:

$$\mathbf{F}_{\rm cf} = m\,\omega^2\,\mathbf{s}, \tag{25}$$

[2]، که در آن $\mathbf{s}$ بردار ِ شعاع ِ استوانه‌ای است، که محور ِ آن محور ِ چرخش است. m هم جرم ِ ذره ای که این نیرو به آن وارد می‌شود. چون در چارچوب ی که هم‌راه ِ توده می‌چرخد خود ِ توده ساکن است، نیرو ي لختی ي دیگر ی لازم نیست [2]. از این‌جا برا ي ذره انرژی ي پتانسیل ِ مرکزگریز ِ

$$U_{\rm cf} = -\frac{m\,\omega^2\,s^2}{2} \tag{26}$$

نتیجه می‌شود، که در آن s فاصله تا محور ِ چرخش است:

$$s = r\,\sin\theta. \tag{27}$$

در این‌جا زاویه ي θ نسبت به محور ِ چرخش است. انرژی ي پتانسیل ِ مرکزگریز ِ توده ي چرخان می‌شود

$$\begin{aligned} U_{\rm cf} + \delta U_{\rm cf} &= -\frac{\rho_0\,\omega^2}{2}\int {\rm d}\Omega\ \sin^2\theta\int_0^{R+\delta R}{\rm d}r\ r^4,\\ &= -\frac{\rho_0\,\omega^2}{2}\int {\rm d}\Omega\ \sin^2\theta\left[\frac{R^5}{5}+R^4\,\delta R(\hat{\mathbf{r}})\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

در تساوی ي آخر فقط اولین جمله ي شامل ِ δR را نگه داشته ایم. با استفاده از

$$\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}, \tag{29}$$

و با استفاده از (19) (تا مرتبه ي یک نسبت به δR) نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\delta U_{\rm cf} \;&=\; \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3}\int \mathrm{d}\Omega\;\mathrm{P}_2(\cos\theta)\,\delta R(\hat{\mathbf{r}}),\\
&=\; \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,a_{2\,0}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

در این‌جا از این استفاده شده که

$$
\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\;\mathrm{Y}_{2\,0}(\hat{\mathbf{r}}),
\tag{31}
$$

[1]. به این ترتیب، تغییر ِ انرژی ِ پتانسیل ِ کل می‌شود

$$
\begin{aligned}
\delta U :=\; &\delta U_G + \delta U_{\rm cf},\\
=\; &\frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1-\frac{3}{2l+1}\right)|a_{lm}|^2 + \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,a_{2\,0}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

حالت ِ تعادل این انرژی‌ِپتانسیل را کمینه می‌کند (نسبت به a_{lm} ها). دیده می‌شود در این حالت a_{lm} ها همه صفر اند جز a_{1m} ها و $a_{2\,0}$. a_{1m} ها متناظر با انتقال اند و با گذاشتن ِ مرکزِجرم در مبدئ صفر می‌شوند. پس فقط $a_{2\,0}$ غیرِصفر می‌شود. چون δR حقیقی است، $a_{2\,0}$ هم حقیقی است. در نتیجه $a_{2\,0}$ این رابطه را بر می‌آورد.

$$
G\,M\,\rho_0\left(1-\frac{3}{5}\right)a_{2\,0} + \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}} = 0.
\tag{33}
$$

(این رابطه با مشتق‌گیری از δU نسبت به $a_{2\,0}$ به دست می‌آید.) به این ترتیب،

$$
a_{2\,0} = -\frac{5}{6}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,\frac{\omega^2\,R^4}{G\,M},
\tag{34}
$$

و از آن‌جا

$$
\begin{aligned}
\delta R(\hat{\mathbf{r}}) \;&=\; -\frac{5}{6}\,\frac{\omega^2\,R^4}{G\,M}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta),\\
&=\; -\frac{5}{6}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta),
\end{aligned}
\tag{35}
$$

که در آن g شتاب ِ گرانش در سطح ِ توده است.

2 پتانسیل ِ کل در سطح ِ توده ی ِ چرخان

پتانسیل ِ گرانشی در بیرون ِ کره ای به مرکز ِ مبدئ که توده را در بگیرد، از بسط ِ چندقطبی‌ها به دست می آید. از (16) با $r_> = r$ و $r_< = r'$ نتیجه می‌شود

$$\phi_G(\mathbf{r}) + \delta\phi_G(\mathbf{r}) = -4\pi\, G \sum_{l,m} \frac{q_{lm}}{2l+1}\, \frac{\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}}, \tag{36}$$

که در آن

$$q_{lm} := \int \mathrm{d}^3 r\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\, r^l\, \rho(\mathbf{r}). \tag{37}$$

q_{lm} ها چندقطبی‌ها ي ِ جرمی ي ِ توده اند. با توجه به $Y_{0\,0} = (4\pi)^{-1/2}$ نتیجه می‌شود

$$q_{0\,0} = \frac{M}{\sqrt{4\pi}}, \tag{38}$$

که مستقل از شکل ِ توده است. در مورد ِ بقیه ي ِ چندقطبی‌ها،

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^{l+2}, \\ &= \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \left(\frac{R^{l+3}}{l+3} + R^{l+2}\,\delta R \right), \\ &= \rho_0\, R^{l+2}\, a_{lm}, \qquad l \neq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

در تساوی ي ِ سوم فقط اولین جمله ي ِ شامل ِ δR در نظر گرفته شده، و در تساوی ي ِ آخر از این استفاده شده که انتگرال ِ Y_{lm} ها صفر است، مگر برا ي ِ $l = 0$. به این ترتیب، نتیجه می‌شود بیرون ِ کره ي ِ دربرگیرنده ي ِ توده،

$$\phi_G(\mathbf{r}) + \delta\phi_G(\mathbf{r}) = -\frac{G\,M}{r} - \frac{G\,M}{R^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{3a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}. \tag{40}$$

رو ي ِ سطح ِ توده، $r = R + \delta R$. شعاع ِ کوچک‌ترین کره ي ِ دربرگیرنده ي ِ توده $R + \max(\delta R)$ است. بنابراین تا مرتبه ي ِ یک نسبت به δR، مقدار ِ $\delta\phi_G$ رو ي ِ سطح ِ توده برابر است با جمله ي ِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (40) به ازا ي ِ $r = R$. خود ِ ϕ_G رو ي ِ سطح ِ توده هم تا مرتبه ي ِ یک نسبت به δR می‌شود

$$\begin{aligned} \phi_G &= -\frac{G\,M}{R+\delta R}, \\ &= -\frac{G\,M}{R} + \frac{G\,M}{R^2}\,\delta R, \end{aligned}$$

$$= -\frac{G\,M}{R} + \frac{G\,M}{R^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{41}$$

در این‌جا از این استفاده شده که $a_{0\,0}$ تا مرتبه‌ یِ اول نسبت به δR صفر است. به این ترتیب، پتانسیل ِ گرانشی رو یِ سطح ِ توده می‌شود

$$\phi_G + \delta\phi_G = -\frac{G\,M}{R} + \frac{G\,M}{R^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1 - \frac{3}{2l+1}\right) a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{42}$$

توجه کنید که $\delta\phi_G$ رو یِ سطح ِ توده دو بخش دارد. یک بخش ناشی از آن است که پتانسیل ِ گرانشی رو یِ سطح ِ کره حساب نمی‌شود، متناظر با ضریب ِ 1 در پرانتز. بخش ِ دیگر ناشی از این است که به خاطر ِ تغییرِشکل ِ توده، مقدار ِ پتانسیل در $r = R$ عوض شده است، متناظر با ضریب ِ $-3/(2l+1)$ در پرانتز. اگر این بخش ِ دوم را در نظر نمی‌گرفتیم، ضریب ِ جمله‌ها یِ $l = 2$ به جا یِ $2/5$ می‌شد 1.

پتانسیل ِ مرکزگریز، همان انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ مرکزگریز در (26) است، تقسیم بر m:

$$\phi_{\mathrm{cf}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\omega^2\,r^2\,\sin^2\theta. \tag{43}$$

رو یِ سطح ِ توده، $r = R + \delta R$. به این ترتیب، این کمیت رو یِ سطح ِ توده و در پایین‌ترین مرتبه می‌شود

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{cf}} &= -\frac{1}{2}\omega^2\,R^2\,\sin^2\theta,\\ &= -\frac{1}{3}\omega^2\,R^2 + \frac{1}{3}\omega^2\,R^2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta).\end{aligned} \tag{44}$$

پتانسیل ِ کل رو یِ سطح ِ توده، برابر است با جمع ِ این عبارت با پتانسیل ِ گرانشی رو یِ سطح ِ توده، (42):

$$\begin{aligned}\phi + \delta\phi &= -\frac{G\,M}{R} - \frac{1}{3}\omega^2\,R^2 + \frac{1}{3}\omega^2\,R^2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta)\\ &\quad + \frac{G\,M}{R^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1 - \frac{3}{2l+1}\right) a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}),\end{aligned} \tag{45}$$

که باید ثابت (مستقل از $\hat{\mathbf{r}}$) باشد. دوجمله یِ اول ِ طرف ِ راست ثابت اند. P_2 هم متناسب با $\mathrm{Y}_{2\,0}$ است. پس چون Y_{lm} ها خطی‌مستقل اند، همه یِ a_{lm} ها صفر اند جز $a_{2\,0}$، و

$$\left(1 - \frac{3}{5}\right)\frac{G\,M}{R^2}a_{2\,0}\,\mathrm{Y}_{2\,0}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{3}\omega^2\,R^2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta) = 0. \tag{46}$$

البته ضریب ِ a_{1m} ها صفر است و آن‌ها را نمی‌شود از این‌جا حساب کرد. اما مرکزِجرم ِ توده باید رو یِ محور ِ چرخش باشد، در غیر ِ این صورت یک نیرو یِ خارجی برا یِ چرخاندن ِ مرکزِجرم لازم است.

پس مبدئ را می‌شود خود ـِ مرکزِجرم گرفت، و در این صورت a_{1m} ها صفر می‌شوند. با محاسبه یِ a_{20} از (46)، به همان عبارت ـِ (35) می‌رسیم.

3 مقدار ـِ پخی یِ زمین

با توجه به (35) و با استفاده از (29)، δR در قطب‌ها ($\theta = 0$) می‌شود

$$\delta R_{\mathrm{p}} = -\frac{5}{6}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}, \tag{47}$$

و در استوا ($\theta = \pi/2$) می‌شود

$$\delta R_{\mathrm{e}} = \frac{5}{12}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}. \tag{48}$$

از این‌جا تفاضل ـِ شعاع در قطب‌ها و استوا می‌شود

$$\Delta R = \frac{5}{4}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}. \tag{49}$$

برا یِ زمین،

$$g \;=\; 9.8\;\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$R \;=\; 6.4\times 10^6\;\mathrm{m}, \tag{50}$$

[3]. ضمناً

$$\omega \;=\; \frac{2\pi}{T},$$

$$\;=\; 7.3\times 10^{-5}\;\mathrm{s}, \tag{51}$$

که در آن T دوره یِ چرخش ـِ زمین (24 ساعت) است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\Delta R = 28\;\mathrm{km}. \tag{52}$$

مقدار ـِ سنجیده‌شده یِ این کمیت 21 km است [3].

البته توجه داریم که زمین هم‌گن نیست: چگالی به طرف ـِ مرکز ـِ زمین زیاد می‌شود. بنابراین چگالی یی که برا یِ محاسبه یِ چندقطبی‌ها یِ گرانشی در (39) ظاهر می‌شود، کم‌تر از چگالی یِ متوسط (ρ_0) است. در واقع در حالت ـِ حدی یی که زمین مثل ـِ یک جرم ـِ نقطه‌ای باشد، همه یِ

چندقطبی‌ها صفر می‌شوند جز تک‌قطبی. پس برا یِ زمین ِ واقعی، نسبت ِ q_{lm} به a_{lm} کم‌تر از آن ی است که (39) می‌گوید. این یعنی در (41)، به جا یِ $3/(2l+1)$ باید گذاشت $3\alpha_l/(2l+1)$، که در آن α_l بین ِ صفر و یک است. بنابراین ضریب ِ a_{lm} در (45) بزرگ‌تر می‌شود، و خود ِ $a_{2\,0}$ ِ حالت ِ تعادل کم‌تر می‌شود. یعنی پخی یِ زمین واقعاً هم باید کم‌تر از مقدار ِ محاسبه‌شده برا یِ زمین ِ هم‌گن (28 km) باشد.

با یک مدل ِ ساده برا یِ چگالی یِ زمین، می‌شود مقدار ِ محاسبه‌شده برا یِ پخی یِ زمین را به‌تر کرد. فرض کنید چگالی یِ زمین به این شکل است.

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0\, f\left(\frac{r}{R+\delta R}\right), \tag{53}$$

که در آن f تابع یِ است که میان‌گین ِ حجمی یِ آن رو یِ زمین یک است. معنی یِ عبارت ِ بالا آن است که چگالی یِ یک نقطه درون ِ زمین، فقط به فاصله یِ آن نقطه تا مرکز ِ زمین تقسیم بر طول ِ شعاع ی از زمین که از آن نقطه می‌گذرد بسته‌گی دارد، یعنی سطح‌ها یِ هم‌چگالی متشابه اند. در این صورت (39) چنین اصلاح می‌شود.

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^{l+2}\, f\left(\frac{r}{R+\delta R}\right), \\ &= \alpha_l\, \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \left(\frac{R^{l+3}}{l+3} + R^{l+2}\,\delta R\right), \\ &= \alpha_l\, \rho_0\, R^{l+2}\, a_{lm}, \qquad l \neq 0, \end{aligned} \tag{54}$$

که در آن

$$\alpha_l := \frac{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\ x^{l+2}\, f(x)}{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\ x^{l+2}}. \tag{55}$$

از این که میان‌گین ِ f رو یِ کل ِ توده یک است، نتیجه می‌شود α_0 یک است. ضمناً دیده می‌شود اگر f نزولی باشد (که در مورد ِ زمین چنین است) بقیه یِ α_l ها کوچک‌تر از یک اند. در این‌جا هدف محاسبه یِ α_2 است. این کمیت را می‌شود از رو یِ لختی یِ چرخشی یِ زمین حول ِ محور ِ چرخش َ ش به دست آورد:

$$\begin{aligned} I &= \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \sin^2\theta \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^4\, f\left(\frac{r}{R+\delta R}\right), \\ &= \alpha_2\, \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \sin^2\theta \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^4, \end{aligned}$$

$$= \alpha_2 \, I_0, \tag{56}$$

که در آن I لختی یِ چرخشی یِ توده حول ِ محور ِ چرخش ِ آن است، و I_0 لختی یِ چرخشی یِ توده ای با همان شکل و اندازه و جرم اما با چگالی یِ یک‌نواخت، حول ِ همان محور. برا یِ زمین،

$$I = 8.1 \times 10^{37} \ \mathrm{kg\, m^2}, \tag{57}$$

[3]. اما لختی یِ چرخشی یِ یک کره یِ یک‌نواخت حول ِ یک قطر َش

$$I_0 = \frac{2}{5} \, M \, R^2 \tag{58}$$

است. برا یِ زمین، با توجه به

$$M = 6.0 \times 10^{24} \ \mathrm{kg}, \tag{59}$$

[3]، نتیجه می‌شود

$$I_0 = 9.8 \times 10^{37} \ \mathrm{kg\, m^2}, \tag{60}$$

و از این‌جا

$$\begin{aligned} \alpha_2 \; &= \; \frac{I}{I_0}, \\ &= \; 0.83. \end{aligned} \tag{61}$$

پس شکل ِ اصلاح‌شده یِ (46) می‌شود

$$\left(1 - 0.83 \times \frac{3}{5}\right) \frac{G\, M}{R^2} a_{2\,0} \, \mathrm{Y}_{2\,0}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{3} \omega^2 \, R^2 \, \mathrm{P}_2(\cos\theta) = 0, \tag{62}$$

و از این‌جا

$$\begin{aligned} \Delta R \; &= \; \frac{1 - (3/5)}{1 - (0.83 \times 3/5)}, \\ &= \; 0.80 \times \frac{5}{4} \, \frac{\omega^2 \, R^2}{g}, \\ &= \; 22 \ \mathrm{km}. \end{aligned} \tag{63}$$

با توجه به مدل ِ ساده ای که به کار رفت، توافق با مقدار ِ تجربی ي 21 km بسیار خوب است. در شکل ِ ساده ي این محاسبه، از فقط سه کمیت ِ g، R، و ω استفاده شد و مقدار ِ 28 km به دست آمد. با استفاده از فقط یک کمیت ِ اضافی ي I عدد ِ 22 km به دست آمد. (جرم ِ زمین را می‌شود از رو ي g، R، و G به دست آورد.) بد نیست توجه کنید که خود ِ خطِ‌استوا هم دایره نیست و تفاضل ِ طول ِ نیم‌قطرها ي کوچک و بزرگ َش حدود ِ 200 m است [3].

4 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 3

[2] Herbert Goldstein; "Classical mechanics", 2nd edition (Addison - Wesley, 1980) chapter 4

[3] "CRC handbook of chemistry and physics", 80th edition (The Chemical Rubber Company, 1999) 14-6

معادله ی ِ سطح ِ زمین، تقریباً به شکل ِ زیر است (z محور ِ قطبی ی ِ زمین است).

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-f)^2} = R_\oplus^2.$$

$$\frac{1}{f} = 298.257\,223\,563 \qquad R_\oplus = 6\,378\,137\,\mathrm{m} \qquad \text{(WGS84)}$$

Oliver Montenbruck, Eberhard Gill: *Satellite Orbits - Models, Methods, Applications*; Springer, Berlin, 2000, pp. 187–189.

WGS84 := World Geodetic System 1984