گاما، شماره ی ۱، زمستان ۱۳۸۲

یادداشت ی بر ناورداهای بی‌دررو

امیرحسینِ فتح‌اللهی

در این مقاله پس از یادآوری صورتِ قضیه‌ی ناورداهای بی‌دررو، برای به‌ترفهمیدنِ این قضیه مثال‌ها یی ارائه می‌شود.

1 مقدمه

روش‌های اختلالی، در حلِ مسائلِ فیزیک نقشِ بسیارمهم ی دارند. علتِ این موضوع آن است که نسبتِ تعدادِ مسئله‌ها یی که بتوان آنها را دقیق حل کرد به کلِ مسئله‌ها، کسرِ بسیار کوچک ی است (در واقع صفر است!). اما تصادفاً — یا شاید از بختِ خوب— از مکانیکِ سماوی گرفته تا مکانیکِ اتمی و زیراتمی، خیل ی از مسئله‌های مفید یک انحرافِ کوچک از یک مسئله‌ی دقیقاًحل‌پذیر اند. درست همین جا است که اهمیتِ روش‌های اختلالی معلوم می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم مرور ی بر یک ی از قضیه‌های مشهور در روش‌های اختلالی کنیم: قضیه‌ی ناورداهای بی‌دررو.

یک سیستمِ دینامیکی را در نظر بگیرید که یک درجه‌ی آزادی دارد و حرکتِ آن دوره‌ای است. فرض می‌کنیم انرژیِ این سیستم پایسته است. مکانِ متناظر با این درجه‌ی آزادی را با q، و تکانه‌ی نظیرِ آن را با p نشان می‌دهیم؛ متغیرهای کانونیک می‌شوند (q,p). برای این سیستم متغیرِ کنش را به صورتِ

$$J := \oint p\,\mathrm{d}q, \tag{1}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن انتگرال‌گیری روی یک دوره‌ی کامل است. این یعنی J عبارت است از مساحتِ ناحیه‌ی محدود به مسیرِ حرکت در فضای فاز. روشن است که در یک حرکتِ دوره‌ای با انرژیِ پایسته، J یک ثابتِ حرکت است. مثلاً J را برای نوسان‌گرِ هم‌آهنگ حساب می‌کنیم. از همیلتونیِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = E \ (\text{انرژی}) \tag{2}$$

به دست می‌آید

$$p = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2}, \qquad -\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \leq q \leq \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}. \tag{3}$$

توجه می‌کنیم که خمِ p بر حسبِ q یک بیضی است. از این‌جا به‌ساده‌گی می‌توان J را حساب کرد:

$$J = \oint p\, dq = 2\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}} \sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2}\, dq = \frac{2\pi E}{\omega_0}, \tag{4}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود مقدارِ J ــ که مساحتِ بیضی استــ مانندِ انرژی پایسته است.

حال سیستم ی را در نظر بگیرید که با یک پارامتر مثلِ a مشخص می‌شود؛ به‌طور ی که اگر a ثابت باشد (یعنی مشتقِ زمانیِ a صفر باشد) این سیستم حرکت دوره‌ای و انرژیِ پایسته دارد. روشن است که اگر a ثابت باشد، J نیز ثابت می‌ماند. پرسشِ جالب این است که اگر a ثابت نباشد، ولی به کُندی و پیوسته‌گی تغییر کند، در موردِ این سیستم چه می‌توان گفت. در این‌جا قضیه‌ی ناورداهای بی‌دررو وارد می‌شود، که می‌گوید

قضیه: برای سیستم ی که اگر پارامترِ a ثابت باشد پایستار و دوره‌ای است، میان‌گینِ مشتقِ زمانیِ J (یعنی $\overline{\dot{J}}$) جمله‌ی شاملِ توانِ اولِ $\dot{a}$ ندارد، یعنی اولین‌جمله‌های غیرِصفرِ آن از نوعِ توانِ اولِ $\ddot{a}$ یا توانِ دومِ $\dot{a}$ اند.

به عبارتِ دیگر، از آن‌جا که داریم $J(t=T) = J(0) + \overline{\dot{J}} \cdot T$، اگر تغییراتِ a پیوسته و به قدری کُند باشد که بتوان از $\ddot{a}$ و توانِ دومِ $\dot{a}$ چشم پوشید، مقدارِ J در پایانِ دوره همان مقدارِ J در آغازِ دوره است. البته توجه داریم که حرکتِ جدید دیگر دوره‌ای نیست. منظور از $J(t_0)$ این است که $q(t_0)$ و $p(t_0)$ را به عنوانِ شرطِ اولیه برای تحولِ سیستم ی با همیلتنیِ H_0 در نظر بگیریم. H_0 یعنی همیلتنیِ مستقل‌اززمان ی که در آن به‌جای $a(t)$ گذاشته ایم $a(t_0)$. سپس مقدارِ $J(t_0)$ را با این همیلتنی و شرطِ اولیه حساب کنیم. ضمناً منظور از پایانِ دوره‌ی حرکت هم پایانِ دوره‌ای است که با همین شرطِاولیه و همیلتنیِ‌مستقل‌اززمان به دست می‌آید. در واقع اگر تغییرِ a کند و پیوسته باشد، حرکت تقریباً دوره‌ای است.

اثباتِ قضیه‌ی ناورداهایِ بی‌دررو در حالتِ کلی، با استفاده از متغیرهای کنش‌ــ زاویه و تبدیلِ کانونیکِ بینِ مختصه‌های اولیه و مختصه‌های کنش‌ــ زاویه انجام می‌شود [1]. در این یادداشت می‌خواهیم درستیِ این قضیه را در دو مثال و با محاسبات صریح نشان دهیم.

2 نوسان‌گرِ هم‌آهنگ

مثال‌های متعدد ی از سیستم‌های با حرکتِ نوسانی هم‌آهنگ می‌شناسیم: جرم‌وفنر، آونگِ کم‌دامنه، و ... هر یک از این سیستم‌ها یک بس‌آمدِ مشخصه، و چیز ی شبیه به جرم دارند، که از روی پارامترهای سیستم تعیین می‌شوند. همیلتنیِ چنین‌سیستم‌ها یی به این شکل است.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{5}$$

(توجه داریم که بعدِ m لزوماً بعدِ جرمِ معمولی نیست، اما بعدِ ω همیشه عکسِ بعدِ زمان است.) تغییرِ این پارامترها به تغییرِ بس‌آمدِ مشخصه و جرم منجر می‌شود. مثلاً در سیستمِ جرم‌وفنر، تغییرِ جرم یا ضریبِ‌سختیِ فنر باعثِ تغییرِ بس‌آمدِ مشخصه می‌شود. در موردِ آونگ هم تغییرِ طولِ آونگ باعثِ تغییرِ بس‌آمدِ مشخصه و پارامترِ شبهِ‌جرمِ سیستم می‌شود [۲]. به این‌ترتیب، همیلتنیِ سیستمِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ ی با پارامترهای متغیر را می‌شود چنین نوشت.

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2 = E(t). \tag{6}$$

قبلاً رابطه‌ی J با E و ω به ازای پارامترهای ثابت را دیدیم، (4). می‌خواهیم نشان دهیم میان‌گینِ $J = 2\pi E(t)/\omega(t)$، تا مرتبه‌ی یک از $\dot\omega$ و $\dot m$ و با چشم‌پوشی از مشتق‌های بعدیِ ω و m ثابت می‌ماند. داریم

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(t)}{\partial t}, \tag{7}$$

و از آن‌جا

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = m\omega\dot\omega q^2 + \frac{\dot m}{2}\left(\omega^2 q^2 - \frac{p^2}{m^2}\right). \tag{8}$$

(برای به‌دست‌آوردنِ این رابطه، ضمناً می‌شود مستقیماً از E مشتق گرفت و با استفاده از معادله‌ی حرکت جمله‌های اضافی را حذف کرد.) سرانجام نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 2\pi\left(\frac{\dot m}{m\omega} + \frac{\dot\omega}{\omega^2}\right)\left(\frac{m\omega^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{2m}\right). \tag{9}$$

حالا تغییرِ J طیِ یک دوره ($T = 2\pi/\omega$) را حساب می‌کنیم. برای این کار باید از عبارتِ بالا انتگرال بگیریم. با چشم‌پوشی از مشتق‌های دوم‌به‌بالای پارامترها، و توان‌های بیش‌از‌یکِ مشتقِ اول پارامترها، می‌شود دوره‌ی حرکت و بسته‌گیِ زمانی q و p را مثلِ حرکتِ نوسانیِ با پارامترهای ثابت، و نیز $\dot m$ و $\dot\omega$ را ثابت گرفت (همه‌ی این‌ها برای یک دوره‌ی حرکت). مثلاً دامنه‌ی حرکت را q_0 می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\int_0^T q^2(t)\mathrm{d}t = \frac{q_0^2}{4\pi\omega}$$
$$\int_0^T p^2(t)\mathrm{d}t = \frac{m^2\omega^2 q_0^2}{4\pi\omega}, \tag{10}$$

که از آن معلوم می‌شود انتگرالِ عاملِ دومِ طرفِ راستِ (9) صفر است، یعنی

$$J(T) = J(0). \tag{11}$$

3 ذره‌ی آزاد بینِ دو دیوار

سیستم ی شاملِ دو دیوار با جرمِ بی‌نهایت را در نظر بگیرید، که ذره ای به جرمِ m بینِشان رفت‌وآمد می‌کند. ذره آزاد است و فقط هر بار که به یک دیوار می‌رسد، به طورِ کش‌سان با آن برخورد می‌کند. اگر دیوارها ساکن و در فاصله‌ی L از هم باشند، حرکتِ ذره دوره‌ای و با دوره‌ی $T = 2L/v$ است، که در آن v سرعتِ ذره است. برای به‌دست‌آوردنِ J، تکانه را بر حسبِ مکان رسم می‌کنیم؛ یک مستطیل به دست می‌آید که مساحتِ آن J است:

$$J = \oint p\,\mathrm{d}q = 2mvL. \tag{12}$$

با یادآوریِ این که انرژیِ ذره $E = mv^2/2$ است، نتیجه می‌شود

$$J = \frac{2E}{\nu}, \tag{13}$$

که در آن $\nu := 1/T$. حالا فرض کنید دیوارها به‌آرامی حرکت کنند. مثلاً فرض کنید یک ی از دیوارها با سرعتِ کمِ u حرکت می‌کند، چنان که $v \gg u$. با حرکتِ دیوار، حرکت دیگر دوره‌ای نیست، گرچه انتظار می‌رود اگر u کم باشد حرکت تقریباً دوره‌ای بماند.

برای محاسبه‌ی تغییراتِ J، فرض کنید ذره در زمانِ 0 با سرعتِ $v(0)$ از دیوارِ ساکن جدا شود. داریم

$$J(0) = 2mv(0)L(0), \tag{14}$$

که در آن $L(0)$ فاصله‌ی دو دیوار در $t = 0$ است. وقت ی ذره از دیوارِ متحرک وا می‌جهد، سرعتِ آن می‌شود

$$v = v(0) - 2u. \tag{15}$$

یک راهِ ساده‌ی دیدنِ این نتیجه آن است که به چارچوب ی برویم که با سرعتِ u حرکت می‌کند. سرعتِ ذره، از این پس تا پایانِ دوره‌ی حرکت ثابت می‌ماند. اما در پایانِ دوره‌ی حرکت، فاصله‌ی دودیوار

$$L(T) = L(0) + Tu = L(0)\left(1 + \frac{2u}{v(0)}\right) \qquad (16)$$

است، که در آن از مشتق‌های u (یعنی مشتق‌های دوم‌به‌بالای فاصله‌ی دیوارها) چشم‌پوشی شده، و تا مرتبه‌ی یک نسبت به u، می‌شود به جای T هم $T(0)$ گذاشت. به این ترتیب، از (12)، (15)، و (16) دیده می‌شود تا مرتبه‌ی یک نسبت به سرعتِ دیوار و با چشم‌پوشی از مشتق‌های بالاترِ فاصله‌ی دیوارها،

$$J(T) = J(0). \qquad (17)$$

4 کندبودنِ تغییرِپارامتر

حرکتِ دوره‌ایِ سیستم یک بس‌آمد دارد. تابعِ پارامترهای متغیر بر حسبِ زمان هم شاملِ بس‌آمدها یی است. کندبودنِ تغییرِ پارامترها یعنی این بس‌آمدها خیل ی کوچک‌تر از بس‌آمدهای حرکتِ دوره‌ایِ سیستم باشند؛ به‌ویژه، تغییرِپارامتر و حرکتِ دوره‌ایِ سیستم هم‌بسته نباشند [3]، یعنی بس‌آمدِ مشترک نداشته باشند. اگر چنین باشد، ممکن است تغییرِپارامتر مثلِ یک عاملِ تشدیدزا رفتار کند و در این صورت حکمِ قضیه برقرار نخواهد بود. در مثالِ آونگ، اگر تغییرِطولِ نخ مثلاً در انتهایِ هر رفت‌وبرگشت (بیشینه‌ی دامنه) انجام شود، بس‌آمدِ این تغییر با بس‌آمد سیستم هم‌خوانی دارد و می‌توان دید که دیگر J ثابت نمی‌ماند. در مثالِ دیوار هم، اگر دیوارِ متحرک فقط وقت ی حرکت کند که ذره از آن دور باشد، سرعتِ ذره عوض نمی‌شود، چون برخوردِ آن همیشه با دیوارِ ساکن است، اما L عوض می‌شود. پس J هم عوض می‌شود. در این‌جا هم بس‌آمدِ حرکتِ دوره‌ایِ سیستم، در تابعِ تغییرِپارامتر هم وجود دارد.

قدردانی: نویسنده از توضیحاتِ خرمی و شریعتی تشکر می‌کند.

5 یادداشت‌ها و مرجع‌ها

[1] H. Goldstein; "Classical mechanics", 2nd edition (Addison-Wesley, 1980) section 11-7

[۲] متغیرِ دینامیکیِ سیستمِ آونگ (در صفحه) زاویه‌ی ریسمان نسبت به نقطه‌ی آویز است. همیلتنیِ آونگِ کم‌دامنه می‌شود

$H = (2ml^2)^{-1}p_\theta^2 + (mgl/2)\theta^2$

که m جرمِ وزنه، l طولِ ریسمان، و g شتابِ گرانش است. با مقایسه با همیلتنیِ (5)، معلوم می‌شود پارامترِ شبهِ‌جرم ml^2، و بس‌آمد $(g/l)^{1/2}$ است. بنابراین تغییرِ طولِ ریسمان، هم بس‌آمد را عوض می‌کند هم پارامترِ شبهِ‌جرم را.

[3] V. I. Arnold; "Mathematical methods of classical mechanics", (Springer Verlag, 1978) section 52

حدود ـِ اوایل ـِ قرن ـِ بیستم دو دانش‌پیشه، یک ی در آمریکا و یک ی در فرانسه، روی ـِ دو موضوع کار می‌کردند که حتّا اگر از کار ـِ هم خبر هم داشتند به نظر ـِ شان کاملاً بی‌ربط می‌آمد. در نیو هِوِن ویلارد گیبس [1] داشت نگرش ـِ خود اَش از مکانیک ـِ آماری را بار می‌آورد. در پاریس، هنری لُبِگ [2]، با کشف ـِ یک روش ـِ نوسروده و توان‌مندتر ـِ نظریّه ی ـِ انتگرال‌گیری برا ی ـِ کاربرد در مطالعه ی ـِ سری‌ها ی ـِ مثلّثاتی، داشت با شهرت ـِ استاد ـَ ش اِمیل بُرِل [3] رقابت می‌کرد. این دو کاشف در این مشترک بودند که هر دو اهل ـِ مطالعه بودند، نه آزمایش‌گاه؛ امّا به‌جز این، نگرش ـِ شان به علم کاملاً فرق داشت.

گیبس، با آن که ریاضی‌پیشه بود، همواره ریاضیات را خدمت‌گزار ـِ فیزیک می‌دانست. لُبِگ، یک آنالیزپیشه بود؛ از خالص‌ترین نوع اَش؛ نماینده ای بسیار توانا از استانداردها ی ـِ بسیار موشکافانه ی ـِ دقّت ـِ مدرن ـِ ریاضی؛ نویسنده ای که در کارها یش، تا جا یی که من می‌دانم، حتّا یک مثال از مسئله یا روش ی که مستقیماً از فیزیک سرچشمه گرفته باشد نیست. با این حال کار ـِ این دو نفر یک کلّ ـِ واحد را شکل داد. پاسخ ـِ پرسش‌ها یی که گیبس پرسیده بود نه از کار ـِ خود ـِ گیبس، که از کار ـِ لُبِگ در آمد.

Norbert Wiener, *Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine*; 2^{ed} ed., MIT Press, Cambridge, 1965, p. 45.

[1] Josiah Willard Gibbs (1839–1903), [2] Henri Léon Lebesgue (1875–1941), [3] Emile Borel (1871–1946)