هندسه‌یِ سطوحِ هم‌پتانسیلِ بارهایِ نقطه‌ای

شبنم خلیقی منفرد shabdar900@yahoo.com

سپیده نسایی sepideh_nesaaei@yahoo.com

امیر آقامحمدی

هندسه‌یِ سطوحِ هم‌پتانسیل برایِ توزیع‌هایِ مختلفی از بارهایِ نقطه‌ای بررسی می‌شود. برایِ اشکالِ منتظم علاوه بر مرکزِ جسم نقاطِ دیگری هم هستند که میدانِ الکتریکی در آن نقاط صفر است. با تغییرِ پیوسته‌یِ شکلِ توزیعِ بار و یا اندازه‌یِ بارها سطوحِ هم‌پتانسیل به طورِ پیوسته تغییر می‌کنند، تا جایی که ناگهان دو یا تعدادِ زوجی از نقاطِ تعادل هم‌زمان از مجموعه‌یِ نقاطِ تعادل حذف می‌شوند.

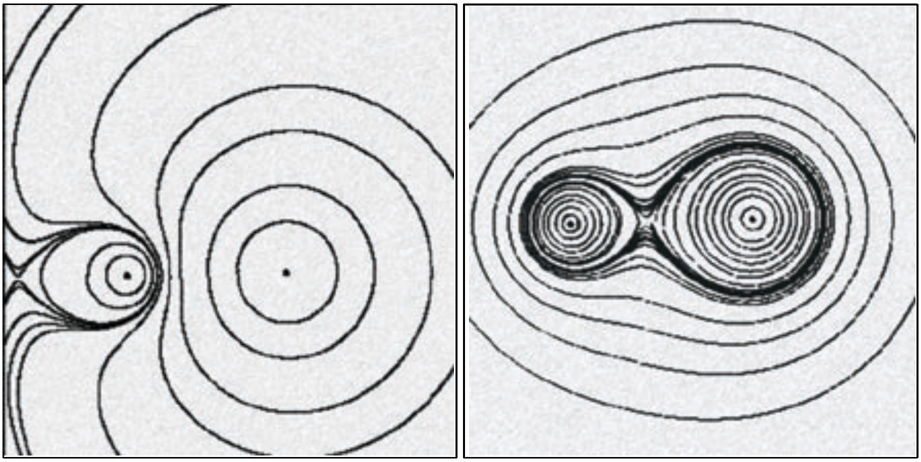
یکی از مباحثی که در دوره‌هایِ مقدماتیِ فیزیک تدریس می‌شود، فیزیکِ الکتریسیته است. از مهم‌ترین مفاهیمی که در این درس ارائه می‌شود، میدان و سطوحِ هم‌پتانسیل است. در تمامِ کتاب‌هایِ مقدماتیِ فیزیکِ الکتریسیته حتماً بخشی به معرفیِ خطوطِ میدان و سطوحِ هم‌پتانسیل اختصاص داده شده است. اما به نظر می‌رسد به جز موردِ بدیهیِ تک‌بارِ الکتریکی تصویری دقیق از سطوحِ هم‌پتانسیل به دانشجو منتقل نمی‌شود. مثلاً حتی در موردِ دو بارِ الکتریکی هم پیچیدگی‌هایی وجود دارد که به آن‌ها خواهیم پرداخت.

در حالتی که تنها یک بار الکتریکی q_1 را در نظر می‌گیریم، سطوحِ هم‌پتانسیل کره‌هایی به مرکز آن بار و خطوطِ میدانِ الکتریکی نیز شعاع‌هایِ آن کره‌ها هستند. حال اگر بارِ دیگری مثلِ q_2 را نیز در نزدیکیِ بارِ اول بگذاریم سطوح هم‌پتانسیل و خطوطِ میدانِ الکتریکی تغییرِ شکل می‌دهند. به شکلِ ۱ دقت کنید.

چند سئوال می‌توان مطرح کرد:

۱) بنا به تعریف میدانِ الکتریکی در هر نقطه بر سطحِ هم‌پتانسیلی که از آن نقطه می‌گذرد، عمود است. بنابر این اگر دو سطحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را قطع کنند، آن وقت تکلیفِ جهتِ میدانِ الکتریکی در آن نقطه چه می‌شود؟ میدان بر کدام‌یک از سطوح عمود است؟

۲) در نزدیکیِ نقطه‌یِ A که این سطوح هم‌دیگر را قطع می‌کنند، هندسه‌یِ سطوحِ هم‌پتانسیل چه می‌شود؟ یک صفحه که از دو بار می‌گذرد، را در نظر بگیرید. سطحِ مقطعِ این صفحه و سطوحِ هم‌پتانسیل دو خم است. شکلِ ۲ را ببینید. این دو خم با چه زاویه‌ای هم‌دیگر را قطع می‌کنند؟

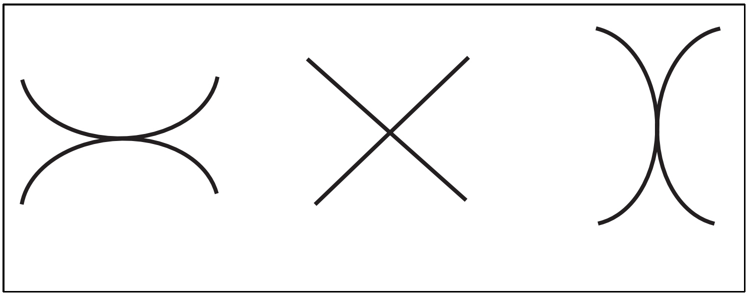


شکل ۱: شکلِ سمتِ راست سطوحِ هم‌پتانسیلِ دو بارِ هم‌نام و شکلِ سمتِ چپ سطوحِ هم‌پتانسیلِ دو بارِ غیرِهم‌نام است

این زاویه به چه چیزهایی بستگی دارد؟ با تغییرِ اندازه‌ی بارها آیا نقطه‌ی A جابه‌جا می‌شود؟ و یا اندازه‌ی زاویه‌ی بینِ دو خم تغییر می‌کند؟

دو بارِ q_1 و q_2 هم‌نام را در نظر بگیرید. در نزدیکیِ بارِ q_1 سطوحِ هم‌پتانسیل تقریباً کره‌هایی به مرکزِ بارِ q_1 هستند. در واقع، در نزدیکیِ q_1 میدانِ الکتریکیِ ناشی از بارِ q_1 غالب است و میدانِ ناشی از q_2 اهمیتی ندارد. اما هر چه از بارِ q_1 دور می‌شویم، کره‌هایِ هم‌پتانسیل تغییرِ شکل می‌دهند. همین مطلب در موردِ سطوحِ هم‌پتانسیلِ ناشی از بارِ q_2 هم درست است. در حالی که دو بارِ هم‌نام هم‌دیگر را دفع می‌کنند، چنان که در شکلِ ۱ می‌بینیم سطوح هم‌پتانسیل تغییرشکل می‌دهند، و این تغییرشکل تا جایی ادامه پیدا می‌کند که سطوحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را قطع کنند. مشکلِ جهتِ میدانِ الکتریکی در محلِ تقاطع به این شکل حل می‌شود که میدان در آن نقطه صفر است و بنا بر این جهتِ آن هیچ اهمیتی ندارد. در واقع سطوحِ هم‌پتانسیل تنها در نقاطی که میدان صفر است می‌توانند هم‌دیگر را قطع کنند. اما برایِ دو بارِ هم‌نام، جایی که میدان صفر است به بارِ کوچک‌تر نزدیک‌تر است. در موردِ دو بارِ غیرِ هم‌نام، در صورتی که اندازه‌ی بارها مساوی نباشد در نقطه‌ای رویِ خطِ واصلِ دو بار و در خارجِ ناحیه‌ی بینِ دو بار و در نزدیکیِ بارِ کوچک‌تر میدان صفر می‌شود. در این حالت سطوحِ هم‌پتانسیل به صورتِ قسمتِ چپِ شکلِ ۱ در می‌آیند.

حالا می‌خواهیم به سئوالِ دوم به پردازیم. چنان که نشان خواهیم داد اگر چه محلِ میدانِ صفر به اندازه‌ی بارها بستگی دارد، زاویه‌ی بینِ دو سطح مستقل از اندازه و حتی فاصله و علامتِ بارها است.



شکل ۲: کدام یک از این شکل‌ها سطحِ مقطعی از سطوحِ هم‌پتانسیل را، در نقطه‌ای که هم دیگر را قطع می‌کنند، نشان می‌دهد؟

می دانیم که

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi. \tag{1}$$

با انتخاب نقطه‌ي تقاطعِ A به عنوانِ مبدا مختصات داریم:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,|_A = \frac{\partial\Phi}{\partial y}|_A = \frac{\partial\Phi}{\partial z}|_A = 0. \tag{2}$$

اما علاوه بر این، به جز در محلِ بارها در بقیه‌ي نقاط Φ در معادله‌ي لاپلاس صدق می‌کند.

$$\nabla^2\,\Phi = 0. \tag{3}$$

محورِ z را در راستاي خطِ واصلِ دو بار می‌گیریم، و Φ را حولِ نقطه‌ي A بسط می‌دهیم.

$$\Phi(x,y,z) = \Phi_0 + ax + by + cz + dx^2 + ey^2 + fz^2 + gxy + hxz + kyz + \cdots \tag{4}$$

در معادله‌ي فوق این شرط که همه‌ي مولفه‌هاي میدان در نقطه‌ي A صفر هستند، (مثلاً $E_x|_{x=0} = (\partial\Phi/\partial x)|_{x=0} = 0$) منجر به رابطه‌ي زیر می‌شود.

$$a = b = c = 0. \tag{5}$$

اما تقارنِ مسئله روي ضرایبِ معادله‌ي (4) قیدهاي دیگری هم می‌گذارد. مثلاً با استفاده از تقارنِ مسئله نسبت به صفحه‌ي yz (یعنی تحتِ تبدیلِ $x \to -x$)، داریم،

$$\Phi(x,y,z) = \Phi(-x,y,z) \quad \Longrightarrow \quad g = h = 0. \tag{6}$$

و از تقارنِ نسبت به صفحه‌یِ xz (یعنی تحتِ تبدیلِ$y \to -y$)،می‌توان نتیجه گرفت که $k = 0$. تقارنِ دیگری که باقی مانده است، تقارنِ دوران سمتی است. دو نقطه رویِ محورهایِ x و y که از محورِ z با فاصله‌یِ یک‌سانِ u هستند پتانسیلِ یک‌سانی دارند.

$$\Phi(u,0,z) = \Phi(0,u,z) \quad \Longrightarrow \quad d = e. \tag{7}$$

بنا بر این Φ در نزدیکیِ نقطه‌یِ A، عبارت است از

$$\Phi(x,y,z) \approx \Phi_0 + d(x^2+y^2) + fz^2. \tag{8}$$

اما Φ باید در معادله‌یِ لاپلاس نیز صدق کند. با جای‌گذاریِ مقدارِ فوق برایِ Φ در معادله‌یِ لاپلاس $f = -2d$ می‌شود. پتانسیل در نقطه‌یِ A همان Φ_0 است. سطوحِ هم‌پتانسیلی که هم‌دیگر را در A قطع میکنند نیز پتانسیلِ‌شان Φ_0 است. بنا بر این برایِ چنین رویه‌ای $\Phi(x,y,z) = \Phi_0$ و معادله‌یِ رویه عبارت است از:

$$(x^2+y^2) = 2z^2. \tag{9}$$

این رویه معرفِ مخروطی با زاویه‌یِ نیم‌رأسِ θ

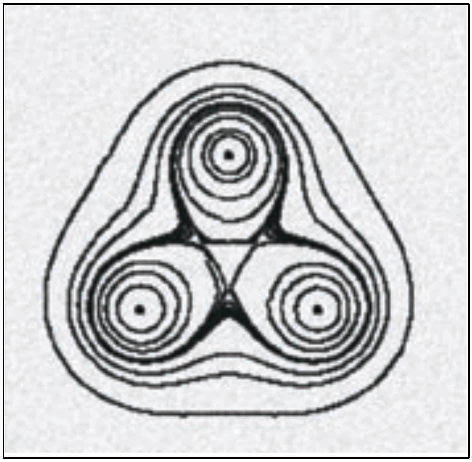
$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{2}) \simeq 54.7^\circ \tag{10}$$

است.

در استدلالی که برایِ به دست آوردنِ زاویه‌یِ θ انجام شد نه از علامتِ بارها و نه از اندازه‌یِ آن‌ها استفاده‌ای نشد. نتیجه‌یِ به دست آمده کلی است. به طورِ خلاصه سطوحِ هم‌پتانسیلی که هم‌دیگر را قطع می‌کنند، در نزدیکیِ نقطه‌یِ تقاطع به صورتِ مخروطی با زاویه‌یِ نیم‌رأسِ $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{2})$ در می‌آیند.

حالا به جایِ دو بار، می‌خواهیم حالتِ سه بارِ الکتریکی را بررسی کنیم. ابتدا سه بار مشابه که روی رئوسِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع قرار گرفته‌اند را در نظر می‌گیریم. هم‌چنان در نزدیکیِ این سه بار سطوحِ هم‌پتانسیل تقریباً کروی هستند. از تقارنِ مسئله پیداست که در مرکزِ مثلث میدانِ الکتریکی صفر است. اما چنان که در شکلِ ۳ می‌بینیم سطوحِ هم‌پتانسیل هم‌دیگر را در سه نقطه‌یِ دیگر هم قطع می‌کنند.

این مطلب به سادگی قابلِ درک است. پتانسیل درمحلِ هر یک از بارها بی‌نهایت است. اگر در امتدادِ یکی از میانه‌ها، که آن را محورِ y می‌گیریم، از یکی از بارها دور شویم اندازه‌یِ پتانسیل در فواصلِ دور به مقدارِ صفر میل می‌کند. در محلِ تقاطعِ میانه‌ها $E_y = \partial\Phi/\partial y = 0$، یعنی ϕ به عنوانِ تابعی از y کمینه است. بنا بر این برایِ آن که در فواصلِ دور پتانسیل صفر شود باید رویِ محورِ y نقطه‌یِ دیگری



شکل ۳: سطوحِ هم‌پتانسیلِ ناشی از سه بارِ یک‌سان که روی رئوسِ یک مثلثِ متساوی الاضلاع هستند.

هم باشد که ϕ در آن نقطه به عنوانِ تابعی از y بیشینه شود. شکلِ ۴ را ببینید. در این نقطه هم میدانِ الکتریکی صفر است. البته Φ چون جوابی از معادله‌ي لاپلاس است به عنوانِ تابعی از x، y و z، در هیچ نقطه‌ای به جز محلِ بارها، نمی‌تواند بیشینه و یا کمینه باشد.

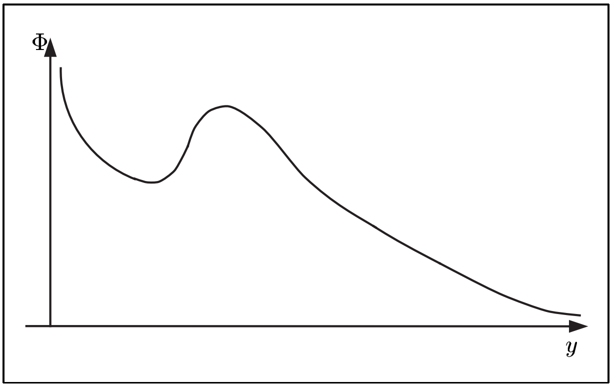
همین استدلال را برایِ دو میانه‌ي دیگر هم می‌توان تکرار کرد. بنا به تقارن دو نقطه‌ي دیگر رویِ دو میانه‌ي دیگر هم هستند که در آن نقاط میدانِ الکتریکی صفر است. بنا بر این برای حالتی که سه بار مشابه روی رئوسِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع قرار گرفته‌اند، میدانِ الکتریکی علاوه بر محلِ تقاطعِ میانه‌ها در سه نقطه‌ي دیگر هم صفر است. در مرجعِ [1] نشان داده شده است که برایِ یک n ـ ضلعيِ منتظم، حداقل $n+1$ نقطه‌ي با میدانِ صفر وجود دارد.

می‌توان با محاسبه‌ي کمی هم محلِ نقاطِ تعادل را به دست آورد. با استفاده از تقارنِ مسئله بدیهی است که مؤلفه‌ی x میدانِ الکتریکی رویِ میانه که همان محورِ y است، صفر است. از صفر قرار دادنِ E_y به رابطه‌ي زیر می‌رسیم

$$\frac{2(h-y)}{[a^2/4+(h-y)^2]^{3/2}} = \frac{1}{y^2}, \tag{11}$$

که a طولِ ضلعِ مثلث و h طولِ میانه است. با حلِ عدديِ این معادله دو جواب رویِ میانه به دست می‌آید، که یکی از آن‌ها همان محلِ تقاطعِ میانه‌ها است.

$$y_1 \approx 0.577a, \quad y_2 \approx 0.742a. \tag{12}$$

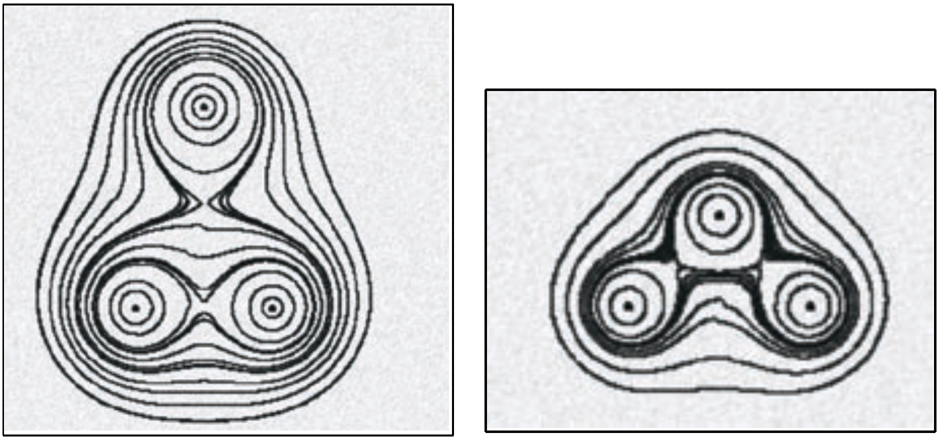


شکل ۴: پتانسیلِ به عنوانِ تابعی از y.

y_1 محلِ تقاطعِ میانه‌ها و y_2 نقطه‌ی دیگری رویِ محورِ y با میدانِ صفر است. با استفاده از تقارنِ مسئله واضح است که دو نقطه‌ی دیگر با میدانِ صفر باید رویِ دو میانه‌های دیگر هستند.

در این مرحله چندین سئوال می‌توان مطرح کرد. اگر مثلثِ متساوی‌الاضلاع را به طورِ پیوسته تغییرِ شکل بدهیم، نقاطی که میدانِ الکتریکی در آن‌ها صفر است به چه صورت جابه‌جا می‌شوند؟ و یا این که اگر اندازه‌ی بارهایِ رویِ رئوسِ مثلث را به طورِ پیوسته تغییر دهیم، نقاطِ با میدان صفر چه‌گونه جابه‌جا می‌شوند؟

فرض کنید در حالی که طولِ ساق‌هایِ مثلث ثابت‌اند، طولِ قاعده‌ی آن را به تدریج زیاد کنیم. جواب‌هایِ معادله‌ی $E_y = 0$، یعنی نقاطی رویِ میانه‌ی وارد بر قاعده که $E_y = 0$ است، به هم نزدیک می‌شوند تا زمانی که این دو جواب یکی شوند. دو جوابِ رویِ این میانه یکی می‌شوند و در این حالت در سه نقطه میدانِ الکتریکی صفر است. در واقع در یکی از نقاط علاوه بر صفر بودنِ میدان، $\dfrac{\partial E_y}{\partial y}$ هم صفر است. این مطلب را از منظرِ دیگری نیز می‌توان نگاه کرد. اگر تابعیتِ پتانسیلِ Φ را رویِ محورِ عمودیِ برحسبِ y بررسی کنیم (شکلِ ۴) می‌بینیم که میدان در دو نقطه صفر و رویِ بار بی‌نهایت است. در فواصلِ دورِ از بار، پتانسیل به مقدارِ صفر میل می‌کند. در واقع در یکی پتانسیل نسبت به y بیشینه و در دیگری نسبت به y کمینه است. با تغییرِ پیوسته‌ی طولِ قاعده این دو نقطه به هم نزدیک شده و یکی می‌شوند. در این حالت این نقطه، نقطه‌ی عطف است. از این پس دیگر رویِ محورِ y میدان صفر نیست. با محاسبه‌ای عددی می‌توان نشان داد که تا وقتی قاعده حدودِ 3.5 درصد بزرگ‌تر از مقدارِ اولیه‌اش نشده‌است دو جواب رویِ میانه وجود دارد. از آن پس با زیاد کردنِ طولِ قاعده هر دو جواب از بین می‌روند. برایِ بررسیِ این مطلب می‌توان از روش‌هایِ توابعِ مختلط نیز کمک گرفت. در ابتدا دیدیم که معادله‌ی $E_y = 0$ دو جوابِ حقیقی داشت. با ازدیادِ طولِ قاعده این دو جوابِ حقیقی به هم می‌رسند و پس از آن دیگر معادله جوابی حقیقی ندارد. می‌دانیم که جوابهایِ یک معادله‌ی حقیقی



(ب) (الف)

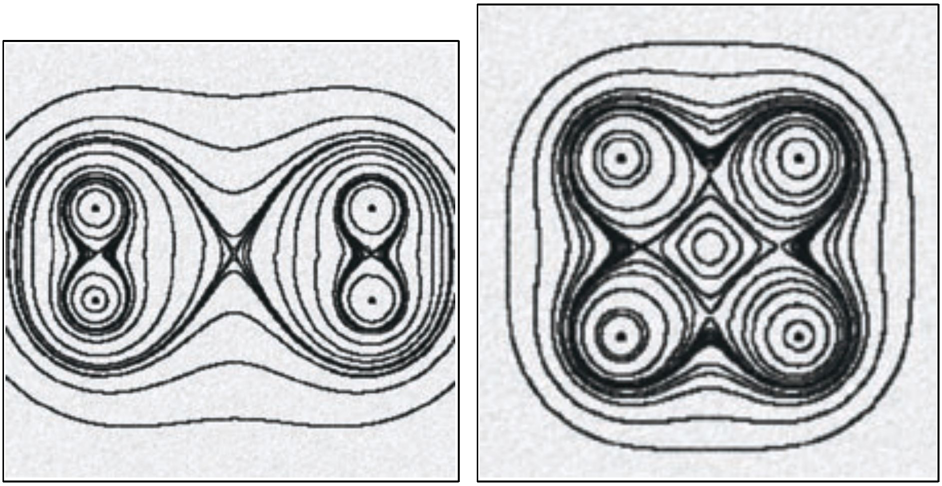
شکل ۵: (الف) با بزرگ کردن قاعده نسبت به ارتفاعِ مثلثِ متساوی الساقین دو تا از نقطه‌هایِ میدانِ صفر از بین می‌روند. (ب) با کوچک کردن قاعده نسبت به ارتفاعِ مثلثِ متساوی الساقین دو تا از نقطه‌هایِ میدانِ صفر از بین می‌روند.

حتماً مزدوجِ مختلطِ هم هستند. اگر معادله‌ای تعدادی جوابِ حقیقی داشته باشد، با تغییرِ پیوسته‌یِ پارامترهایِ معادله، ممکن است این جواب‌هایِ حقیقی به هم نزدیک شوند و پس از تبه‌گن شدن به صورتِ زوج جواب از بین روند. یعنی در واقع این جواب‌ها از محورِ حقیقی خارج شده و به صورتِ دوجوابِ مزدوجِ مختلط درمی‌آیند. البته بر عکسِ این اتفاق نیز ممکن است رخ دهد. ممکن است دو جوابِ مزدوجِ مختلط به هم نزدیک شوند تا جایی‌که رویِ محورِ حقیقی به هم برسند و از آن پس با تغییرِ پیوسته‌یِ پارامترها به دو جوابِ متمایزِ حقیقی تبدیل شوند.

اگر به جایِ بزرگ کردنِ طولِ قاعده آن را کوچک کنیم، باز هم تا مدتی ۴ جواب داریم تا آن که دو جواب تبه‌گن شده و ۳ جواب خواهیم داشت. اگر طولِ قاعده را باز هم کوچک‌تر کنیم به ۲ جواب می‌رسیم.

دو حالتِ حدی نیز وجود دارد. اگر طولِ قاعده را به‌قدری بزرگ کنیم که نسبت ارتفاع مثلث به آن خیلی کوچک شود، بارِ سوم تقریباً وسط دو بارِ دیگر خواهد بود و بدیهی است که دو نقطه‌یِ با میدانِ صفر داریم. در حدی که طولِ قاعده نسبت به ارتفاعَ مثلث خیلی کوچک شود، دو بار رویِ قاعده بر هم منطبق می‌شوند و مسئله مشابهِ حالتی می‌شود که دو بارِ الکتریکی با بارهایِ q و $2q$ داشته باشیم. در این حالت فقط یک نقطه با میدانِ صفر وجود دارد.

اگر به جایِ طولِ اضلاعِ مثلث بارِ روی رئوسِ آن را به طورِ پیوسته تغییر دهیم نیز مشابه همین حالات رخ می‌دهد. مثلاً اگر در مثلثِ متساوی‌الساقینی که تنها دونقطه‌یِ با میدانِ صفر دارد، بار رأس



(ب) (الف)

شکل ٦: (الف) سطوحِ هم‌پتانسیلِ ناشی از چهار بارِ یک‌سان که روی رئوسِ یک مربع‌اَند. (ب) با تبدیلِ پیوسته‌یِ مربع به مستطیل دو تا از نقطه‌هایِ میدانِ صفر از بین می‌روند.

آن را به طورِ پیوسته تغییر دهیم، می‌توان به حالتی رسید که مجدداً ۴ نقطه با میدانِ صفر داشته باشیم. در این حالت شکلِ سطوحِ هم‌پتانسیل به طورِ کیفی شبیهِ اولین حالت می‌شود. برایِ مثلثی به طولِ قاعده‌یِ 2 واحد و ارتفاعِ نظیرِ 3.5 واحد چنان‌چه بار رأس را 5.5 برابر بارِ بارهایِ قاعده بگیریم، میدانِ الکتریکی در 4 نقطه صفر می‌شود. برایِ یک مثلثِ دلخواه نیز علی‌الاصول 2 نقطه با میدانِ صفر وجود دارد که با تغییرِ طولِ اضلاع و یا اندازه‌یِ بارها میتوان 3 و یا 4 نقطه‌یِ با میدانِ صفر داشت.

ساده‌ترین چهارضلعیِ منتظم مربع است. اگر بارِ رویِ رئوسِ آن یکی باشد، 5 نقطه‌یِ با میدانِ صفر داریم که 4 نقطه‌یِ آن رویِ رئوسِ مربعی که اضلاعش کوچک‌تراز مربعِ اصلی و به اندازه‌یِ زاویه‌یِ $\pi/4$ نسبت به آن چرخیده، قرار دارند. نقطه‌یِ پنجم نیز در مرکزِ مربع قرار دارد. در واقع در نزدیکی هر یک از بارها سطوحِ هم‌پتانسیل کروی هستند و با دور شدن از بارها سطوحِ هم پتانسیل به سمتِ هم کشیده می‌شوند تا آن که در چهار نقطه هم‌دیگر را قطع کنند. در مرکزِ مربع هم که میدان بنا به تقارن صفر است.

اگر این مربع را به طورِ پیوسته به یک مستطیل تبدیل کنیم، ابتدا سطوحِ هم‌پتانسیلِ دمبلی‌شکل برایِ بارهایِ نزدیک ایجاد می‌شود. مشابهِ حالت قبل جواب‌ها به صورتِ زوجِ جواب از بین می‌روند. پس از یکی شدنِ هر دو جوابی، آن دو جواب همراهِ هم از بین می‌روند. برایِ یک مستطیلِ کشیده به جایِ 5 نقطه، 3 نقطه با میدانِ صفر داریم.

براي هر N–ضلعيِ منتظم، $N+1$ نقطه با ميدانِ صفر وجود دارد که با تغييرِ پيوسته‌يِ شکل بعضی از جواب‌ها ممکن است از بين روند. البته جواب‌ها نيز هم‌واره به صورتِ زوج از بين می‌روند.

قدردانی: از محمّدِ خرّمی، به خاطرِ بحث‌هايِ مفيدی که داشته تشکر می‌کنيم.

مرجع‌ها:

[1] S. D. Baker: On the field of equal charges at the corners of a regular polygon; *American Journal of Physic*, vol. 52, p. 256 (March 1984).

ترجمه‌يِ اين مقاله در مجلهٔ فيزيک، سال ۷، شماره‌يِ ۴، زمستان ۱۳۶۸، صص ۱۴۹ تا ۱۵۰ چاپ شده است.

آليس رفت تو جنگل و افتاد تو راه ی که از بين ِ درخت‌ها رد می‌شد، تا به يه دوراهی رسيد. سر ِ دوراهی يه تابلوی ِ راه‌نما بود، ولی ظاهراً به درد نمی‌خورد. رو ی ِ بازو يی که به راست اشاره می‌کرد نوشته بود "آ"، و رو ی ِ سمت ِچپی نوشته بود "ب". آليس با عصبانيّت گفت: "خُب، اين به‌دردنخورترين تابلوی ِ راه‌نما يی يِ که تا حالا ديدم."
دوروبر ِ ش ُ نگاه کرد تا ببينه چيز ی هست که راه‌نمايی ش کنه اين راه‌ها احتمالاً به کجاها می‌رن. گربه‌ی ِ شرودينگِر رُ ديد که چند قدم اون طرف‌تر روی ِ شاخه‌ی ِ يه درخت نشسته بود.
با خجالت گفت: "هِی گربه! می‌شه لطفاً بگی از کدوم راه بايد برَم؟"
گربه گفت: "بسته‌گی داره کجا می‌خوای بری."
آليس گفت: "راست ِ ش مطمئن نيستم کجا ..."
گربه حرف ِش رُ قطع کرد. "در اين صورت مهم نيست از کدوم راه بری."
آليس گفت: "ولی بالاخره من بايد از بين ِ اين دو راه يک ی رُ انتخاب کنم."
گربه گفت: "خُب اشتبا ت همين جا است. حتماً اين ُ خوندی که می‌تونی همه‌ی ِ راه‌ها رُ انتخاب کنی. خود ِ من اغلب 9 تا راه ُ با هم انتخاب می‌کنم. گربه‌ها، وقتی مشاهده نمی‌شن، می‌تونن همه جا پرسه بزنن." و ادامه داد "در باره‌ی ِ مشاهده، فکر می‌کنم همين حالا است که مشاهده بِشـَ ..."
در اين جا يه‌دفعه گربه از بين رفت.

Robert Gilmore; *Alice in Quantumland*; Springer, 1995.