بازتعبیر ـ کوانتمی ی ـ رابطه‌ها ی ـ سینماتیکی و مکانیکی[1]

وِرنِر هَیزِنبِرگ

این مقاله می‌کوشد چارچوب ی برا ی ـ مکانیک ـ کوانتمی ی ـ نظری بجوید که منحصراً بر روابط ـ بین ـ کمیّت‌ها یی استوار باشد که علی‌الاصول مشاهده‌پذیر اند.

همه می‌دانند که بر قانون‌ها ی ـ صوری ای که در نظریّه ی ـ کوانتمی برا ی ـ محاسبه ی ـ کمیّت‌ها ی ـ مشاهده‌پذیر ی مثل ـ انرژی ی ـ اتم ـ هیدروژن به کار می‌رود می‌توان اشکال‌ها یی اساسی گرفت، بر این اساس که عنصر ـ اصلی یِ این قانون‌ها رابطه‌ها یی است بین ـ کمیّت‌ها یی که ظاهراً علی‌الاصول مشاهده‌ناپذیر اند، مثل ـ مکان و دوره ی ـ گردش ـ الکترون. به این ترتیب این قانون‌ها فاقد ـ یک پایه ی ـ فیزیکی ی ـ واضح اند، مگر این که هنوز بخواهیم امیدوار باشیم که کمیّت‌ها ی ـ تاکنون‌مشاهده‌ناپذیر شاید بعداً به حیطه ی ـ تعیین ـ آزمایش‌گاهی بیایند. این امید مقبول می‌بود، اگر این قانون‌ها از درون سازگار می‌بودند و می‌شد آن‌ها را در گستره ی ـ بی‌ابهام ی از مسئله‌ها ی ـ کوانتم‌مکانیکی به کار برد. امّا تجربه نشان می‌دهد که این قانون‌ها ی ـ صوری ی ـ مکانیک ـ کوانتمی تنها به درد ـ اتم ـ هیدروژن و اثر ـ شُتارک[a] ـ آن می‌خورند. تا همین جا هم مشکلات ـ بنیادی ای در مسئله ی ـ 'میدان‌ها ی ـ متقاطع' (اتم ـ هیدروژن در یک میدان ـ الکتریکی و یک میدان ـ مغناطیسی با راستاها ی ـ متفاوت) بروز کرده است. پاسخ ـ اتم، به میدان ی که متناوباً تغییر می‌کند را هم نمی‌توان با این قانون‌ها توضیح داد. و سرانجام، تعمیم ـ این قانون‌ها ی ـ کوانتمی برا ی ـ اتم‌ها یی که چندین الکترون دارند شدنی نیست.

---

[1] این مقاله ترجمه ای است از:

Heisenberg, Werner: "Über quantentheoreticshe Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen" *Zeitschrift für Physik*, vol. 33 (1925) pp. 879–893.

امضای ـ آن 'گوتینگن، اینستیتوت فور تئورتیشه فیزیک' بوده و تاریخ ـ دریافت ـ آن 29 ـ ژوئیه ی ـ 1925 (7 ـ مرداد ـ 1304) بوده. این ترجمه، از رو ی ـ ترجمه ی ـ انگلیسی ی ـ زیر ترجمه شده است.

Heisenberg, Werner: "Quantum-Theoretical Re-Interpretation of Kinematic and Mechanical Relations", in *Sources of Qunatum Mechanics*, van der Waerden, B. L. (editor), Dover, 1967; pp. 261–276

متن ـ آلمانی را گروه ـ زیر به انگلیسی ترجمه کرده اند.

Sheldon, E.; Robinson, D.; Field, G.; van der Waerden, B. L.

در حروف‌چینی ی ـ این مقاله سعی شده نمادگذاری ی ـ نویسنده حتی‌المقدور حفظ شود؛ مثلاً نمادگذاری ی ـ جمع تا حدود ی با نمادگذاری ی ـ امروزی متفاوت است. در متن اصلی ارجاع‌ها به شکل ـ پاورقی بوده اند، امّا در این ترجمه، به علّت مشکلات ـ فنّی ی ـ حروف‌چینی، در پایان ـ مقاله آمده اند. مترجم: احمد ـ شریعتی

عادت شده است که این ناتوانی ی ِ قانون‌ها ی ِ کوانتمی را به انحراف از مکانیک ِ کلاسیک نسبت بدهند، زیرا خود ِ قانون‌ها در اساس از مکانیک ِ کلاسیک گرفته شده اند. امّا این حرف ِ خیلی مهم ی نیست. زیرا شرط ِ بسامد ِ اینشتین[b] ــ بُر[c] (که در همه ی ِ حالت‌ها معتبر است) خود یک چنین جدایی ی ِ کامل ی از مکانیک ِ کلاسیک، یا (با استفاده از دیدگاه ِ نظریّه ی ِ امواج) به‌تر است بگوییم از سینماتیک ِ پس ِ این مکانیک، را نشان می‌دهد. برا ی ِ ساده‌ترین مسئله‌ها ی ِ کوانتمی هم نمی‌توان مدّعی ی ِ اعتبار ِ مکانیک ِ کلاسیک شد. در چنین وضعیّت ی به نظر می‌رسد معقول‌تر آن است که از مشاهده ی ِ کمیّت‌ها یی که تا کنون مشاهده‌ناپذیر بوده اند، مثل ِ مکان و دوره ی ِ گردش ِ الکترون، قطع ِ امید کنیم و تصدیق کنیم که هم‌خوانی ی ِ پاره ای از قانون‌ها ی ِ کوانتمی با آزمایش کم و بیش اتّفاقی بوده است. در عوض گویی معقول‌تر این است که بکوشیم مکانیک ِ کوانتمی ی ِ نظری ای همانند ِ مکانیک ِ کلاسیک بنا کنیم، امّا طور ی که در آن فقط روابط ِ بین ِ کمیّت‌ها ی ِ مشاهده‌پذیر ظاهر شود. می‌توان شرط ِ بسامد و نظریّه ی ِ پاشنده‌گی ی ِ کرامرز[1,d] به همراه ِ تعمیم اش در مقاله‌ها ی ِ اخیر[2] را مهم‌ترین گام‌ها ی ِ نخست به سو ی ِ چنین مکانیک ِ کوانتمی ای دانست، و آن‌ها را برا ی ِ بررسی ی ِ مفصّل ِ چند مسئله ی ِ خاص به کار برد. ما خود را به بررسی ی ِ مسئله‌ها یی شامل ِ یک درجه ی ِ آزادی محدود می‌کنیم.

1. در نظریّه ی ِ کلاسیک، تابش ِ گسیلیده از الکترون ِ متحرک (در ناحیه ی ِ موج، یعنی ناحیه ای که $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{H}$ از مرتبه ی ِ $1/\mathfrak{r}$ اند) فقط با عبارت‌ها ی ِ

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathrm{e}}{\mathfrak{r}^3\, c^2}[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{v}}]], \qquad \mathfrak{H} = \frac{\mathrm{e}}{\mathfrak{r}^2\, c^2}[\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}],$$

به طور ِ کامل داده نمی‌شود. در مرتبه‌ها ی ِ بعدی ی ِ تقریب، جمله‌ها ی ِ دیگر ی هم هست. مثلاً جمله‌ها یی به شکل ِ

$$\frac{\mathrm{e}\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}}{\mathfrak{r}\, c^3}$$

هست که می‌توان آن را 'تابش ِ چهارقطبی' نامید. در مرتبه‌ها ی ِ بالاتر حتّا جمله‌ها یی مثل ِ

$$\frac{\mathrm{e}\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{r}\, c^4}$$

هم ظاهر می‌شوند. به این ترتیب می‌توان تقریب را تا هر مرتبه ی ِ بالاتر ِ دل‌بخواه ی ادامه داد. (نمادها ی ِ زیر را به کار برده ایم: $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{H}$ شدّت ِ میدان‌ها در یک نقطه ی ِ داده شده اند، $\mathfrak{r}$ بردار ِ بین ِ این نقطه و مکان ِ الکترون است، $\mathfrak{v}$ سرعت و e بار ِ الکترون است.)

می‌توان پرسید که شکل ِ این جمله‌ها ی ِ مرتبه‌بالاتر در نظریّه ی ِ کوانتمی چیست. در نظریّه ی ِ کلاسیک، اگر بسط ِ فوریه ی ِ حرکت ِ الکترون داده شده باشد، به آسانی می‌توان تقریب‌ها ی ِ مرتبه‌بالاتر را حساب کرد، و می‌توان انتظار داشت در مکانیک ِ کوانتمی هم نتیجه ی ِ مشابه ای برقرار باشد. این نکته هیچ ربط ی به الکترودینامیک ندارد ــــ چیز ی که به نظر می‌رسد بسیار مهم است ــ بلکه یک سرشت ِ خالصاً سینماتیکی است. این پرسش را، در ساده‌ترین شکل اش، می‌توانیم

این طور مطرح کنیم: اگر به جا یِ کمیّت ِ کلاسیک ِ $x(t)$، یک کمیّت ِ کوانتمی داشته باشیم، چه کمیّت ِ کوانتمی ای به جای ِ $x(t)^2$ ظاهر می‌شود.

پیش از پاسخ دادن به این سؤال، باید به یاد بیاوریم که نسبت دادن ِ یک نقطه در فضا به الکترون، به عنوان ِ تابع ی از زمان و کمیّت‌های ِ مشاهده‌پذیر، تا کنون در نظریّه یِ کوانتمی ممکن نبوده است. با این حال، حتّا در نظریّه یِ کوانتمی هم، نسبت دادن ِ گسیل ِ تابش به الکترون ممکن است. برا یِ مشخّص کردن ِ این تابش، نخست به بسامدها یی نیاز داریم که تابع ی از دو متغیّر باشند. این تابع‌ها در نظریّه یِ کوانتمی به این شکل اند

$$\nu(n, n-\alpha) = \frac{1}{h}\left\{W(n) - W(n-\alpha)\right\},$$

و در نظریّه یِ کلاسیک به این شکل

$$\nu(n, \alpha) = \alpha \cdot \nu(n) = \alpha\,\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}n}.$$

(در این جا داریم $n\,h = J$، که در آن J یک ی از ثابت‌ها یِ کانُنیک ِ حرکت است.)

برا یِ مقایسه یِ نظریّه‌ها یِ کلاسیک و کوانتمی در مورد ِ بسامد، می‌توان روابط ِ ترکیب را نوشت

کلاسیک:

$$\nu(n, \alpha) + \nu(n, \beta) = \nu(n, \alpha + \beta).$$

کوانتمی:

$$\nu(n, n-\alpha) + \nu(n-\alpha, n-\alpha-\beta) = \nu(n, n-\alpha-\beta)$$

یا

$$\nu(n-\beta, n-\alpha-\beta) + \nu(n, n-\beta) = \nu(n, n-\alpha-\beta).$$

برا یِ کامل کردن ِ توصیف ِ تابش باید هم بسامدها را داشته باشیم و هم دامنه‌ها را. دامنه‌ها را می‌توان بردارها یی مختلط گرفت که هر کدام با شش مؤلّفه یِ مستقل مشخّص می‌شوند، عددها یی که هم قطبش و هم فاز را مشخّص می‌کنند. از آن جا که دامنه‌ها هم توابع ی از دو متغیّر ِ n و α اند، بخش ی از تابش که با این بسامد و دامنه متناظر است با عبارت ِ زیر داده می‌شود:

کوانتمی:

$$\mathrm{Re}\left\{\mathfrak{A}(n, n-\alpha)\, e^{i\omega(n, n-\alpha)\, t}\right\}. \tag{1}$$

کلاسیک:

$$\mathrm{Re}\left\{\mathfrak{A}_\alpha(n)\, e^{i\omega(n)\,\alpha\, t}\right\}. \tag{2}$$

در نگاه ِ اوّل به نظر می‌رسد در نظریّه ی ِ کوانتمی فاز ِ $\mathfrak{A}$ اهمیّت ِ فیزیکی ای ندارد، زیرا در این نظریّه بسامدها در حالت ِ کلّی متناسب با هماهنگ‌ها پِشان نیستند. امّا هم‌اینک خواهیم دید که در نظریّه ی ِ کوانتمی فاز اهمیّت ِ خاصّ ی دارد که شبیه است به اهمیّت اش در نظریّه ی ِ کلاسیک. اکنون کمیّت ِ داده شده ای مثل ِ $x(t)$ را در نظریّه ی کلاسیک در نظر بگیریم. می‌توان انگاشت که این کمیّت با مجموعه ی ِ کمیّت‌ها یی به شکل ِ

$$\mathfrak{A}_\alpha(n)\, e^{i\omega(n)\alpha t},$$

نمایانده می‌شود، که بسته به این که حرکت دوره‌ای باشد یا نه، می‌توان آن‌ها را به شکل ِ یک جمع یا انتگرال ترکیب کرد که نمایاننده ی ِ $x(t)$ اند:

$$\left.\begin{aligned} x(n,t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\alpha}\ \mathfrak{A}_\alpha(n)\, e^{i\omega(n)\alpha t} \\ &\text{یا} \\ x(n,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha(n)\, e^{i\omega(n)\alpha t}\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

به دلیل ِ نقش ِ برابر ِ متغیّرها ی ِ n و $n-\alpha$، به نظر نمی آید بتوان ترکیب ِ مشابه ای از کمیّت‌ها ی ِ متناظر ِ کوانتمی را به شکل ی یکتا، و در نتیجه بامعنی، نوشت. امّا می‌توانیم مجموعه ی ِ کمیّت‌ها ی ِ

$$\mathfrak{A}(n, n-\alpha)\, e^{i\omega(n,n-\alpha)\, t}$$

را به عنوان ِ نمایش ی از کمیّت ِ $x(t)$ بگیریم و بکوشیم به این پرسش پاسخ دهیم: کمیّت ِ $x(t)^2$ چه‌گونه نمایانده می‌شود؟

در نظریّه ی ِ کلاسیک، پاسخ به وضوح این است:

$$\mathfrak{B}_\beta(n)\, e^{i\omega(n)\,\beta\, t} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\alpha}\ \mathfrak{A}_\alpha\, \mathfrak{A}_{\beta-\alpha}\, e^{i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)\, t}\,, \tag{3}$$

یا

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha\, \mathfrak{A}_{\beta-\alpha}\, e^{i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t}\, \mathrm{d}\alpha. \tag{4}$$

بنا بر این

$$x(t)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\beta} \; \mathfrak{B}_\beta(n)\, e^{i\,\omega(n)\,\beta\,t}\,, \tag{5}$$

یا متناظراً

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_\beta(n)\, e^{i\,\omega(n)\,\beta\,t}\, \mathrm{d}\beta. \tag{6}$$

به نظر می‌رسد آسان‌ترین و طبیعی‌ترین فرض در نظریّه ی ِ کوانتمی این است که به جا ی ِ (3) و (4) رابطه‌ها ی ِ زیر را بگذاریم:

$$\mathfrak{B}(n, n-\beta)\, e^{i\,\omega(n,n-\beta)\,t} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha} \; \mathfrak{A}(n, n-\alpha)\, \mathfrak{A}(n-\alpha, n-\beta)\, e^{i\,\omega(n,n-\beta)\,t} \tag{7}$$

یا

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}(n, n-\alpha)\, \mathfrak{A}(n-\alpha, n-\beta)\, e^{i\,\omega(n,n-\beta)\,t}\, \mathrm{d}\alpha \tag{8}$$

و در واقع این نوع ترکیب نتیجه‌ی ِ تقریباً لازم ی از قاعده‌ها ی ِ ترکیب ِ بسامدها است. با پذیرفتن ِ فرض‌ها ی ِ (7) و (8)، می‌بینیم که فازها ی ِ کوانتمی ی ِ $\mathfrak{A}$ هم درست مانند ِ مانسته‌ها ی ِ کلاسیک ِ شان اهمیّت ِ فیزیکی ی ِ بسیار مهم ی دارند. فقط مبدأ ِ زمان و در نتیجه یک فاز ِ مشترک برا ی ِ همه ی ِ $\mathfrak{A}$ها دل‌بخواه و در نتیجه تهی از اهمیّت ِ فیزیکی است، امّا فاز ِ تک‌تک ِ $\mathfrak{A}$ها به نحو ی اساسی وارد ِ کمیّت ِ $\mathfrak{B}$ می‌شود.[3] در حال ِ حاضر بسیار بعید به نظر می‌رسد که بتوان از چنین روابط ِ فازی ی ِ کوانتمی ای، همانند ِ مانسته‌ها ی ِ نظریّه ی ِ کلاسیک، یک تعبیر ِ هندسی یافت.

اگر علاوه بر این به دنبال ِ نمایش ی برا ی ِ کمیّت ِ $x(t)^3$ باشیم، بی هیچ مشکل ی کمیّت‌ها ی ِ زیر، یا شکل‌ها ی ِ انتگرالی ی ِ متناظر ِ شان را می‌یابیم:

کلاسیک

$$\mathfrak{C}(n, \gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha,\beta} \; \mathfrak{A}_\alpha(n)\, \mathfrak{A}_\beta(n)\, \mathfrak{A}_{\gamma-\alpha-\beta}(n). \tag{9}$$

کوانتمی

$$\begin{aligned} &\mathfrak{C}(n, n-\gamma) = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha,\beta} \; \mathfrak{A}(n, n-\alpha)\, \mathfrak{A}(n-\alpha, n-\alpha-\beta)\, \mathfrak{A}(n-\alpha-\beta, n-\gamma) \end{aligned} \tag{10}$$

می‌توان به طریقِ مشابه ای یک نمایشِ کوانتمی برا یِ همه یِ کمیّت‌ها یِ ازنوع ِ $x(t)^n$ یافت؛ و اگر تابع ِ $f\,[x(t)]$ داده شده باشد، همواره می‌توان عبارت ِ کوانتمی یِ متناظر اش را یافت، مشروط بر این که بتوان آن تابع را به صورت ِ یک سریِ توانی بسط داد. امّا، اگر دو کمیّت ِ $x(t)$ و $y(t)$ را در نظر بگیریم و بپرسیم حاصلِ‌ضرب ِ $x(t)\,y(t)$ چیست، به یک مشکل ِ جدّی بر می‌خوریم. اگر $x(t)$ با $\mathfrak{A}$، و $y(t)$ با $\mathfrak{B}$ مشخّص شده باشد، برا یِ $x(t)\,y(t)$ نمایش ِ زیر را می‌یابیم

کلاسیک:

$$\mathfrak{C}_\beta(n) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\ \mathfrak{A}_\alpha(n)\,\mathfrak{B}_{\beta-\alpha}(n).$$

کوانتمی:

$$\mathfrak{C}(n, n-\beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\ \mathfrak{A}(n, n-\alpha)\,\mathfrak{B}(n-\alpha, n-\beta).$$

با آن که در نظریّه یِ کلاسیک $x(t)\,y(t)$ همیشه برابر است با $y(t)\,x(t)$، در نظریّه یِ کوانتمی الزاماً چنین نیست. این مشکل، در حالت‌ها یِ خاصّ ی پیش نمی‌آید؛ مثلاً در عبارت ِ $x(t)\,x(t)$.

اگر به حاصلِ‌ضرب ِ

$$v(t)\,\dot{v}(t)$$

در نظریّه یِ کوانتمی علاقه‌مند ایم ــ مثل ِ سؤال ِ ابتدا یِ بخش ــ باید به جا یِ $v\,\dot{v}$ بگذاریم $\frac{(v\,\dot{v}+\dot{v}\,v)}{2}$، تا $v\,\dot{v}$ مشتقّ ِ $\frac{v^2}{2}$ بشود. به نظر می‌رسد همیشه بتوان به این طریق عبارت‌ها یِ طبیعی ای برا یِ مقدارها یِ میانگین ِ کوانتمی یافت، گرچه، این عبارت‌ها ممکن است بیش از فرمول‌ها یِ (7) و (8) حدسی باشند.

سَوا یِ مشکل ی که همین الان گفتیم، فرمول‌ها یی از نوع ِ (7) و (8) عموماً برا یِ توصیف ِ برهم‌کنش ِ الکترون‌ها یِ تو یِ اتم بر حسب ِ دامنه‌ها یِ مشخّصه یِ الکترون‌ها کفایت می‌کنند.

2. بعد از این ملاحظات، که راجع به سینماتیک ِ نظریّه یِ کوانتمی بود، توجّه ِ خود را به مسئله‌یِ دینامیک جلب می‌کنیم؛ مسئله یِ تعیین ِ $\mathfrak{A}$، v، و W از رو یِ نیرو یِ داده‌شده یِ سیستم. در نظریّه یِ قدیم، این مسئله در دو گام حل می‌شد.

۱) انتگرال‌گیری از معادله یِ حرکت

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \qquad (11)$$

۲) تعیین ِ ثابت‌ها ی ِ دوره‌ای از

$$\oint p\,\mathrm{d}q = \oint m\,\dot{x}\,\mathrm{d}x = J(= n\,h). \tag{12}$$

اگر بخواهیم یک فرمول‌بندی ی ِ کوانتمی بسازیم که حتّی‌المقدور به فرمول‌بندی ی ِ کلاسیک نزدیک باشد، خیل ی طبیعی است که معادله ی ِ حرکت ِ (11) را مستقیماً به نظریّه ی ِ کوانتمی ببریم. امّا ــ برا ی ِ آن که از بنیاد ِ محکم ی که کمیّت‌ها ی ِ علی‌الاصول‌مشاهده‌پذیر فراهم می‌آورند دور نشویم ــ در این مرحله لازم است کمیّت‌ها ی ِ $\ddot{x}$ و $f(x)$ را با نماینده‌ها ی ِ کوانتمی شان، که در بخش ِ 1 داده شد، جای‌گزین کنیم. در نظریّه ی ِ کلاسیک، برا ی ِ حلّ ِ (11) می‌توان ابتدا x را با یک سری یا انتگرال ِ فوریه با ضریب‌ها (و بسامدها) ی ِ نامعلوم بیان کرد. بعد، در حالت ِ کلّی، مجموعه ای از بی‌نهایت معادله شامل ِ بی‌نهایت مجهول، یا یک معادله ی ِ انتگرالی، به دست می‌آید که فقط در حالت‌ها ی ِ خیل ی خاصّ ی تبدیل می‌شود به روابط ِ بازگشتی ی ِ ساده ای برا ی ِ $\mathfrak{A}$. در حال ِ حاضر، در نظریّه ی ِ کوانتمی برا ی ِ حلّ ِ (11) مجبور ایم همین روش را بپذیریم؛ زیرا، همان طور که پیش‌تر گفتیم، نتوانسته ایم مستقیماً یک تابع ِ کوانتمی نظیر ِ $x(n,t)$ تعریف کنیم.

در نتیجه حلّ ِ کوانتمی ی ِ (11) فقط در ساده‌ترین موارد ممکن است. بیایید پیش از این که چنین مثال‌ها ی ِ ساده ای را در نظر بگیریم، یک بازتعبیر ِ کوانتمی ارائه بدهیم از این که چه‌طور می‌توان از (12) ثابت‌ها ی ِ حرکت ِ دوره‌ای را یافت. فرض کنیم حرکت (ِ کلاسیک) دوره‌ای باشد:

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\; a_\alpha(n)\, e^{i\alpha\omega_n t} \quad ; \tag{13}$$

پس

$$m\,\dot{x} = m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\; a_\alpha(n) i\alpha\omega_n\, e^{i\alpha\omega_n t}$$

و

$$\oint m\,\dot{x}\,\mathrm{d}x = \oint m\,\dot{x}^2\,\mathrm{d}t = 2\,\pi\,m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\; a_\alpha(n)\, a_{-\alpha}(n)\, \alpha^2\,\omega_n.$$

به علاوه، چون x باید حقیقی باشد، $a_{-\alpha}(n) = \overline{a_\alpha(n)}$ ، و بنا بر این

$$\oint m\,\dot{x}^2\,\mathrm{d}t = 2\,\pi\,m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\; |a_\alpha(n)|^2\,\alpha^2\,\omega_n. \tag{14}$$

در نظریّه ی ِ قبلی، این انتگرال ِ فاز را مضرب ِ درست ی از h، یعنی nh می‌گذاشتند؛ امّا چنین شرط ی به طور ِ طبیعی در محاسبه‌ها ی ِ دینامیکی جا یی ندارد. حتّا اگر از دیدگاه ی که تا کنون حاکم بوده به این فاز نگاه کنیم، این فاز، به مفهوم ِ اصل ِ تطابق، اختیاری است؛ زیرا از این دیدگاه J ها فقط تا حدّ ِ یک ثابت ِ جمعی به شکل ِ مضرب ی از h اند. طبیعی‌تر آن است که به جا ی ِ (14) بنویسیم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\,(n\,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\,\oint m\,\dot{x}^2\,\mathrm{d}t,$$

یعنی

$$h = 2\,\pi\,m\,\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\;\alpha\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\,\left(\alpha\,\omega_n\cdot|a_\alpha|^2\right). \tag{15}$$

واضح است که چنین شرط ی a_α را فقط تا حدّ ِ یک ثابت تعیین می‌کند. این تعیّن‌ناپذیری در عمل منجر به اشکال‌ها یی شده، اشکال‌ها یی مربوط به ظهور ِ عددها ی ِ کوانتمی ی ِ نیمه‌صحیح.

اگر به دنبال ِ یک رابطه ی ِ کوانتمی ی ِ متناظر با (14) و (15) باشیم که فقط شامل ِ کمیّت‌ها ی ِ مشاهده‌پذیر باشد، آن وقت یگانه‌گی ای را که از دست داده ایم دوباره به دست می‌آوریم.

باید بپذیریم که فقط معادله ی ِ (15) بازصورت‌بندی ی ِ ساده ی ِ کوانتمی ای دارد که مربوط می‌شود به نظریّه ی ِ پاشنده‌گی ی ِ کرامرز[4]:

$$h = 4\pi m\sum_{0}^{\infty}{}_{\alpha}\;\left\{|a(n,n+\alpha)|^2\,\omega(n,n+\alpha) - |a(n,n-\alpha)|^2\,\omega(n,n-\alpha)\right\}. \tag{16}$$

امّا همین رابطه برا ی ِ آن که a به صورت ِ یگانه ای تعیین شود کافی است، زیرا ثابت ِ نامعیّن ی که در کمیّت‌ها ی ِ a هست خودبه‌خود از این شرط به دست می‌آید که باید حالت ِ پایه ای وجود داشته باشد که از آن حالت هیچ تابش ی گسیل نشود. فرض کنید این حالت ِ پایه را با n_0 نشان بدهیم؛ در این صورت باید داشته باشیم

$$a(n_0, n_0-\alpha) = 0 \quad (\text{for} \quad \alpha > 0)\,.$$

پس می‌شود انتظار داشت مسئله ی ِ کوانتش ِ نیمه‌صحیح یا صحیح در یک مکانیک ِ کوانتمی ی ِ نظری که فقط بر پایه ی ِ روابط ِ بین ِ کمیّت‌ها ی ِ مشاهده‌پذیر باشد پیش نیاید.

معادله‌ها ی ِ (11) و (16)، اگر حل‌پذیر باشند، نه تنها بسامدها و مقدارها ی ِ انرژی را کاملاً معیّن می‌کنند، بلکه احتمال ِ گذارها ی ِ کوانتمی را هم معیّن می‌کنند. امّا، در حال ِ حاضر فقط در ساده‌ترین حالت‌ها می‌توان حلّ ِ ریاضی ی ِ درست‌وحسابی ای برا ی ِ آن‌ها پیدا کرد. در بسیار ی از سیستم‌ها، مثلاً اتم ِ هیدورژن، مشکل ِ خاصّ ی پیش می‌آید؛ زیرا حل‌ها متناظر اند با حرکت ی که بخش ی از آن تناوبی و بخش ی از آن ناتناوبی است. در نتیجه ی ِ این خصلت، سری‌ها ی ِ (7) و (8)، و معادله ی ِ (16) به یک جمع و یک انتگرال تجزیه می‌شوند. در مکانیک ِ کوانتمی، در حالت ِ کلّی نمی‌توان حرکت را به حرکت ِ تناوبی و حرکت ِ ناتناوبی تجزیه کرد.

با این حال معادله‌های ِ (11) و (16) را می‌توان، دستِ‌کم علی‌الاصول، یک حلّ ِ ارضا کننده از دینامیک ِ مسئله دانست، مشروط بر این که بتوان نشان داد که این حل با روابط ِ کوانتمی ای که در حال ِ حاضر می‌دانیم می‌خوانند (یا دستِ‌کم تناقض ندارد). برا ی ِ مثال، باید نشان داده شود که

وارد کردن ِ یک اختلال ِ کوچک در یک مسئله ی ِ دینامیکی منجر به افزوده شدن ِ جمله‌ها یی به انرژی، یا بسامد، می‌شود که از همان نوع ی اند که کرامرز و بُرن [e] یافته اند ــ نه از نوع ی که نظریّه ی ِ کلاسیک می‌گوید. به علاوه، باید این را هم تحقیق کرد که آیا معادله ی ِ (11) در شکل ِ کوانتمی ی ِ فعلی اش به یک انتگرال ِ انرژی ی ِ

$$\frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + U(x) = \text{constant}$$

منجر می‌شود یا نه؟ و آیا انرژی ای که به این طریق به دست می‌آید مشابه ِ شرط ِ کلاسیک ِ $\nu = \partial W/\partial J$، شرط ِ $\Delta W = h\nu$ را بر می‌آورد یا نه؟. یک جواب ِ عام به این پرسش‌ها، ارتباط ِ ذاتی ی ِ بین ِ پژوهش‌ها ی ِ کوانتمی ی ِ پیشین را روشن می‌کند و راه ِ رسیدن به یک نظریّه ی ِ کوانتمی را که منحصراً بر پایه ی ِ کمیّت‌ها ی ِ مشاهده‌پذیر باشد هموار می‌کند. به پرسش ِ بالا، جدا ی ِ از یک ارتباط ِ عام بین ِ فرمول‌ها ی ِ پاشنده‌گی ی ِ کرامرز و معادله‌ها ی ِ (11) و (16)، فقط در حالت‌ها ی ِ خیلی خاصّ ی می‌توان جواب داد، حالت‌ها یی که بتوان معادله‌ها را با روابط ِ بازگشتی ی ِ ساده ای حل کرد.

رابطه ی ِ عامّ ِ بین ِ نظریّه ی ِ پاشنده‌گی ی ِ کرامرز و معادله‌ها ی ِ (11) و (16) ِ ما این است: از معادله ی ِ (11) (یا دقیق‌تر بگوییم از مانسته ی ِ کوانتمی اش)، درست مثل ِ نظریّه ی ِ کلاسیک این طور نتیجه می‌گیریم که اگر به یک الکترون ِ نوسان کننده نور ی بتابد که بسامد اش خیل ی بیش‌تر از هر ویژه‌بسامد ی از سیستم باشد، آن الکترون ِ نوسان کننده مثل ِ یک الکترون ِ آزاد رفتار می‌کند. این نتیجه از نظریّه ی ِ پاشنده‌گی ی ِ کرامرز هم نتیجه می‌شود، مشروط بر این که معادله ی ِ (16) را هم به کار ببریم. در واقع، کرامرز برا ی ِ گشتاور ی که یک موج ِ به شکل ِ $E\cos 2\pi\nu t$ القا می‌کند، این فرمول را یافته است:

$$M = \mathrm{e}^2\, E\, \cos 2\,\pi\,\nu\, t \cdot \frac{2}{h} \sum_{0}^{\infty}{}_{\alpha} \left\{ \frac{|a(n,n+\alpha)|^2\, \nu(n,n+\alpha)}{\nu^2(n,n+\alpha) - \nu^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{|a(n,n-\alpha)|^2\, \nu(n,n-\alpha)}{\nu^2(n,n-\alpha) - \nu^2} \right\},$$

پس برا ی ِ $\nu \gg \nu(n,n+\alpha)$

$$M = -\frac{2E\mathrm{e}^2 \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 \cdot h} \sum_{0}^{\infty}{}_{\alpha} \left\{ |a(n,n+\alpha)|^2\, \nu(n,n+\alpha) \right.$$
$$\left. - |a(n,n-\alpha)|^2\, \nu(n,n-\alpha) \right\},$$

که به دلیل ِ معادله‌ی ِ (16) می‌شود

$$M = -\frac{\mathrm{e}^2 E \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 \cdot 4\,\pi^2\, m}\,.$$

3. حالا به عنوان ِ یک مثال ِ ساده نوسان‌گر ِ ناهم‌آهنگ را بررسی می‌کنیم.

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x + \lambda\, x^2 = 0. \tag{17}$$

در حالت ِ کلاسیک، این معادله حلّ ی به شکل ِ زیر دارد

$$x = \lambda\, a_0 + a_1 \cos\omega t + \lambda a_2 \cos 2\omega t + \lambda^2 a_3 \cos 3\omega t + \cdots \lambda^{\tau-1} a_\tau \cos\tau\omega t,$$

که در آن a ها سری‌ها ی ِ توانی ای از λ اند که اوّلین جمله ی ِ آن‌ها مستقل از λ است. ما می‌کوشیم یک عبارت ِ کوانتمی ی ِ مشابه پیدا کنیم که در آن x با جمله‌ها یی به شکل ِ زیر نمایش داده شده باشد

$$\begin{aligned} \lambda\, a(n,n); \quad a(n,n-1)\ \cos\omega(n,n-1)t; \\ \lambda\, a(n,n-2)\ \cos\omega(n,n-2)t; \\ \cdots\ \lambda^{\tau-1}\, a(n,n-\tau)\ \cos\omega(n,n-\tau)t\ \cdots \end{aligned}$$

بنا بر معادله‌های ِ (3) و (4)، یا (7) و (8)، روابط ِ بازگشتی ای که a ها و ω را (تا مرتبه ی ِ λ، ولی بدون ِ درنظرگرفتن ِ جمله‌ها ی ِ شامل ِ λ) تعیین می‌کنند عبارت اند از

کلاسیک:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0^2\, a_0(n) + \tfrac{1}{2}\, a_1^2(n) = 0; \\ -\omega^2 + \omega_0^2 = 0; \\ (-4\,\omega^2 + \omega_0^2)\, a_2(n) + \tfrac{1}{2}\, a_1^2 = 0; \\ (-9\,\omega^2 + \omega_0^2)\, a_3(n) + a_1\, a_2 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

کوانتمی:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0^2\, a_0(n) + \tfrac{1}{4}\ \left[a^2(n+1,n) + a^2(n,n-1)\right] = 0; \\ -\omega^2(n,n-1) + \omega_0^2 = 0; \\ \left[-\omega^2(n,n-2) + \omega_0^2\right]\ a(n,n-2) + \tfrac{1}{2}\ [a(n,n-1)\, a(n-1,n-2)] = 0; \\ \left[-\omega^2(n,n-3) + \omega_0^2\right]\ a(n,n-3) \\ +\tfrac{1}{2}\ [a(n,n-1)\, a(n-1,n-3)] + \tfrac{1}{2}\ [a(n,n-2)\, a(n-2,n-3)] = 0; \\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

شرط ِ اضافه ی ِ کوانتمی هم این است

کلاسیک $(J = nh)$:

$$1 = 2\pi m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\, \tau^2\, |a_\tau|^2\, \omega$$

کوانتمی:

$$h = \pi m \sum_{0}^{\infty} \left[|a(n+\tau,n)|^2\, \omega(n+\tau,n) - |a(n,n-\tau)|^2\, \omega(n,n-\tau) \right].$$

چه در کلاسیک، چه در کوانتمی، در مرتبه ی ِ اوّل می‌بینیم

$$a_1^2(n) \qquad \text{or} \qquad a^2(n,n-1) = \frac{(n+\text{const})\, h}{\pi\, m\, \omega_0}. \tag{20}$$

در نظریّه ی ِ کوانتمی، ثابت ِ معادله ی ِ (20) را می‌توان از این شرط که $a(n_0, n_0-1)$ برا ی ِ حالت ِ پایه باید صفر باشد به دست آورد. اگر n ها را طور ی شماره‌گذاری کرده باشیم که در حالت ِ پایه n صفر باشد، یعنی $n_0 = 0$، آن وقت

$$a^2(n,n-1) = \frac{nh}{\pi m \omega_0}.$$

به این ترتیب از معادله ی ِ بازگشتی ی ِ (18) نتیجه می‌شود که در نظریّه ی ِ کلاسیک a_τ (تا مرتبه ی ِ اوّل در λ) به شکل ِ $\varkappa(\tau)\, n^{\frac{1}{2}\tau}$ است که در آن $\varkappa(\tau)$ یک ضریب ِ مستقل از n است. در نظریّه ی ِ کوانتمی، معادله ی ِ (19) می‌گوید

$$a(n,n-\tau) = \varkappa(\tau) \sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}} \quad , \tag{21}$$

که در آن $\varkappa(\tau)$ همان ضریب ِ تناسب ِ مستقل از n است. برا ی ِ مقدارها ی ِ بزرگ ِ n، مقدار ِ کوانتمی ی ِ a_τ به نحو ی طبیعی مجانباً به مقدار ِ کلاسیک میل می‌کند.

یک گام ِ واضح ِ بعدی این است که بکوشیم عبارت ِ کلاسیک ِ انرژی، یعنی

$$W = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x^2 + \frac{1}{3}\, m\, \lambda\, x^3$$

را وارد کنیم؛ زیرا این عبارت در محاسبه ی ِ مرتبه ی ِ اوّل ِ کنونی، حتّا در محاسبه ی ِ کوانتمی، ثابت است. مقدار ی که برا ی ِ W از (19)، (20)، یا (21) داده می‌شود چنین است:

کلاسیک:

$$W = nh\omega_0/2\pi \tag{22}$$

کوانتمی:

$$W = \frac{(n+\frac{1}{2})\, h\omega_0}{2\pi} \tag{23}$$

(جمله‌ها ی ِ مرتبه ی ِ λ^2 را انداخته ایم).

به این ترتیب از دیدگاه ِ کنونی حتّا انرژی ی ِ یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ هم با 'مکانیک ِ کلاسیک'، یعنی با معادله ی ِ (22) داده نمی‌شود؛ بلکه به شکل ِ (23) است.

اکنون برا ی ِ نوسان‌گر ِ ناهم‌آهنگ ِ ساده‌تر ِ

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x + \lambda\, x^3 = 0,$$

با به حساب آوردن ِ مرتبه‌ها ی ِ بالاتر ِ W، a، و ω، محاسبه ی ِ دقیق‌تر ی می‌کنیم.

برا ی ِ این نوسان‌گر، در حالت ِ کلاسیک می‌توان گذاشت

$$x = a_1\, \cos\omega t + \lambda\, a_3\, \cos 3\omega t + \lambda^2\, a_5\, \cos 5\omega t + \cdots.$$

ما می‌کوشیم سُرایش ِ کوانتمی را با قیاس با معادله ی ِ بالا بنویسیم.

$$a(n, n-1)\, \cos\omega(n, n-1)t; \qquad \lambda a(n, n-3)\, \cos\omega(n, n-3)t; \quad \cdots$$

کمیّت‌ها ی ِ a هم بار ِ دیگر سری‌ها ی ِ توانی ای در λ اند، سری‌ها یی که جمله ی ِ اوّل ِ شان، نظیر ِ معادله ی ِ (21)، به این شکل است.

$$a(n, n-\tau) = \varkappa(\tau)\, \sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}} \quad ,$$

چیز ی که می‌توان با محاسبه ی ِ معادله‌ها یی که نظیر ِ (18) و (19) اند یافت.

اگر از معادله‌ها ی ِ (18) و (19)، ω را تا مرتبه ی ِ λ^2، و a را تا مرتبه ی ِ λ حساب کنیم، می‌بینیم

$$\omega(n, n-1) = \omega_0 + \lambda\, \frac{3\, n\, h}{8\, \pi\, \omega_0^2\, m} - \lambda^2\, \frac{3\, h^2}{256\, \omega_0^5\, m^2\, \pi^2}(17\, n^2 + 7) + \cdots \tag{24}$$

$$a(n, n-1) = \sqrt{\frac{n\, h}{\pi\, \omega_0\, m}}\Big(1 - \lambda\, \frac{3\, n\, h}{16\, \pi\, \omega_0^3\, m} + \cdots\Big). \tag{25}$$

$$a(n, n-3) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{h^3}{\pi^3\, \omega_0^7\, m^3} n\, (n-1)\, (n-2)} \cdot \Big(1 - \lambda \frac{39(n-1)h}{32\, \pi\, \omega_0^3\, m}\Big). \tag{26}$$

انرژی، که بنا بر تعریف جمله ی ِ ثابت ِ عبارت ِ

$$\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\, m\, \lambda\, x^4$$

است می‌شود

$$\begin{aligned} W \quad = \quad & \frac{(n + \frac{1}{2})\, h\, \omega_0}{2\, \pi} + \lambda\, \frac{3\, (n^2 + n + \frac{1}{2})\, h^2}{8 \cdot 4\, \pi^2\, \omega_0^2\, m} \\ & -\lambda^2\, \frac{h^3}{512\, \pi^3\, \omega_0^5\, m^2}(17\, n^3 + \frac{51}{2}\, n^2 + \frac{59}{2}\, n + \frac{21}{2}). \end{aligned} \tag{27}$$

(من نتوانستم ثابت کنم که همه‌ی ِ جمله‌ها ی ِ تناوبی صفر می‌شوند، امّا همه ی ِ جمله‌ها یی که حساب کردم صفر شدند.)

با وارد کردن ِ جمله ی ِ $\frac{1}{4} m \lambda x^4$ به عنوان ِ اختلال ی بر نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ، به کمک ِ رهیافت ِ کرامرز ـ بُرن هم می‌توان این انرژی را یافت. به نظر ِ من، این که به این ترتیب دقیقاً به معادله ی ِ (27) می‌رسیم تأیید ِ مهمّ ی است برا ی ِ معادله‌ها ی ِ کوانتمی ای که در این مقاله به عنوان ِ مبنا پذیرفته ایم. به علاوه، انرژی ای که از (27) حساب می‌شود معادله ی ِ زیر را بر می آورد (با (24) مقایسه کنید):

$$\frac{\omega(n, n-1)}{2\,\pi} = \frac{1}{h} \cdot [W(n) - W(n-1)]\,.$$

این معادله را می‌توان شرط ِ لازم برا ی ِ این دانست که تعیین ِ احتمال‌ها ی ِ گذار بر طبق ِ معادله‌ها ی ِ (11) و (16) ممکن باشد.

در پایان مورد ِ یک چرخنده را در نظر می‌گیریم و توجّه را به ارتباط ِ معادله‌ها ی ِ (7) و (8) با فرمول‌ها ی ِ شدّت برا ی ِ اثر ِ زیمان [5,f]، و برا ی ِ چندتایی‌ها [6] جلب می‌کنیم.

فرض کنید چرخنده الکترون ی باشد که در شعاع ِ ثابت ِ a دور ِ هسته ای می‌گردد. از معادله‌های ِ حرکت، چه کلاسیک چه کوانتمی، به ساده‌گی نتیجه می‌شود که الکترون در یک صفحه، رو ی ِ دایره ای به شعاع ِ a با سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ ω به طور ِ یک‌نواخت دور ِ هسته می‌چرخد. شرط ِ کوانتمی ی ِ (16)، بنا بر (12) می‌گوید

$$h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(2\pi m a^2 \omega\right),$$

و بنا بر (16) می‌گوید

$$h = 2\,\pi\,m\left\{a^2\,\omega(n+1, n) - a^2\,\omega(n, n-1)\right\},$$

که از این‌ها، در هر دو مورد، نتیجه می‌شود

$$\omega(n, n-1) = \frac{h\,(n + \mathrm{const})}{2\,\pi\,m\,a^2}.$$

این شرط که تابش در حالت ِ پایه $(n_0 = 0)$ باید صفر شود به رابطه ی ِ زیر منجر می‌شود.

$$\omega(n, n-1) = \frac{hn}{2\pi m a^2}. \tag{28}$$

انرژی هست

$$W = \frac{1}{2} m v^2,$$

یا، با توجّه به معادله‌ها ی ِ (7) و (8)

$$W = \frac{m}{2}\,a^2\,\frac{\omega^2(n, n-1) + \omega^2(n+1, n)}{2} = \frac{h^2}{8\pi^2 m a^2}(n^2 + n + \frac{1}{2}), \tag{29}$$

که باز هم شرط ِ

$$\omega(n,n-1) = (2\pi/h)\,[W(n) - W(n-1)]$$

را بر می‌آورد.

به عنوان ِ تأیید ی بر اعتبار ِ فرمول‌ها ی ِ (28) و (29) که با فرمول‌ها ی ِ نظریّه ی ِ متداول فرق می‌کنند، می‌توان چنین گفت: بنا بر کارهای ِ کْراتسِر[7]، به نظر می‌رسد طیف‌ها ی ِ بس‌نواری (شامل ِ طیف‌ها یی که برا ي شان وجود ِ تکانه ای برا ی ِ الکترون نامحتمل است) فرمول‌ها یی از نوع ِ (28) و (29) لازم باشد، و این چیز ی است که برا ی ِ آن که از شکست ِ نظریّه ی ِ کلاسیک ِ مکانیک اجتناب شود، تا کنون مجبور بوده ایم با توسّل به کوانتش ِ نیمه‌صحیح توضیح اش بدهیم.

برا ی ِ آن که به فرمول ِ گودسْمیت[g] ــ کْرُنیگ[h] ــ هُنْل[i] برا ی ِ چرخنده برسیم، باید حوزه ی ِ مسئله‌ها ی ِ با یک درجه ی ِ آزادی را ترک کنیم. فرض می‌کنیم چرخنده در فضا جهت ی دارد که خیل ی به‌آرامی حول ِ محور ِ z ِ یک میدان ِ خارجی پیش‌روی ی ِ $\mathfrak{v}$ دارد. فرض کنید عدد ِ کوانتمی ی ِ متناظر با این پیش‌روی m باشد. به این ترتیب این حرکت با معادله‌ها ی ِ زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{aligned} z\ :\quad & a(n,n-1;m,m)\ \cos\omega(n,n-1)t \\ x+iy\ :\quad & b(n,n-1;m,m-1)\ e^{i[\omega(n,n-1)+\mathfrak{v}]t}; \\ & b(n,n-1;m-1,m)\ e^{i[\omega(n,n-1)+\mathfrak{v}]t}. \end{aligned}$$

معادله‌ها ی ِ حرکت چنین اند:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

این معادله به دلیل ِ (7) منجر می‌شود به [8]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2}\,a^2(n,n-1;m,m) + b^2(n,n-1;m,m-1) + b^2(n,n-1;m,m+1) \\ +\frac{1}{2}\,a^2(n+1,n;m,m) + b^2(n+1,n;m-1,m) \\ +b^2(n+1,n;m+1,m)\Big\} = a^2. \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\,a(n,n-1;m,m)\,a(n-1,n-2;m,m) \\ & = b(n,n-1;m,m+1)\,b(n-1,n-2;m+1,m) \\ & +b(n,n-1;m,m-1)\,b(n-1,n-2;m-1,m). \end{aligned} \tag{31}$$

شرط ِ کوانتمی ی ِ (16) را هم داریم.

$$
\begin{aligned}
&2\,\pi\, m\,\big\{b^2(n,n-1;m,m-1)\,\omega(n,n-1)\\
&-b^2(n,n-1;m-1,m)\,\omega(n,n-1)\big\} = (m+\mathrm{const})h. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

روابط ِ کلاسیک ِ متناظر با این معادله‌ها عبارت اند از

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,a_0^2 + b_1^2 + b_{-1}^2 &= a^2;\\
\frac{1}{4}\,a_0^2 &= b_1\,b_{-1};\\
2\,\pi\, m(b_{+1}^2 - b_{-1}^2)\omega &= (m+\mathrm{const})h. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

این‌ها برا یِ تعیین ِ یکتا یِ a_0، b_1، و b_{-1} (تا حدّ ِ یک ثابت ِ نامعلوم که به m اضافه می‌شود) کافی اند.

ساده‌ترین حلّ ِ معادله‌ها یِ کوانتمی یِ (30)، (31)، و (32) که می‌توان دید این است:

$$
\begin{aligned}
b(n,n-1;m,m-1) &= a\sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m)}{4(n+\frac{1}{2})n}} \quad ;\\
b(n,n-1;m-1,m) &= a\sqrt{\frac{(n-m)(n-m+1)}{4(n+\frac{1}{2})n}} \quad ;\\
a(n,n-1;m,m) &= a\sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{(n+\frac{1}{2})n}} \quad ; \qquad (34)
\end{aligned}
$$

این عبارت‌ها با فرمول‌ها یِ گودسْمیت، کْرُنیگ، و هُنْل می‌خوانند. امّا، به ساده‌گی نمی‌توان دید که این عبارت‌ها تنها حلّ ِ معادله‌ها یِ (30)، (31)، و (32) اند؛ با این حال به نظر ِ من، با توجّه به شرط‌ها یِ مرزی، احتمالاً این حل یک‌تا است. (شرط‌ها یِ مرزی صفر شدن ِ a و b در 'مرز' اند؛ مقایسه کنید با مقاله‌ها یِ کْرُنیگ؛ زُمرفِلد[j] و هُنْل؛ و راسل که در ارجاع ِ قبل آمد.)

با به کار بردن ِ ملاحظات ی مشابه ِ چیزها یی که در بالا آمد در فرمول‌ها یِ شدّت ِ چندتایی، می‌بینیم این قاعده‌ها یِ شدّت با معادله‌ها یِ (7) و (16) می‌خوانند. این یافته را هم می‌توان تأیید دوباره ای بر اعتبار ِ معادله یِ سینماتیکی یِ (7) دانست.

در این مقاله روش ی برا یِ معیّن کردن ِ داده‌ها یِ کوانتمی ارائه دادیم که بر پایه یِ روابط ِ بین ِ کمیّت‌ها یِ مشاهده‌پذیر است. این که آیا چنین روش ی ارضاکننده هست، یا نه فقط رهیافت ِ بسیار خام ی است برا یِ ساختن ِ یک مکانیک ِ کوانتمی یِ نظری، (چیز ی که در حال ِ حاضر یک مسئله یِ بسیار سخت به نظر می‌رسد)؛ این را فقط با یک بررسی یِ عمیق‌تر ِ ریاضی یِ روش ی که در این جا خیلی سطحی به کار اش بردیم می‌توان تعیین کرد.

یادداشت‌ها

[1] H. A. Kramers, *Nature* **113** (1924) 673.

[2] M. Born, *Zs. f. Phys.* **26** (1924) 379. H. A. Kramers and W. Heisenberg, *Zs. f. Phys.* **31** (1925) 681. M. Born and P. Jordan, *Zs. f. Phys.* (زیر ِ چاپ) [**33** (1925) 479].

[3] نیز مقایسه کنید با مقاله ی ِ کرامرز و هَیزنبرگ، همان مرجع. در آن جا، این فازها به نحو ی اساسی وارد ِ عبارت‌ها می‌شوند تا گشتاور ِ القایی ی ِ پراکنده‌گی به دست آید.

[4] این رابطه پیش از این با توجّه به پاشنده‌گی توسّط ِ W. Kuhn (*Zs. Phys.* جلد ِ **33** (1925) ص 408) و W. Thomas (*Naturwiss.* جلد ِ **13** (1925) ص ٦٢٧) به دست آمده است.

[5] S. Goudsmit, R. de L. Kronig, *Naturwiss.* **13** (1925) 90; H. Hönl, Zs. f. Phys. **31** (1925) 340.

[6] R. de L. Kronig, *Zs. f. Phys.* **31** (1925) 885; A. Sommerfeld, H. Hönl, *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1925) 141; H. N. Russell, *Nature* **115** (1925) 835.

[7] مثلاً مقایسه کنید با

B. A. Kratzer, *Sitzungsber. d. Bayr. Akad.* (1922) p. 107.

[8] معادله ی ِ (30) اساساً همان قاعده ی ِ جمع ِ اُرنشتاین[k] ـ بورگِر[l] است.

نام‌ها ی ِ خاص

[a] Stark, [b] A. Einstein, [c] N. Bohr, [d] H. A. Kramers, [e] M. Born, [f] Zeeman,
[g] S. Goudsmit, [h] R. de L. Kronig, [i] H. Hönl, [j] A. Sommerfeld, [k] Ornstein, [l] Burger

فاینمن بالاخره معادله ی ِ حرکت ِ بشقاب ِ چرخان و لنگان را در آورد. 'می‌خواستم این حرکت را فقط از قانون‌ها ی ِ نیوتن بفهمم. می‌خواستم نیروها را ببینم، نه این که صرفاً لاگرانژی را بنویسم و معادله‌ها ی ِ حرکت را در آورم. می‌خواستم ببینم قانون‌ها ی ِ حرکت [ِ نیوتن] در مورد ِ قرص چه گونه اند.'

فاینمن پس از حل کردن ِ معادله‌ها ی ِ بشقاب ِ چرخان ـ لنگان، رفت به دفتر ِ بِته[1] و با شعف به او گفت: 'هِی، من چیز ِ قشنگ ی در باره ی ِ قرص فهمیده ام'؛ و به بِته گفت که در کافه‌تریا چه دیده بود و محاسبه‌ها یش را نشان داد. بِته پرسید: 'خُب، کجا ی ِ این مهم است؟' و فاینمن به او گفت که اهمیّت ِ خاص ی ندارند، امّا قشنگ اند. 'از این به بعد می‌خواهم فقط کارها یی بکنم که از آن‌ها لذّت می‌برم!'

Mehra, Jagdish: *The Beat of a Different Drum – The life and science of Richard Feynman*; Oxford University Press, 1994; p. 173.

[1] Hans A. Bethe