تولد ـ کوانتم‌مکانیک ـ جدید، به زبان ـ ام‌روزی[1]

محمّد ـ خرمّی e-mail: mamwad@mailaps.org X1-011 (2002/09/01)

این مقاله توصیف ی از نکته‌ها یِ برجسته یِ مقاله یِ مشهور ـ هَیزِن‌بِرگ [a] در 1925 است، که نقطه یِ شروع ـ کوانتم‌مکانیک ـ جدید به حساب می‌آید. این توصیف، به زبان ـ ام‌روزی بیان می‌شود.

0 مقدمه

در ژوئن ـ 1925، وِرنِر هَیزِن‌بِرگ [a] (که آن موقع در گُتینگِن [b] دست‌یار ـ ماکس بُرن [c] بود) برا یِ معالجه یِ بیماری یِ تب‌یونجه اَش به مرخصی رفت. در بازگشت مقاله ای آماده کرده بود که شکل ـ نهایی یِ آن را در نیمه یِ اول ـ ژوئیه به بُرن [c] سپرد تا اگر بُرن [c] چیز ـ جالب ی در آن دید چاپ شود. بُرن [c] فوراً تشخیص داد که این مقاله بسیار مهم است، و نه تنها آن را برای چاپ فرستاد، بل که خود َش و دست‌یار ـ دیگر َش (پاسکوال یُردان [d]) مشغول ـ کار رو یِ آن شدند. مقاله ای که این‌جا مرور َش می‌کنیم همان مقاله است [1]، که آن را نقطه یِ شروع ـ مکانیک ـ ماتریسی می‌دانند. ترجمه یِ این مقاله ی ـ هَیزِن‌برگ [a] در [2] آمده است. در این‌جا هدف آن است که نکته‌ها یِ اساسی یِ این مقاله به زبان ـ ام‌روزی باز شود [3].

1 سینماتیک

پرسش ی که در این‌جا مطرح است آن است که یک سیستم ـ فیزیکی را چه گونه مشخص کنیم. هَیزِن‌بِرگ [a] از این‌جا شروع می‌کند که تلاش برای ایجاد ـ یک نظریه یِ سازگار ـ کوانتمی (نَه یک مجموعه قاعده) بر اساس ـ کمیت‌ها یی که مشاهده‌پذیر نیستند، موفق نبوده است. در واقع در میانه یِ

[1] این مقاله، با اجازه ی ـ نویسنده، از منزل‌گاه ـ نویسنده برداشته شده شده است، و همه ی ـ حقوق ـ آن برا ی ـ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-011.ps

تابستان ـِ 1925، هنوز کس ی نمی‌دانست جای‌گزین ـِ قانون‌ها یِ نیوتُن [e] در کوانتم‌مکانیک چیست، و تصور بر این بود که این جای‌گزین باید برا یِ همان کمیت‌ها یی نوشته شود که در مکانیک ـِ کلاسیک با آن‌ها آشنا ییم، مثلاً باید رابطه‌ها یی برا یِ مکان ـِ الکترون در اتم پیدا شود. اولین گام ـِ هَیزِن‌بِرگ [a] در این مقاله کنارگذاشتن ـِ چیزها یی است که می‌گوید در آزمایش‌گاه مشاهده نشده اند. کس ی در آزمایش‌گاه مسیر ـِ الکترون را ندیده است، و تلاش برای بناکردن ـِ کوانتم‌مکانیک بر اساس ـِ مسیر ـِ الکترون ناموفق بوده است. پس به‌تر است آن را کنار بگذاریم. اما در کوانتم‌مکانیک هم، بس‌آمدها یِ گذار از یک حالت به یک حالت ـِ دیگر مشاهده‌پذیر اند. اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، باید بگوییم بس‌آمدها یی وجود دارند که مشاهده‌پذیر اند، و این‌ها را می‌شود به شکل ـِ ν_{kn} مرتب کرد، با این ویژه‌گی که

$$\nu_{kn} + \nu_{np} = \nu_{kp}. \qquad (1)$$

این یک مشاهده یِ تجربی بوده است (مثلاً در مورد ـِ بس‌آمد ـِ گذارها یِ اتمی). نمادگذاری یی که در این‌جا به کار رفته، اندک ی با نمادگذاری یِ مقاله یِ هَیزِن‌بِرگ [a] متفاوت است: به جا یِ $\nu(n, n-\alpha)$ در مقاله یِ اصلی، ν_{kn} به کار رفته است. این در واقع بس‌آمد ـِ گذار از حالت ـِ n به حالت ـِ $k = n - \alpha$ است. منظور از واژه یِ حالت در این‌جا، همان چیز ی است که امروز به آن ویژه‌حالت ـِ انرژی (یا همیلتنی) می‌گوییم.

به‌خاطر ـِ رابطه یِ (1)، بس‌آمدهایِ‌گذار را می‌شود این طور نوشت.

$$\nu_{kn} = \frac{1}{h}(E_n - E_k). \qquad (2)$$

این‌جا هم به جا یِ W در مقاله یِ اصلی، E به کار رفته است. ضمناً توجه دارید که ورود ـِ h (ثابت ـِ پْلانک [f]) در این‌جا کاملاً دل‌بخواه است. می‌شد به جا یِ کمیت ی با بعد ـِ انرژی (E_n)، از کمیت ی با بعد ـِ بس‌آمد (مثل ـِ $f_n := E_n/h$) استفاده کرد. آن چه در این‌جا حساب ـِ مکانیک ـِ کلاسیک را از کوانتم‌مکانیک جدا می‌کند، مانسته یِ رابطه یِ (2) در مکانیک ـِ کلاسیک (در واقع نظریه یِ شبهِ‌کلاسیک ی که تا آن موقع وجود داشت) است. در مکانیک ـِ کلاسیک،

$$\nu_{n;\alpha} = \alpha \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}n} =: \alpha\ \nu_n. \qquad (3)$$

در این‌جا n از رابطه یِ

$$J = nh \qquad (4)$$

به دست می‌آید، که J متغیر ـِ کنش است. α هم از $n - k = \alpha$ به دست می‌آید. برا یِ ساده‌گی، در کل ـِ این مقاله خود را به حرکت‌ها یِ یک‌بعدی یِ محدود (و در نتیجه دوره‌ای در مکانیک ـِ کلاسیک) محدود می‌کنیم.

چرا مانسته یِ کلاسیک ـِ (2) رابطه یِ (3) است؟ از دو جنبه می‌شود به آن نگاه کرد. اول این که اگر فرض کنیم حد ـِ کلاسیک یعنی حد ی که حالت‌ها پیوسته می‌شوند، و اگر گذارها یِ بین ـِ

دو حالت ِ نزدیک‌به‌هم را بررسی کنیم، آن وقت رابطه یِ (3) همان رابطه یِ (2) است، که در آن $E_k = E_{n-\alpha}$ را نسبت به α بسط داده ایم. این صورت ی از اصل ِ تناظر ِ بُر [g] است. جنبه یِ دوم این است که برا یِ یک حرکت ِ دوره‌ای، هر نوع تابش ی هم حتماً دوره‌ای (با همان دوره یِ حرکت) است. پس اگر بس‌آمد ِ حرکت ν_n باشد، بس‌آمدها یِ تابش هم‌آهنگ‌ها یِ ν_n اند. رابطه‌ها یِ (2) و (3)، ضمناً راه ی برا یِ رفت‌وآمد بین ِ مکانیک ِ کلاسیک و کوانتم‌مکانیک پیش می‌نهند:

$$\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} Q \leftrightarrow Q_n - Q_{n-\alpha}. \tag{5}$$

حالا بر گردیم سراغ ِ تعیین ِ مانسته یِ کوانتمی یِ مثلاً $X(t)$. برا یِ این کار بسط ِ فوریه [h] یِ آن را در نظر می‌گیریم. چون حرکت دوره‌ای است،

$$X_n(t) = \sum_\alpha X_{n;\alpha} \exp(-i\alpha\omega_n t). \tag{6}$$

در این‌جا n شاخص ِ حالت (J) است. می‌توان گفت X با مجموعه یِ کمیت‌ها یِ

$$X_{n;\alpha} \exp(-i\alpha\omega_n t) \tag{7}$$

تعیین می‌شود. در مقاله یِ اصلی، به جا یِ $X_{n;\alpha}$ نماد ِ $\mathfrak{A}_\alpha(n)$ به کار رفته است. دقت کنید که در این مجموعه همه یِ n ها وارد می‌شوند. بنابراین، این مجموعه خاص ِ حالت ِ معین ی نیست، در واقع این مجموعه متناظر است با مشاهده‌پذیر ِ X نَه مقدار ِ X برا یِ یک حالت ِ خاص ِ سیستم.

حالا می‌شود مانسته یِ (7) در کوانتم‌مکانیک را تعیین کرد، و این اولین کار ِ کلیدی یِ هَیزِن‌بِرگ [a] در مقاله است. او به جا یِ بس‌آمد ِ کلاسیک ِ $\alpha\nu_n$ بس‌آمد ِ کوانتمی یِ $\nu_n - \nu_{n-\alpha}$، و به جا یِ کمیت ِ $X_{n;\alpha}$ در مکانیک ِ کلاسیک کمیت ِ X_{kn} را می‌گذارد؛ در مقاله یِ اصلی با نماد ِ $\mathfrak{A}(n, n-\alpha)$. این کمیت و آن بس‌آمد، متناظر اند با گذار از حالت ِ n به حالت ِ $k = n - \alpha$. پس مانسته یِ (7) در کوانتم‌مکانیک می‌شود

$$X_{kn} \exp[-i(\omega_n - \omega_k)t]. \tag{8}$$

این شکل باید برا یِ آن‌ها یی که کوانتم‌مکانیک در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a] را دیده اند، کاملاً آشنا باشد. در واقع این چیز ی نیست مگر عنصر ِ ماتریسی یِ عمل‌گر ِ مکان در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a]، در پایه یِ انرژی:

$$X_{kn} \exp[-i(\omega_n - \omega_k)t] = \langle k| \exp\left(-\frac{tH}{i\hbar}\right) X \exp\left(\frac{tH}{i\hbar}\right) |n\rangle. \tag{9}$$

در این‌جا H عمل‌گر ِ همیلتنی است. البته توجه دارید که در تابستان ِ 1925 هیچ کس (حتا خود ِ هَیزِن‌بِرگ [a]) کوانتم‌مکانیک در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a] را بلد نبود. (و البته کس ی کوانتم‌مکانیک در تصویر ِ شْرُدینگِر [i] را هم بلد نبود.)

یک نکته یِ دیگر هم وجود دارد، که به حقیقی‌بودن ِ مکان مربوط است. شرط ِ این که طرف ِ چپ ِ (6) حقیقی باشد، آن است که $X_{n;\alpha}$ مزدوجِ‌مختلط ِ $X_{n;-\alpha}$ باشد. در واقع این شرط هم‌ارز

است با این که کمیت‌ها یِ (7)، دوبه‌دو مزدوجِ‌مختلط ـِ هم باشند. اعمال ـِ شرط ـِ مشابه ی بر (8)، نتیجه می‌دهد

$$X_{kn} = X_{nk}{}^{*}. \tag{10}$$

اما این هم برای آن‌ها یی که کوانتم‌مکانیک می‌دانند آشنا است. این یعنی ماتریس ـِ X اِرمیتی است.

برا یِ تکمیل ـِ نمایش ـِ مشاهده‌پذیرها در کوانتم‌مکانیک، باید راه ی برا یِ نمایش ـِ حاصلِ‌ضرب ـِ دو مشاهده‌پذیر هم پیدا می‌شد. (نمایش ـِ مجموع یک راه ـِ طبیعی دارد و آن استفاده از مجموع ـِ عبارت‌ها یِ نوع ـِ (7) یا (8) است.) برا یِ حاصلِ‌ضرب، دوباره به تبدیل ـِ فوریه [h] رو می‌آوریم. دو کمیت ـِ $X(t)$ و $Y(t)$ را در نظر بگیرید. روشن است که اگر این‌دو بسط‌ها یی مثل ـِ (6) داشته باشند، آن‌گاه

$$X_n(t)Y_n(t) = \sum_\alpha \sum_\beta X_{n;\alpha-\beta} \exp[-i(\alpha-\beta)\omega_n t] Y_{n;\beta} \exp(-i\beta\omega_n t). \tag{11}$$

پس XY را می‌شود با

$$(XY)_{n;\alpha} \exp(-i\alpha\omega_n t) := \sum_\beta X_{n;\alpha-\beta} \exp[-i(\alpha-\beta)\omega_n t] Y_{n;\beta} \exp(-i\beta\omega_n t) \tag{12}$$

نمایش داد. در این نمایش، در واقع عبارت‌ها یِ نمایش‌دهنده یِ X و Y را در هم ضرب کرده ایم و آن‌ها یی که بس‌آمد ِشان $\alpha\omega_n$ است را با هم جمع کرده ایم. همین کار را برا یِ کوانتم‌مکانیک انجام دهیم. $(XY)_{kn}$ باید از عنصرها یی ساخته شود که بس‌آمد ِشان $(\omega_n - \omega_k)$ است. اما

$$\omega_n - \omega_k = (\omega_n - \omega_p) + (\omega_p - \omega_k). \tag{13}$$

پس می‌شود مانسته یِ (11) در کوانتم‌مکانیک را چنین نوشت.

$$(XY)_{kn} \exp[-i(\omega_n - \omega_k)t] := \sum_p X_{kp} \exp[-i(\omega_p - \omega_k)t] Y_{pn} \exp[-i(\omega_n - \omega_p)t]. \tag{14}$$

ظاهراً کار تمام است، جز یک نکته یِ ظریف: بس‌آمد ـِ $(\omega_n - \omega_p)$ را به Y مربوط کرده ایم و بس‌آمد ـِ $(\omega_p - \omega_k)$ را به X. اگر نقش ـِ Y و X را عوض می‌کردیم چه می‌شد؟ هیچ، جز این که نتیجه یِ متفاوت ی به دست می‌آمد. ظاهراً یک $(XY)_{kn}$ داریم و یک $(YX)_{kn}$، که با هم فرق دارند! در مکانیک ـِ کلاسیک چنین نبود. اما یک بار ـِ دیگر به رابطه یِ (14) نگاه کنید. این چیز ی نیست جز این که عنصر ـِ ماتریسی یِ (XY) در واقع عنصر ـِ ماتریسی یِ حاصلِ‌ضرب ـِ ماتریس ـِ X در ماتریس ـِ Y است. هَیزِن‌بِرگ [a] جبر ـِ ماتریس‌ها را نمی‌دانست و این برا یَش عجیب بود. اما این چیز ی نبود که فرض شده باشد؛ بر اساس ـِ ملاحظه‌ها یی به دست آمده بود که ظاهراً هیچ ربط ی به ماتریس و موجودات ـِ جابه‌جانشونده نداشتند. ماتریس و جبر ـِ ماتریسی، بدون ـِ دعوت وارد ـِ کوانتم‌مکانیک شده بود. هَیزِن‌بِرگ [a] در آخرین پاراگراف‌ها یِ بخش ـِ 2 در مقاله اَش به این موضوع

(جابه‌جانشدن ـِ مشاهده‌پذیرها) اشاره می‌کند، برا یِ موارد ی دستورالعمل‌ها یی می‌دهد، و سپس از آن می‌گذرد، چون در بقیه یِ مقاله مستقیماً به جابه‌جانشونده‌ها کار ی ندارد.

به زبان ـِ ام‌روزی، آن چه تا این‌جا به دست آمده (در واقع پیش‌نهاد شده) این است که هر مشاهده‌پذیر را باید با یک ماتریس نمایش داد. به همین خاطر بعداً به این نظریه مکانیک ـِ ماتریسی گفتند.

2 دینامیک

بر خلاف ـِ آن چه از عنوان ـِ این بخش بر می‌آید، این‌جا پرسش ـِ اصلی مستقیماً به‌دست‌آوردن ـِ معادله یِ تحول نیست. هدف به‌دست‌آوردن ـِ نوع ی رابطه یِ کوانتش است که جا یِ رابطه‌هایِ کوانتش ـِ قدیمی یِ بُر [g]ـ زُمرفِلد [j] را بگیرد. نقطه یِ شروع ـِ هَیزِنبِرگ [a] برا یِ دینامیک، رابطه یِ (4) است (همان رابطه یِ قدیمی یِ بُر [g]ـ زُمرفِلد [j])، که البته در نظریه یِ قدیمی (یا شبهِ‌کلاسیک) به کار می‌رود. متغیر ـِ کنش عبارت است از

$$J = \oint p\ \mathrm{d}q, \tag{15}$$

که در آن q متغیر ـِ مکان، و p تکانه یِ مزدوج ـِ آن است، و انتگرال‌گیری رو یِ یک دوره یِ حرکت انجام می‌شود. حالا به جا یِ q همان $X(t)$ در رابطه یِ (6)، و به جا یِ p هم $m\dot{X}$ می‌گذاریم. (m جرم ـِ ذره است.) نتیجه می‌شود

$$J = 2\pi m \sum_{\alpha} \alpha^2 \omega_n |X_{n;\alpha}|^2. \tag{16}$$

در کوانتم‌مکانیک ـِ قدیمی، طرف ـِ چپ را برابر ـِ nh (با n برابر ـِ یک عدد ـِ صحیح) می‌گرفتند و این شرط ـِ کوانتش بود. هَیزِنبِرگ [a] می‌گوید این شرط طبیعی نیست، چون حتا بر اساس ـِ اصل ـِ تناظر هم لزوم ی ندارد J مضرب ـِ درست ی از h باشد، کافی است تفاضل ـِ مقدارها یِ مجاز ـِ متغیر ـِ کنش مضرب ـِ درست ی از h باشد، یا

$$J_n = (n + a)h. \tag{17}$$

آن‌ها یی که با تقریب ـِ WKB آشنا هستند، می‌دانند در خیل ی از موارد مقدار ـِ ثابت ـِ a در واقع برابر است با $1/2$. هَیزِنبِرگ [a] برا یِ خلاص‌شدن از این ثابت ـِ نامعلوم، از رابطه یِ (16) نسبت به n مشتق می‌گیرد. (توجه دارید که اگر n عدد ـِ صحیح ی باشد، نمی‌شود نسبت به آن مشتق گرفت. هَیزِنبِرگ [a] اول در قالب ـِ نظریه یِ شبهِ‌کلاسیک مشتق می‌گیرد، بعد مانسته یِ کوانتمی را می‌نویسد و n را صحیح می‌گیرد.) نتیجه می‌شود

$$h = 2\pi m \sum_{\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} (\alpha^2 \omega_n |X_{n;\alpha}|^2). \tag{18}$$

البته در مقاله ي اصلی، شکل ِ

$$h = 2\pi m \sum_\alpha \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(\alpha\omega_n |X_{n;\alpha}|^2) \tag{19}$$

به کار رفته است. علت ِ آن هم روشن است. قرار است از نسخه ي (5) و تناظر ِ (2) با (3) استفاده شود. در واقع یک مزیت ِ این عبارت به رابطه يِ (4) هم همین است که برا يِ رابطه يِ (19) به‌ساده‌گی می‌شود مانسته يِ کوانتمی به دست آورد.

استفاده از این تناظرها مقدار ی ظرافت لازم دارد. با استفاده از این‌ها، هَیزِنبِرگ [a] شکل ِ کوانتمی يِ رابطه يِ بالا را چنین می‌نویسد.

$$h = 2\pi m \sum_\alpha (\omega_{n,n+\alpha}|X_{n,n+\alpha}|^2 - \omega_{n-\alpha,n}|X_{n-\alpha,n}|^2). \tag{20}$$

ظرافت ی که از آن صحبت شد در این است که وقت ی دیفرانسیل را به تفاضل ِ محدود تبدیل می‌کنیم، امکان‌ها يِ مختلف ی داریم؛ می‌شود تفاضل ِ پیش‌رو گرفت، تفاضل ِ پس‌رو گرفت، یا تفاضل ِ متقارن. از رابطه يِ (10)، ضمناً معلوم است که با تبدیل ِ α به $-\alpha$، جمله يِ اول ِ درون ِ کروشه يِ بالا به جمله يِ دوم (با علامت ِ منفی يَش) تبدیل می‌شود. بنابراین در عبارت ِ بالا می‌شود فقط رو يِ α ها يِ مثبت جمع زد و نتیجه را دوبرابر کرد:

$$h = 4\pi m \sum_{\alpha>0} (\omega_{n,n+\alpha}|X_{n,n+\alpha}|^2 - \omega_{n-\alpha,n}|X_{n-\alpha,n}|^2). \tag{21}$$

این در واقع همان رابطه يِ (16) در مقاله يِ اصلی است، جز این که چون هَیزِنبِرگ [a] بس‌آمدها را مثبت می‌گیرد، شاخص‌ها يِ ω در جمله يِ دوم جابه‌جا هستند.

این رابطه هم که با تعمیم و حدس و $\cdots$ به دست آمد، در واقع یک رابطه يِ دقیق ِ کوانتمی است. برا يِ این که این را به‌تر ببینید، از همان شکل ِ (20) استفاده کنیم و آن را چنین بنویسیم.

$$h = 2\pi m \sum_k (\omega_{nk}|X_{nk}|^2 - \omega_{kn}|X_{kn}|^2). \tag{22}$$

برا يِ به‌دست‌آوردن ِ این رابطه با کوانتم‌مکانیک ِ جدید، کافی است عبارت ِ $\langle n|[X,[X,H]]|n\rangle$ را به دو طریق حساب کنیم. یک ی با استفاده از

$$[X,[X,H]] = \frac{i\hbar}{m}[X,P] = \frac{(i\hbar)^2}{m}, \tag{23}$$

و یک ی با گنجاندن ِ

$$1 = \sum_k |k\rangle\langle k| \tag{24}$$

بین ِ عامل‌ها يِ X و $[X,H]$، و استفاده از

$$\langle k|[X,H]|n\rangle = (E_n - E_k)X_{kn}. \tag{25}$$

هَیزِنبِرگ [a] به این رابطه یِ دینامیکی یک شرط ـ مرزی هم می‌افزاید، و آن این که اگر حالت ـ (یا تراز ـ) n_0 حالت ـ پایه باشد، آن‌گاه دامنه یِ گذار از آن به حالت‌ها یِ $n_0 - \alpha$ (با $\alpha > 0$) صفر است، چون این حالت‌ها یِ اخیر در واقع وجود ندارند.

3 مثال ـ نوسان‌گر ـ هم‌آهنگ

هَیزِنبِرگ [a] در واقع خود َ ش را به نوسان‌گر ـ هم‌آهنگ محدود نمی‌کند؛ نوسان‌گرها یِ ناهم‌آهنگ را هم بررسی می‌کند، البته به طور ـ اختلالی، و سراغ ـ مسئله یِ چرخنده هم می‌رود. اما برای ساده‌شدن ـ بحث، فقط نوسان‌گر ـ هم‌آهنگ را در نظر می‌گیریم. از معادله‌یِ‌حرکت ـ

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \tag{26}$$

نتیجه می‌شود

$$X_n(t) = A \exp(-i\omega t) + A^* \exp(i\omega t). \tag{27}$$

دیده می‌شود در این حالت فقط یک بس‌آمد در X وجود دارد. یعنی فقط $X_{n;\pm1}$ مخالف ـ صفر است. ترجمه یِ این به زبان ـ کوانتمی یعنی فقط $X_{n\mp1,n}$ مخالف ـ صفر است. معادله یِ (26) برا یِ عنصرها یِ ماتریسی یِ X در کوانتم‌مکانیک هم برقرار است. پس معلوم می‌شود بس‌آمد ـ آن‌ها هم $\pm\omega$ است. یعنی مشاهده‌پذیرها عبارت اند از

$$X_{n\mp1,n} \exp(\mp i\omega t). \tag{28}$$

حالا این‌ها را در رابطه یِ (21) می‌گذاریم. فقط یک جمله از این سری غیرِصفر است، جمله یِ $\alpha = 1$. نتیجه می‌شود

$$|X_{n,n+1}|^2 - |X_{n-1,n}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}. \tag{29}$$

با این رابطه یِ بازگشتی، عنصرها یِ ماتریسی به‌ساده‌گی به‌دست می‌آیند:

$$|X_{n-1,n}|^2 = \frac{(n+a)\hbar}{2m\omega}, \tag{30}$$

که در آن a یک ثابت ـ نامعلوم است. این ثابت از این‌جا به دست می‌آید که

$$X_{n_0-1,n_0} = 0. \tag{31}$$

که در آن n_0 حالت ـ پایه است. اگر قرارداد کنیم $n_0 = 0$، معلوم می‌شود ثابت ـ a در (30) برابر ـ صفر است. پس

$$|X_{n-1,n}|^2 = \frac{n\hbar}{2m\omega}. \tag{32}$$

این رابطه برا یِ آن‌ها یی که مسئله یِ نوسان‌گر ـِ هم‌آهنگ در کوانتم‌مکانیک را دیده اند، کاملاً آشنا است. اما از این‌جا ضمناً می‌شود عنصرها یِ ماتریسی یِ انرژی (همیلتنی) را هم به دست آورد. داریم

$$\begin{aligned} H_{kn} &= \frac{m}{2}\sum_p \dot{X}_{kp}\dot{X}_{pn} + \frac{m\omega^2}{2}\sum_p X_{kp}A_{pn}, \\ &= \frac{m}{2}\sum_p (\omega^2 - \omega_{kp}\omega_{pn})X_{kp}X_{pn}. \end{aligned} \tag{33}$$

حالا توجه کنید که $X_{kp} = 0$، مگر آن که $|k-p| = 1$. از این‌جا نتیجه می‌شود $H_{kn} = 0$، مگر این که $k = n$، یا $|k-n| = 2$. اما در حالت ـِ اخیر، تنها به ازای $p = (k+n)/2$ است که X_{kp} و X_{pn} هر دو غیرِصفر اند، و در این صورت $\omega_{mp}\omega_{pn} = \omega^2$، و این نتیجه می‌دهد در این حالت هم $H_{kn} = 0$. پس فقط جمله‌ها یِ قطری یِ ماتریس ـِ H غیرِصفر اند. برا یِ این‌ها،

$$\begin{aligned} H_{nn} &= m\omega^2(X_{n,n+1}X_{n+1,n} + X_{n,n-1}X_{n-1,n}), \\ &= m\omega^2(|X_{n,n+1}|^2 + |X_{n-1,n}|^2), \end{aligned} \tag{34}$$

یا با استفاده از (32)،

$$H_{kn} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\delta_{kn}. \tag{35}$$

این دقیقاً همان چیز ی است که از کوانتم‌مکانیک ـِ جدید می‌آید. انتظار می‌رود انرژی در پایه یِ انرژی قطری باشد، این چیز ی است که به زبان ـِ هَیزِن‌بِرگ [a] می‌شود صفرشدن ـِ جمله‌ها یِ وابسته‌به‌زمان، یا پایسته‌گی یِ انرژی. توجه دارید که در کوانتم‌مکانیک ـِ جدید هم، ماتریس ـِ متناظر با انرژی، در تصویر ـِ هَیزِن‌بِرگ [a] هم به زمان بسته‌گی ندارد. عنصرها یِ قطری یِ ماتریس انرژی‌ها یِ ترازها هستند:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{36}$$

و توجه کنید که انرژی یِ حالتِ‌صفر هم درست به دست آمده است.

4 تولد ـِ کوانتم‌مکانیک ـِ جدید

چه قدر از کوانتم‌مکانیک ـِ جدید در این مقاله وجود دارد؟ این که مشاهده‌پذیرها با ماتریس‌ها (یا عمل‌گرها) یِ اِرمیتی نمایانده می‌شوند، در این مقاله آمده است. این که مشاهده در کوانتم‌مکانیک یعنی چه، هیچ صحبت ی از آن نیست. در مورد ـِ دینامیک هم راه ـِ شسته‌رفته ای پیش‌نهاد نشده. رابطه یِ

(22) یک رابطه ي دقیق ـ کوانتمی است، اما هنوز هیچ نشانه ای از تحول ـ زمانی با استفاده از همیلتنی (معادله يِ هَیزِنبِرگ [a]) دیده نمی‌شود. با این وجود، همین که مشاهده‌پذیرها ماتریس شدند و به جا يِ رابطه يِ بین ـ کمیت‌ها يِ عددی رابطه يِ بین ـ کمیت‌ها يِ ماتریسی نوشته شد، راه ی باز کرد که تکلیف ـ کوانتم‌مکانیک را طی ـ فقط چند ماه پس از آن روشن کرد.

5 مرجع‌ها و یادداشت‌ها

[1] W. Heisenberg; Zeitschrift für Physik **33** (1925) 879–893

[۲] این ترجمه در گاما، ش. ۲، بهار ـ ۱۳۸۳، صص. ۵ تا ۲۰ چاپ شده است.

[۳] در سراسر ـ این متن، منظور از کوانتم‌مکانیک ـ جدید همان کوانتم‌مکانیک ـ پس از 1925 است. منظور از کوانتم‌مکانیک ـ قدیمی هم مجموعه يِ قاعده‌ها یی است که پیش از این تاریخ وجود داشت و برا يِ توصیف ـ بعض ی از سیستم‌ها به کار می‌رفت، از جمله قاعده‌هاي‌کوانتش ـ بُر [g]ـ زُمِرفِلد [j].

6 اسم‌ها يِ خاص

[a] Werner Heisenberg

[b] Göttingen

[c] Max Born

[d] Pascual Jordan

[e] Newton

[f] Planck

[g] Bohr

[h] Fourier

[i] Schrödinger

[j] Sommerfeld