ناظر در نسبیت ـِ خاص و عام

احمد ـِ شریعتی

در این مقاله توضیح داده می‌شود که منظور از ناظر در نسبیت ـِ خاص و عام چیست، ناظر ـِ نقطه‌ای چیست، ناظر ـِ گسترده چیست، و هم‌زمان کردن ـِ ساعت‌های ـِ مختلف چه نقش ی در تعریف ـِ ناظر ـِ گسترده دارد. در این نوشته فرض بر این است که خواننده نسبیّت خاص، و کم ی نسبیّت ـِ عام و هندسه ی ـِ دیفرانسیل می‌داند.

1 مقدّمه

هر کتاب ـِ نسبیت ـِ خاص ی را که باز کنید، می‌بینید بخش ی از کتاب در باره‌ی ـِ ناظرها است ـــ این که قانون‌های ـِ فیزیک برای ـِ همه‌ی ـِ ناظرهای ـِ لخت شکل ـِ یک‌سان ی دارند؛ این که سرعت ـِ نور نسبت به همه‌ی ـِ ناظرهای ـِ لخت یک مقدار (c) است؛ و این که قانون‌های ـِ فیزیک از دید ـِ ناظرهای ـِ شتاب‌دار (= نالخت) همان نیست که از دید ـِ ناظرهای ـِ لخت هست. اما مفهوم ـِ ناظر مفهوم ی است که دقت نکردن در ظرایف ـِ آن باعث ـِ فهم ـِ ناقص و بعضاً نادرست ـِ نسبیت می‌شود. این مطلب تاریخ ی نسبتاً طولانی دارد. برای ـِ برخ ی اطلاعات ـِ تاریخی و هم‌چنین آشنایی با کارهای ـِ جدید و فهرست ی از مراجع، می‌توانید به [1] مراجعه کنید.

در این مقاله سعی می‌کنیم نکته‌های ـِ اصلی ی ـِ تعریف ـِ ناظر را روشن کنیم. کسان ی که هندسه ی ـِ دیفرانسیل می‌دانند می‌توانند سُرایش ـِ کامل‌تر ی از این مقاله را در منزل‌گاه ـِ من [1] پیدا کنند.

2 فضا + زمان

یادآوری می‌کنیم که منظور از یک روی‌داد اتفاق ی است که در جا یی از فضا در لحظه ای از زمان روی داده است ـــ مثلاً انفجار ـِ یک دینامیت، جذب ـِ یک فوتون توسط ـِ یک اتم، یا برخورد ـِ دو ذره به هم ـــ و منظور از فضازمان مجموعه‌ی ـِ همه‌ی ـِ روی‌دادها است. البته منظور مجموعه‌ی ـِ همه‌ی ـِ روی‌دادها یی که واقعاً روی داده اند نیست، منظور مجموعه‌ی ـِ همه‌ی ـِ روی‌دادها یی است که علی‌الاصول می‌توانسته اند، یا خواهند توانست، روی بدهند. اگر فضا یی که در آن زنده‌گی می‌کنیم

[1] http://staff.alzahra.ac.ir/shariati

بی‌کران باشد (در واقع اگر $\mathbb{R}^3$ باشد)، و زمان هم ازلی و ابدی باشد (یعنی t بین ـ $-\infty$ و ∞ باشد)، در آن صورت فضازمان همان مجموعه‌ی ـ $\mathbb{R}^4$ است: 1 مختصه برای ـ ثبت ـ زمان ـ روی‌دادن ـ یک روی‌داد، و 3 مختصه برای ـ ثبت ـ مکان ـ آن.

اکنون فرض کنید E و E' دو روی‌داد باشند. می‌پرسیم:

i) فاصله‌ی ـ زمانی ی ـ بین ـ E و E' چه قدر است؟

ii) فاصله‌ی ـ مکانی ی ـ بین ـ E و E' چه قدر است؟

تا پیش از گالیلِئو[1] و نیوتن[2] ، تصور ـ غالب ـ فیزیک‌پیشه‌ها و فیلسوف‌ها این بود که پاسخ ـ این دو پرسش یک‌تا و مستقل از ناظر است. چنین فضازمان ی را می‌توان فضازمان ـ ارستویی[3] نامید. فضازمان ـ ارستویی، $\mathbb{A}$، همان $\mathbb{R}^4$ است به هم‌راه ـ دو نگاشت ـ T و d، که اول ی فاصله‌ی ـ زمانی ی ـ دو روی‌داد، و دوم ی فاصله ی ـ مکانی ی ـ آن دو را می‌دهد.

با ظهور ـ فیزیک ـ نیوتنی، فضازمان ـ ارستویی از اعتبار افتاد و جای ـ آن را فضازمان ـ گالیله‌ای، $\mathbb{G}$، گرفت. این فضازمان هم همان $\mathbb{R}^4$ است، و رو ی ـ آن هم دو نگاشت ـ T و d تعریف شده است، اما در این فضازمان فقط فاصله ی ـ مکانی ی ـ روی‌دادهای ـ هم‌زمان معنی دارد. (برا ی ـ یک بحث ـ نسبتاً مبسوط راجع به فضازمان ـ گالیله‌ای به فصل ـ 1 ـ کتاب ـ آرنُلد [2] رجوع کنید.)

نظریه ی ـ نسبیت ـ خاص ـ اینشتین[4] فضازمان ـ مینکُفسکی[5] را جانشین ـ $\mathbb{G}$ کرد. فضازمان ـ مینکُفسکی، $\mathbb{M}$، همان $\mathbb{R}^4$ است به هم‌راه ـ بازه ی ـ لرنتسی ی ـ زیر

$$\Delta(E,E') = -c^2\,(t-t')^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2. \tag{1}$$

این بازه، که برا ی ـ هر دو روی‌داد ـ $E=(t,x,y,z)$ و $E'=(t',x',y',z')$ تعریف می‌شود، ممکن است مثبت، منفی، یا صفر باشد. نسبیت ـ خاص ـ اینشتین می‌گوید که پاسخ ـ هر دو سؤال ـ بالا (i و ii) به ناظر بسته‌گی دارد، به این ترتیب که در نسبیت ـ خاص دسته ای خاص از ناظرها، موسوم به ناظرها ی ـ لخت، از بقیه ی ـ ناظرها متمایز اند. هر ناظر ـ لخت می‌تواند به دو سؤال ـ بالا جواب بدهد، اما این جواب‌ها با جواب‌ها یی که یک ناظر ـ لخت ـ دیگر می‌دهد فرق دارند (با یک تبدیل ـ لرنتس[6] به هم مربوط اند). آن چه اینک روی اش تأکید می‌کنیم این است که هر ناظر ـ لخت ی یک زمان ـ جهانی تعریف می‌کند، نگاشت ی که به کمک ـ آن می‌تواند در باره ی ـ هم‌زمان بودن یا تقدّم و تأخّر ـ زمانی ی ـ روی‌دادها صحبت کند.

نظریّه ی ـ نسبیّت ـ عام اینشتین فضازمان ـ مینکُفسکی را هم از اعتبار انداخت. بر طبق ـ نظریّه ی ـ نسبیّت ـ عام، فضازمان یک خمینه ی ـ 4 بعدی ی ـ لرنتسی است، یعنی یک مجموعه ی ـ 4 بعدی که موضعاً شبیه ـ فضازمان ـ مینکُفسکی ی ـ $\mathbb{M}$ است؛ درست به همان نحو ی که هر رویه ی ـ 2 بعدی ی ـ هموار ی موضعاً شبیه ـ صفحه ی ـ اقلیدسی است. به بیان ـ دقیق‌تر، خمینه ی ـ لرنتسی یعنی خمینه ای که رو ی ـ آن یک متریک ـ شبه ـریمانی با علامت ـ $(-+++)$ تعریف شده باشد. به کمک ـ این متریک می‌توان اوّلاً در هر نقطه از خمینه اندازه ی ـ بردارها را تعیین کرد (اندازه ای که مجذور اش ممکن است مثبت، منفی، یا صفر باشد)؛ ثانیاً می‌توان فاصله ی ـ فضازمانی ی ـ بین ـ روی‌دادها را

تعیین کرد (فاصله ای که اوّلاً مجذور اش ممکن است منفی، مثبت، یا صفر باشد؛ ثانیاً معمولاً فرمول ِ تر و تمیز ی مثل ِ (1) ندارد.)

3 ناظر ِ نقطه‌ای

یک سفینه ی ِ فضایی ی ِ کوچک در نظر بگیرید (کوچک در مقایسه با شعاع ِ خمش ِ فضازمان). فضانورد ِ تو ی ِ این سفینه چه ابزارها یی در اختیار دارد؟ حتماً یک ساعت ِ خیلی دقیق دارد، مثلاً یک ساعت ِ اتمی. به کمک ِ این ساعت ِ اتمی می‌تواند واحد ِ زمان، یعنی ثانیه را تعریف کند. (اگر دوست داشته باشد واحد های SI را به کار ببرد، 1 ثانیه را برابر با تعداد ِ خاصّ ی نوسان ِ اتم ِ سزیم در یک وضعیّت ِ خاص تعریف می‌کند.)

خود ِ سفینه اتاقک ی است حتی‌المقدور محکم (صلب). دیواره‌ها ی ِ اتاقک ِ سفینه محورها ی ِ مختصّات ی را که فضانورد برا ی ِ ثبت و تجزیه و تحلیل ِ داده‌ها به کار می‌برد مشخّص می‌کنند. ناظر ِ درون ِ سفینه باید بتواند فاصله ی ِ نقطه‌ها ی ِ مختلف ِ درون ِ سفینه را بسنجد. به بیان ِ دیگر، در درون ِ سفینه باید خط‌کش‌ها یی باشد که ناظر بتواند با آن‌ها فاصله ی ِ ذرّه‌ها ی ِ مادّی ی ِ درون ِ سفینه را بسنجد. طول ِ خود ِ این خط‌کش‌ها باید ثابت باشد. نسبیّت ِ خاص یک روش ِ مفهوماً ساده برا ی ِ سنجش ِ فاصله ی ِ نقاط ِ درون ِ سفینه ارائه می‌دهد: فاصله ی ِ دو نقطه ی ِ A و B را با سنجیدن ِ زمان ی که طول می‌کشد نور از A به B برود و برگردد می‌سنجیم، به این ترتیب که اگر این زمان T ثانیه باشد، فاصله ی ِ A تا B می‌شود $cT/2$، که در این جا $c = 299,792,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. در واقع با ثابت گرفتن ِ سرعت ِ نور و تعریف ِ ثانیه، متر را تعریف می‌کنیم. (این همان کار ی است که رو ی ِ زمین واقعاً کرده ایم. تعریف ِ متر در دستگاه ِ SI این است: متر مسافت ی است که نور در مدت ِ $(1/299,792,458)\,\mathrm{s}$ می‌پیماید.)

ناظر ِ درون ِ سفینه باید بتواند (و می‌تواند) تشخیص دهد که آیا سفینه اش یک دستگاه ِ لخت است یا نالخت. برا ی ِ این کار از دو وسیله استفاده می‌کند: شتاب‌سنج و ژیرُسکُپ. شتاب‌سنج عبارت است از یک جسم ِ نقطه‌ای به جرم ِ m که به آن یک نیروسنج وصل شده است. (این نیروسنج عبارت است از تعداد ی فنر که جسم را در راستاها ی ِ مختلف گرفته اند. سر ِ دیگر ِ فنرها به نقطه‌ها یی ثابت در سفینه وصل شده است. اگر سفینه شتاب بگیرد، وضعیت ِ این جسم نسبت به سفینه تغییر می‌کند، پس فنرها به این جسم نیروها یی وارد می‌کنند و در نتیجه کش می‌آیند یا فشرده می‌شوند.) شتاب‌سنج دستگاه ی است که چنان نیرو یی به جسم ِ m وارد می‌کند که وضعیت ِ نسبی ی ِ آن با سایر ِ اجسام ِ درون ِ سفینه تغییر نکند، و این نیرو را می‌سنجد (هم راستا و هم اندازه ی ِ این نیرو را می‌سنجد). اگر این نیرو $\mathbf{F}$ باشد، شتاب ی که سفینه می‌گیرد برابر است با $\mathbf{F}/m$. ژیرسکپ هم عبارت است از سه جسم ِ صلب ِ گِرد (کروی) که هر کدام دور ِ یک ی از محورها ی ِ شان می‌چرخند — سه محور ِ مستقل که می‌توان آن‌ها را عمود بر هم گرفت. اگر راستا ی ِ این محورها نسبت به دیواره‌ها ی ِ سفینه

تغییر کند، ناظر می‌فهمد که سفینه دارد می‌چرخد.

پیش از ادامه ی ِ بحث توجه ِ خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که تا کنون هیچ چیز راجع به سنجش ِ فاصله ی ِ اجسام ِ دور از سفینه نگفته ایم. در مورد ِ اشیاء ِ بیرون از سفینه: ناظر ِ درون ِ سفینه قاعدتاً تلسکُپ و تئودولیت‌ها یی دارد که می‌تواند با آن‌ها اشیاء ِ دور و نزدیک را رصد کند. معنی ی ِ رصد کردن این است که ۱) می‌تواند زاویه ی ِ پرتوها یی را که از اشیاء ِ دور و نزدیک می‌آیند با محورها ی ِ اتاقک ِ سفینه اش، و در نتیجه با هم، بسنجد؛ ۲) می‌تواند طیف ِ نور ِ پرتوها ی ِ رسیده به تلسکپ را بسنجد. ضمناً، رصد کردن محدود به نور، یعنی امواج ِ الکترومغناطیسی نیست — علی‌الاصول ممکن است سفینه به آشکارسازها یی برا ی ِ ذرّه‌ها ی ِ مادّی (الکترون، پوزیترون، پرتون، پادپرتون، نوترینو ...) هم مجهز باشد.

وسیله ی ِ دیگر ی که فضانورد می‌تواند در اختیار داشته باشد رادار است — وسیله ای برا ی ِ فرستادن ِ امواج ِ رادیویی (نور) به طرف ِ اشیاء ِ دورو‌بر اش و ثبت ِ دقیق ِ زمان و طیف ِ پرتوها یی که فرستاده می‌شوند، و ثبت ِ دقیق ِ زمان و طیف ِ پرتوها یی که پس از بازتابیدن از این اشیاء دوباره به سفینه می‌رسند.

همه ی ِ ابزارها یی که نام بردیم در داخل ِ سفینه است.

ناظر ِ نقطه‌ای ایده‌آل‌ساز ی ِ سفینه ای است که ویژه‌گی‌ها یش را بر شمردیم. در هر فضازمان ی — خواه فضازمان ِ مینکُفسکی باشد، یا فضازمان ِ شوارتس‌شیلد[7] ِ اطراف ِ یک ستاره، یا فضازمان ِ فریدمان[8] ِ یک مدل ِ کیهان‌شناختی، یا هر فضازمان ِ دیگر ی— ناظر ِ نقطه‌ای با یک خم ِ زمان‌گونه (γ) و سه میدان ِ بردار ی ِ فضاگونه ی ِ عمود بر این خم $(e_1$، e_2، و $e_3)$ که رو ی ِ این خم تعریف شده اند، مشخص می‌شود. تنها قید ی که رو ی ِ این γ هست این است که باید زمان‌گونه باشد (به این معنی که چاربردار ِ مماس بر آن همواره زمان‌گونه باشد). ساعت ی که در درون ِ سفینه هست، معمولاً ویژه‌زمان ِ متناظر با این جهان‌خط، یعنی τ را نشان می‌دهد (هر چند ممکن است یک تابع ِ اکیداً صعودی از τ را نشان بدهد). سه میدان ِ بردار ی ِ $e_1(\tau)$، $e_2(\tau)$، و $e_3(\tau)$ در واقع امتداد ِ دیواره‌ها ی ِ سفینه را مشخص می‌کنند. دقت کنید که این سه «میدان ِ برداری» فقط رو ی ِ خم ِ γ تعریف شده اند، و نه در هم‌سایه‌گی ی ِ γ.

معمولاً فرض می‌کنیم ناظر نمی‌چرخد، که یعنی دیواره‌ها ی ِ سفینه نسبت به محورها یی که ژیرسکپ‌ها مشخص می‌کنند نمی‌چرخند. اگر ناظر چرخان باشد، آن وقت می‌توان یک ناظر ِ دیگر در نظر گرفت که جهان‌خط اش دقیقاً همان جهان‌خط ِ ناظر ِ چرخان باشد ولی نچرخد. به این ناظر، ناظر ِ ناچرخان ِ هم‌راه می‌گوییم. مثال ِ زمین روشن‌کننده است: می‌دانیم زمین به دور ِ محور اش می‌چرخد، و ضمناً مرکز ِ جرم ِ زمین در فضا رو ی ِ یک بیضی حرکت می‌کند. ناظر ِ ناچرخان ِ هم‌راه ِ زمین ناظر ی است که مبداء ِ مختصات اش مرکز ِ زمین است، رو ی ِ همان بیضی حرکت می‌کند، اما از محورها یی استفاده می‌کند که همواره به سمت ِ ستاره‌ها ی ِ ثابت ی قرار دارند.

این که e_i ها امتداد ِ دیواره‌ها ی ِ سفینه را مشخص می‌کنند به این معنی است که بر چاربردار ِ سرعت ِ سفینه — که بر خم ِ γ مماس است— به معنی ی ِ مینکُفسکی عمود اند. اگر چاربردار ِ

سرعت ـ سفینه را بر طول اش تقسیم کنیم، چاربردار ی به دست می‌آید که آن را e_0 می‌نامیم. (چاربردار ـ سرعت زمان‌گونه است، یعنی «مجذور» ـ طول اش منفی است. منظور از طول ـ یک چاربردار ـ زمان‌گونه، جذر ـ قدر ـ مطلق ـ «مجذور ـ طول» ـ آن است.) به این ترتیب چهار تا چاربردار داریم که ناظر را مشخص می‌کنند، و این چهار چاربردار در شرط‌ها ی ـ زیر صدق می‌کنند.

$$\langle e_0, e_0\rangle = -1, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle e_0, e_i\rangle = 0. \tag{2}$$

به این چهار چاربردار، چارپایه می‌گویند. خلاصه آن که در داخل ـ سفینه، روابط ـ فضازمانی ی ـ نسبیت ـ خاص برقرار است، که می‌گویند:

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3}$$

در این جا t زمان ی است که ساعت ـ تو ی ـ سفینه نشان می‌دهد، و x و y و z مختصه‌ها ی ـ دکارتی ای هستند که فضانورد ـ تو ی ـ سفینه برا ی ـ ثبت ـ موقعیت ـ ذره‌ها ی ـ داخل ـ سفینه به کار می‌برد. باز یادآوری می‌کنیم که اوّلاً ابعاد ـ سفینه در مقایسه با شعاع ـ خمش ـ فضازمان بسیار کوچک است؛ و ثانیاً فضانورد سرعت ـ نور را مقدار ـ ثابت ـ c می‌گیرد و فاصله‌ها ی ـ مکانی ی ـ داخل ـ سفینه، یعنی طول ـ خط‌کش‌ها یش را، با به کار بردن ـ فرمول ـ $\ell = c\tau/2$ تعریف می‌کند.

4 ناظر ـ گسترده

اکنون تعداد ـ زیاد ی سفینه ی ـ فضایی ی ـ کوچک در نظر بگیرید که در فضا ی ـ بین ـ ستاره‌ها در حرکت اند. هر کدام از این سفینه‌ها یک ناظر ـ نقطه‌ای است که با جهان‌خط و چارپایه اش مشخّص می‌شود. ناظر ـ گسترده، ایده‌آل‌ساز ی ـ این اسکادران ـ فضایی است.

پیش از تعریف ـ ناظر ـ گسترده، خانواده ای از ناظرها ی ـ نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم که اولاً جهان‌خط‌ها یشان هم را قطع نمی‌کنند، ثانیاً یک ناحیه ی ـ 4 بعدی از فضازمان را می‌پوشانند. چون فضازمان 4 بعدی است و هر جهان‌خط یک موجود ـ 1 بعدی است، چنین خانواده ای باید یک خانواده ی ـ 3ـ پارمتری باشد، یعنی هر ناظر ـ نقطه‌ای ی ـ این خانواده باید با سه عدد ـ حقیقی مشخّص شود. چنین خانواده ای را با Ω، مجموعه ی ـ پارامترها را با A، پارامترها را با $A = (a^1, a^2, a^3)$، و ناظرها ی ـ نقطه‌ای را با O_A نشان می‌دهیم. جهان‌خط ـ ناظر ـ نقطه‌ای ی ـ O_A را با W_A نشان می‌دهیم.

اگر روی‌داد ـ E رو ی ـ جهان‌خط ـ یک ی از ناظرها ی ـ نقطه‌ای، مثلاً O_A باشد، می‌گوییم Ω آن را می‌بیند. گستره ی ـ دید ـ Ω، که آن را با U_Ω نشان می‌دهیم، یعنی مجموعه ی ـ همه ی ـ روی‌دادها یی در فضازمان که Ω آن‌ها را می‌بیند (و برابر است با اجتماع ـ تمام ـ W_A ها). اگر گستره ی ـ دید ـ Ω برابر با تمام ـ فضازمان باشد، می‌گوییم Ω یک ناظر ـ سراسری است.

فرض کنید Ω چنین خانواده ای و U_Ω گستره ی ِ دید اش باشند. دو روی‌داد ِ E و E' (هر دو در U_Ω) را هم‌مکان می‌نامیم، و می‌نویسیم $E \sim E'$، اگر هر دو رو ی ِ جهان‌خط ِ یک O_A باشند. به ساده‌گی می‌توان دید که این هم‌مکانی یک رابطه ی ِ هم‌ارزی است:

i) هر روی‌داد ی با خود اش هم‌مکان است.

ii) اگر E با E' هم‌مکان باشد، E' هم با E هم‌مکان است.

iii) اگر E با E'، و E' با E'' هم‌مکان باشد، E با E'' هم‌مکان است.

می‌توان U_Ω را بر این رابطه ی ِ هم‌ارزی تقسیم کرد. مجموعه ای که به این ترتیب به دست می آید فضا از دید ِ خانواده ی ِ Ω نام دارد، و ما آن را با S_Ω نشان می‌دهیم:

$$S_\Omega := U_\Omega / \sim . \tag{4}$$

واضح است که نقاط ِ S_Ω همان فضا ی ِ پارامترها، یعنی $\mathcal{A}$ است.

ناظر ِ گسترده عبارت است از یک خانواده ی ِ Ω به هم‌راه ِ یک نگاشت ِ زمان‌گونه ی ِ $T : U_\Omega \to \mathbb{R}$ که ما آن را زمان ِ جهانی می‌نامیم. (زمان‌گونه بودن ِ نگاشت ِ T به این معنی است که گرادیان ِ T زمان‌گونه است.) این زمان ِ جهانی باعث می‌شود هم‌زمان بودن یا تقدّم و تأخّر ِ زمانی ی ِ روی‌دادها برا ی ِ ناظر ِ (Ω, T) معنی داشته باشد.

5 ناظرها ی ِ مختصّاتی

فرض کنید $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ مختصّات ی باشد که ناحیه ای از فضازمان را می‌پوشاند. متریک ِ فضازمان در این ناحیه به شکل ِ عمومی ی ِ زیر است.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \\ &= g_{00}\,(dx^0)^2 + 2\, g_{0i}\,(dx^0\, dx^i) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij}\, dx^i\, dx^j . \end{aligned} \tag{5}$$

فرض کنید دو شرط ِ زیر برقرار باشد.

i) $g_{00} < 0$،

ii) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ مثبت و معیّن باشد.

در این صورت هر سه عدد ِ ثابت ِ (k^1, k^2, k^3) یک خم ِ زمان‌گونه تعریف می‌کنند:

$$\gamma_k := \left\{ x^0 = ct, \quad x^i = k^i \right\} . \tag{6}$$

به این ترتیب یک خانواده ی ِ سه‌پارامتری از خم‌ها ی ِ زمان‌گونه داریم که هم را قطع نمی‌کنند. هر کدام از این خم‌ها را می‌توان جهان‌خطّ ِ یک ناظر ِ نقطه‌ای انگاشت.

میدان ِ برداری ی ِ ∂_0 بر این خم‌ها ی ِ زمان‌گونه مماس است. اگر آن را بر $\sqrt{-g_{00}}$ تقسیم کنیم یک میدان ِ برداری ی ِ یکّه به دست می‌آید. این میدان را e_0 می‌نامیم. چون g_{ij} مثبت و معیّن است، سه میدان ِ برداری ی ِ ∂_i فضاگونه اند. به کمک ِ فرایند ِ گرام‌ـ شْمیت می‌توان از این چهار میدان ِ برداری (∂_μ ها)، چهار میدان ِ برداری ی ِ یکّه و عمود بر هم به دست آورد که اوّلی (e_0) زمان‌گونه، و بقیّه (e_1، e_2، و e_3) فضاگونه باشند. به این ترتیب هر یک از خم‌ها ی ِ (6) یک خانواده ی ِ 3 پارامتری اند، پس به ازا ی ِ هر مختصّات ی که در ناحیه ای از فضازمان تعریف شده باشد و در شرط‌ها ی ِ بالا صدق کند، یک ناظر ِ Ω داریم. برا ی ِ این ناظر، S_Ω همان فضا یی است که با مختصّات ِ x^i پارامتریزه می‌شود.

ناظر ِ مختصّاتی ی ِ Ω هم‌واره می‌تواند یک زمان ِ جهانی تعریف کند، همان تابع ِ x^0. این زمان ِ جهانی به تعریف ِ زیر از هم‌زمانی منجر می‌شود:

- تعریف ِ 1 ِ هم‌زمانی: دو روی‌داد ِ

$$E = (x^0, x^i), \qquad E' = (x'^0, x'^i) \tag{7}$$

را می‌گوییم هم‌زمان اند اگر $x'^0 = x^0$. (واضح است که هر دو روی‌داد باید در حوزه ی ِ تعریف ِ مختصّات ِ x^μ باشند.)

پذیرفتن ِ این تعریف ِ هم‌زمانی به تعریف ِ خاصّ ی از فاصله منجر می‌شود. فرض کنید $t = t_0$ یک زمان ِ خاص، یعنی یک عدد ِ ثابت ِ داده‌شده باشد. مقطع ِ $x^0 = c\,t_0$، یعنی مجموعه ی ِ

$$\Sigma_{t_0} := \left\{x^\mu \mid x^0 = c\,t_0\right\} \tag{8}$$

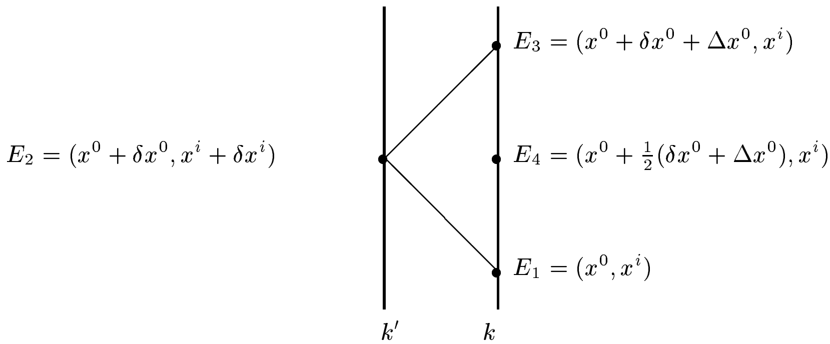
یک فوق ِرویه ی ِ سه‌بعدی است با متریک ِ

$$d\ell^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}(t_0, x)\,dx^i\,dx^j \tag{9}$$

توجّه کنید که این فوق ِرویه و متریک اش به $t = t_0$ بسته‌گی دارند. به ازا ی ِ هر t، سه‌تایی‌ها ی ِ مرتب ِ k و k' دو نقطه از این فوق ِرویه اند. می‌توان فاصله ی ِ آن‌ها را به کمک ِ متریک ِ فوق تعریف کرد، فاصله ای که به t بسته‌گی دارد. نحوه ی ِ تعریف این است:

- تعریف ِ 1 ِ فاصله: فاصله ی ِ k از k' برابر است با طول ِ ژئودزیک ی از Σ_{t_0} که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

معنی ی ِ شهودی ی ِ این تعریف این است: در یک لحظه ی ِ $t = t_0$ تعداد ی خط‌کش را، که طول ِ هر کدام ِ شان $1\,\mathrm{m}$ است، بین ِ سفینه ی ِ k و سفینه ی ِ k' می‌گذاریم، به طور ی که به دنبال ِ هم باشند. تعداد ِ این خط‌کش‌ها می‌شود طول ِ مسیر ی که این خط‌کش‌ها روی اش قرار گرفته اند. یک



شکل ِ ۱

مسیر ِ خاص هست که این طول را کمینه می‌کند. این مسیر ِ خاص ژئودزیک ی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. دقّت کنید که این ژئودزیک، ژئودزیک ِ فوق ِرویه ی ِ Σ_{t_0} است، نه ژئودزیک ِ فضازمان. فاصله ی ِ k از k' یعنی تعداد ِ خط‌کش‌ها یی که در زمان ِ $t = t_0$ این ژئودزیک را پوشانده اند.

به دلیل ِ پدیده ی ِ انقباض ِ طول ِ نسبیّتی، این تعریف وقت ی بامعنی است که خط‌کش‌ها ساکن باشند. امّا ساکن نسبت به کی؟ جواب این است: نسبت به آن سفینه ای از اسکادران که در آن لحظه در کنار ِ آن خط‌کش ِ خاص قرار گرفته است.

فرض کنیم k' بی‌نهایت به k نزدیک باشد. ببینیم چه‌قدر طول می‌کشد تا نور از k به k' برود و برگردد. فرض کنید E_1 روی‌داد ِ گسیل ِ نور از k، E_2 روی‌داد ِ رسیدن ِ نور به k'، و E_3 روی‌داد ِ رسیدن ِ پرتو ی ِ بازتابیده به k باشد (شکل ِ ۱ را ببینید).

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \left(x^0, x^i\right), \\
E_2 &= \left(x^0 + \delta x^0, x^i + \delta x^i\right), \\
E_3 &= \left(x^0 + \delta x^0 + \Delta x^0 x^i\right).
\end{aligned}
$$

فاصله ی ِ فضازمانی ی ِ بین ِ E_1 و E_2، یعنی مجذور ِ نُرم ِ چاربردار ِ

$$E_{12} = (\delta x^0, \delta x^i), \tag{10}$$

صفر است، پس

$$g_{00}\,(\delta x^0)^2 + 2\,\delta x^0 \sum\nolimits_i g_{0i}\,\delta x^i + \sum\nolimits_{i,j} g_{ij}\,\delta x^i\,\delta x^j = 0. \tag{11}$$

δx^0 ریشه ی ِ مثبت ِ این معادله است:

$$\delta x^0 = \frac{1}{-g_{00}} \left[\sqrt{\sum\nolimits_{i,j} (-g_{00}\, g_{ij} + g_{0i}\, g_{0j})\, \delta x^i\, \delta x^j} + \sum\nolimits_i g_{0i}\, \delta x^i \right]. \tag{12}$$

فاصله ی ِ فضازمانی ی ِ بین ِ E_2 و E_3، یعنی مجذور ِ نرم ِ چاربردار ِ

$$E_{23} = (\Delta x^0, -\delta x^i), \tag{13}$$

هم صفر است، پس

$$g_{00}\, (\Delta x^0)^2 - 2\, \Delta x^0 \sum\nolimits_i g_{0i}\, \delta x^i + \sum\nolimits_{i,j} g_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j = 0. \tag{14}$$

Δx^0 ریشه ی ِ مثبت ِ این معادله است:

$$\Delta x^0 = \frac{1}{-g_{00}} \left[\sqrt{\sum\nolimits_{i,j} (-g_{00}\, g_{ij} + g_{0i}\, g_{0j})\, \delta x^i\, \delta x^j} - \sum\nolimits_i g_{0i}\, \delta x^i \right]. \tag{15}$$

واضح است که فاصله ی ِ زمانی ی ِ بین ِ E_1 و E_3 هست

$$\delta t := \frac{1}{c} \left(\delta x^0 + \Delta x^0 \right) = \frac{2}{-c\, g_{00}} \sqrt{\sum\nolimits_{i,j} (g_{0i}\, g_{0j} - g_{00}\, g_{ij})\; \delta x^i\, \delta x^j}. \tag{16}$$

ساعت ِ ناظر ِ k ویژه‌زمان ِ τ را نشان می‌دهد که رابطه اش با x^0 این است:

$$\delta \tau^2 = -\frac{1}{c^2}\, \delta s^2 = -\frac{1}{c^2}\, g_{00}\, (\delta x^0)^2 = -g_{00}\, \delta t^2. \tag{17}$$

پس $\delta \tau = \sqrt{-g_{00}}\, \delta t$. به این ترتیب، از دید ِ ناظر ِ k فاصله ی ِ زمانی ی ِ رفت و برگشت ِ نور برابر است با

$$\begin{aligned} \delta \tau \;&=\; \frac{1}{c}\, \sqrt{-g_{00}} \frac{2}{-g_{00}} \sqrt{\sum\nolimits_{i,j} (g_{0i}\, g_{0j} - g_{00}\, g_{ij})\; \delta x^i\, \delta x^j} \\ &=\; \frac{2}{c} \sqrt{\sum\nolimits_{i,j} \gamma_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j} \end{aligned} \tag{18}$$

که در این جا

$$\gamma_{ij}(t,x) := g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}. \tag{19}$$

خلاصه آن که اگر فاصله را مطابق ِ تعریف ِ 1 تعریف کنیم، آن وقت متوسّط ِ سرعت ِ نور در رفت و برگشت بین ِ k و k' می‌شود

$$v_{\text{light}} = \frac{2 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j}}{\dfrac{2}{c} \sqrt{\sum\nolimits_{n,m} \gamma_{nm}\, \delta x^n\, \delta x^m}} = c \sqrt{\frac{\sum_{i,j} g_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j}{\sum_{n,m} \gamma_{nm}\, \delta x^n\, \delta x^m}} \tag{20}$$

اگر $g_{0i} = 0$، این سرعت همواره c است، امّا اگر $g_{0i} \neq 0$، آن وقت این سرعت به جهت ِ انتشار ِ نور بسته‌گی دارد. دقّت کنید که این سرعت، سرعت ِ نور است برا ی ِ رفتن از یک ی از سفینه‌ها ی ِ

اسکادران ـ فضایی به یک سفینه ی ـ دیگر. هنوز هم سرعت ـ نور در داخل ـ هر سفینه مستقل از جهت ـ انتشار ـ نور در آن سفینه است. (زیرا ناظر ـ تو ی ـ سفینه اصولاً با ثابت گرفتن ـ سرعت ـ نور است که فاصله ی ـ نقاط ـ داخل ـ سفینه را تعریف می‌کند.)

خلاصه آن که، اگر تعریف ـ 1 ـ هم‌زمانی، و به تبع ـ آن تعریف ـ 1 ـ فاصله را بپذیریم، به این نتیجه می‌رسیم که اگر g_{0i} ها صفر نباشند، آن وقت سرعت ـِ نور برا ی ـ رفتن از یک نقطه به نقطه ای دیگر که بی‌نهایت به آن نزدیک است، به جهت ـ مسیر ـِ نور بسته‌گی دارد.

امّا می‌توان فاصله ی ـ دو سفینه ی ـ نزدیک به هم را به روش ـ دیگر ی هم تعریف کرد. در این روش سرعت ـ نور را مقدار ـ ثابت ـ c می‌گیریم، به کمک ـ رادار ـ $\delta\tau$ ـ (18) را به دست می‌آوریم، و تعریف می‌کنیم:

- تعریف ـ 2 ی ـ فاصله: فاصله ی ـ k' از k برابر است با

$$\delta\ell := \frac{1}{2}\, c\, \delta\tau, \tag{21}$$

که معادل است با این که

$$\delta\ell^2 := \sum\nolimits_{i,j} \gamma_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j. \tag{22}$$

این تعریف هم مبتنی است بر تعریف ی از هم‌زمانی:

- تعریف ـ 2 ی ـ هم‌زمانی: دو روی‌داد ـ بی‌نهایت نزدیک به هم ـ

$$E = (x^0, x^i), \qquad E' = (x^0 + \delta x^0, x^i + \delta x^i)$$

را می‌گوییم از نظر ـ ناظر ـ k (که در نقطه ی ـ $x^i = k^i$ ایستاده است) هم‌زمان اند اگر

$$\sum_{\mu=0}^{3} g_{0\mu}\, \delta x^\mu = g_{00}\, \delta x^0 + \sum\nolimits_i g_{0i}\, \delta x^i = 0.$$

این تعریف وابسته به مختصّات ـ x^μ است، امّا همان طور که خواهیم دید، بعض ی وقت‌ها نمی‌توان این تعریف ـِ هم‌زمانی را به تمام ـ حوزه ی ـ تعریف ـ مختصّات ـ x^μ گسترش داد، یعنی نمی‌توان یک زمان ـ جهانی متناظر با این هم‌زمانی یافت.

انگیزه ی ـ این تعریف هم بسیار ساده است (§84 از مرجع ـ [3]): ناظر ـ k می‌بیند که زمان ـ $\delta\tau$ طول می‌کشد تا نور از سفینه اش به سفینه ی ـ k' برود و برگردد. پس طبیعی است که روی‌داد ـ E_2 را با روی‌داد ی به فاصله ی ـ $\delta\tau/2$ پس از روی‌داد ـ E_1 رو ی ـ جهان‌خط ـ خود اش هم‌زمان بداند. (اگر در سال ـ 2002 با تلسکپ به سیاره ای که 57 سال ـ نوری از ما دور است نگاه کنیم و انفجار ـ یک بمب ـ اتمی را ببینیم، می‌گوییم این انفجار هم‌زمان بوده با سال ـ 1945 در کره ی ـ زمین.) این روی‌داد را E_4 می‌نامیم. داریم:

$$\begin{aligned} E_2 &= (x^0 + \delta x^0, x^i + \delta x^i), \\ E_4 &= \left(x^0 + \frac{1}{2}(\delta x^0 + \Delta x^0), x^i\right). \end{aligned} \tag{23}$$

پس داریم:

$$E_{42} = \left(\frac{1}{2}(\delta x^0 - \Delta x^0), \delta x^i\right)$$
$$= \left(\frac{1}{-g_{00}}\sum\nolimits_i g_{0i}\,\delta x^i,\ \delta x^i\right). \qquad (24)$$

یعنی روی‌داد ـ $E' = (x^0 + dx^0, x^i + dx^i)$ که در سفینه ی ـ نزدیک ـ $x^i + dx^i$ روی می‌دهد، از نظر ـ ناظر ی که در x^i ایستاده با روی‌داد ـ (x^0, x^i) هم‌زمان است، اگر

$$dx^0 = \frac{1}{-g_{00}}\sum\nolimits_i g_{0i}\,dx^i. \qquad (25)$$

این رابطه را می‌توان به شکل ـ ساده ی ـ زیر نوشت:

$$(dx)_0 := \sum_{\mu=0}^{3} g_{0\mu}\,dx^\mu = g_{00}\,dx^0 + \sum\nolimits_i g_{0i}\,dx^i = 0. \qquad (26)$$

اگر $(dx)_0$ دقیق باشد، یعنی اگر تابع ی مثل ـ x_0 وجود داشته باشد طور ی که $(dx)_0$ ـ بالا واقعاً دیفرانسیل ـ آن تابع ـ x_0 باشد، آن وقت می‌توان یک زمان ـ جهانی تعریف کرد: $T = x_0$. اگر $(dx)_0$ دقیق نباشد، امّا ضریب ـ دقیق‌کن داشته باشد، باز هم می‌توان یک زمان ـ جهانی تعریف کرد. (ضریب ـ دقیق‌کن یعنی تابع ی مثل ـ $f(x)$ با این خاصیّت که $f(x)\,(dx)_0$ دقیق باشد.)

فرض کنید متریک بسته‌گی ی ـ صریح به زمان نداشته باشد، در این صورت فاصله ی ـ ناظرها با زمان تغییر نمی‌کند. فرض کنید O_0 یک ناظر ـ نقطه‌ای ی ـ خاص، مستقر در P_0، باشد. این ناظر یک علامت ـ نوری به ناظر ـ مجاور اش، O_1، که در نقطه ی ـ P_1 ایستاده است، می‌فرستد و زمان ـ رفت و برگشت ـ آن را می‌سنجد و آن را برا ی ـ ناظر ـ O_1 می‌فرستد. نصف ـ این عدد برابر است با

$$dx^0_{0\to 1} = \frac{g_{0i}(P_0)}{-g_{00}(P_0)}\,dx^i. \qquad (27)$$

ناظر ـ O_1 با دانستن ـ این عدد می‌تواند ساعت اش را با ساعت ـ O_0 هم‌زمان کند.

یک نکته ی ـ بسیار مهم که باید به آن توجّه کنیم، این است که این هم‌زمان کردن ـ ساعت‌ها متقارن نیست، به این معنی که اگر ناظر ـ O_1 یک علامت ـ نوری به طرف ـ ناظر ـ O_0 بفرستد و زمان ـ رفت و برگشت ـ آن را بسنجد، (نصف ـ) عدد ی که به دست می‌آورد این است

$$dx^0_{1\to 0} = \frac{g_{0i}(P_1)}{-g_{00}(P_1)}\,dx^i. \qquad (28)$$

اینک فرض کنید ناظر ـ O_1 ساعت ـ خود اش را با ساعت ـ ناظر ـ O_0 (با استفاده از عدد ـ (27)) هم‌زمان کند، و سپس همین ناظر ـ O_1 یک علامت ـ نوری به ناظر ـ دیگر ـ O_2 بفرستد و زمان ـ رفت و برگشت ـ نور را بسنجد و آن را برا ی ـ ناظر ـ O_2 بفرستد. به این ترتیب ناظر ـ O_2 می‌تواند ساعت اش را با ساعت ـ ناظر ـ O_1 هم‌زمان کند. نکته ی ـ جالب این است که اگر ناظر ـ O_0 خود اش یک علامت ـ نوری به O_2 می‌فرستاد و زمان ـ رفت و برگشت ـ آن را می‌سنجید و آن را برا ی ـ O_2 می‌فرستاد، آن وقت ناظر ـ O_2 می‌توانست ساعت ـ خود اش را با ساعت ـ O_0 هم‌زمان کند. این دو هم‌زمانی یک ی

نیستند! برا یِ این که این مطلب را بهتر ببینیم، فرض کنید که این کار را برا یِ دنباله ای از ناظرها که رو یِ خم ی مثل ِ γ قرار گرفته اند تکرار کنیم. ناظر ِ O_0 در ابتدا یِ این خم، و ناظر ِ O_N در انتها یِ این خم است. ناظر ِ $j+1$ ـِ ام باید ساعت اش را به اندازه یِ

$$dx^0_{j+1} = -\frac{g_{0i}(P_j)}{g_{00}(P_j)}\,dx^i \tag{29}$$

جلو بکشد. پس، ناظر ِ N ـام باید ساعت اش را به اندازه یِ

$$\Delta t = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{g_{0i}(P_j)}{-g_{00}(P_j)}\,dx^i \tag{30}$$

جلو بکشد. واضح است که در حدّ ِ $N\to\infty$ این جمع به انتگرال ِ زیر میل می‌کند.

$$\Delta t = \int_\gamma \frac{g_{0i}}{-g_{00}}\,dx^i. \tag{31}$$

اینک فرض کنید که γ یک خم ِ بسته باشد. در این صورت O_N همان جا یی است که O_0 هست. اینک

$$\Delta t = \oint_\gamma \frac{g_{0i}}{-g_{00}}\,dx^i. \tag{32}$$

شرط ِ لازم برا یِ این که این انتگرال برا یِ هم خم ِ بسته ای صفر باشد این است که

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{g_{0j}}{-g_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{g_{0i}}{-g_{00}}\right) = 0. \tag{33}$$

فرض کنید انتگرال ِ (32) رو یِ خم ِ بسته یِ γ صفر نباشد. در این صورت ناظر ِ O_N که در همان نقطه یِ P_0 ایستاده است (یعنی جهان‌خط اش بر جهان‌خط ِ O_0 منطبق است)، برا یِ آن که ساعت اش را با ساعت ِ O_0 هم‌زمان کند باید آن را به مقدار ِ Δt جلو بکشد.

پس، «مجموعه یِ همه یِ ساعت‌ها یی که با یک ساعت ِ خاص ِ O_0 به تعریف ِ 2 هم‌زمان اند» یک مجموعه یِ خوش‌تعریف نیست. حد ِاکثر کار ی که می‌توانیم بکنیم این است که از یک ساعت ِ خاص شروع کنیم و در امتداد ِ یک خم ِ γ که خود اش را قطع نکند ساعت‌ها را هم‌زمان کنیم. و نتیجه این که «مجموعه یِ همه یِ روی‌دادها یی که به تعریف ِ 2 با یک روی‌داد ِ خاص ِ E_0 هم‌زمان اند»، یک مجموعه یِ خوش‌تعریف نیست.

مزیّت ِ این روش ِ هم‌زمان کردن ِ ساعت‌ها، که آن را روش ِ اینشتین می‌نامیم، این است که سرعت ِ نور مستقل از جهت ِ انتشار ِ آن می‌شود، امّا عیب اش این است که بعض ی وقت‌ها نمی‌توان یک زمان ِ جهانی تعریف کرد.

اگر تعریف ِ 2 یِ هم‌زمانی را بپذیریم، دیگر نمی‌توان «فضا» را مجموعه یِ همه یِ روی‌دادها یِ هم‌زمان با یک روی‌داد ِ خاص تعریف کرد. ممکن است کس ی بپرسد که در این صورت منظور از فضا چیست؟ پاسخ این است که فضا (S_Ω) را با تقسیم کردن ِ فضازمان بر رابطه یِ هم‌مکانی تعریف می‌کنیم، و این مجموعه هم‌ارز ِ Σ_{t_0} است، هر چند نمی‌توان گفت روی‌دادها یِ Σ_{t_0} هم‌زمان اند. فاصله ای که بر طبق ِ تعریف ِ 2 تعریف می‌کنیم، در واقع فاصله یِ نقاط ِ همین Σ_{t_0} است.

مرجع‌ها

[1] Ll. Bel; "Frames of reference and some of its applications"; arXive: gr-qc/9812062

[2] V. I. Arnold; "Mathematical methods of classical mechanics", (Springer, 1978)

[3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz; "The classical theory of fields", 4th edition (Pergamon, 1975)

نام‌های خاص

1) Gallileo Gallilei, 2) Isak Newton, 3) Aristotelian, 4) A. Einstein, 5) H. Minkowski, 6) H. A. Lorentz, 7) Karl Schwartzschild, 8) Friedman, 9) Stoks

نوشته ای که این کشف را در بر داشت برا یِ ژاک آدامار[1] پُست شد، و نشانی یِ فرستنده اش این بود: شماره یِ 57، خیابان ِ گران[2]، سَن ـ موریس[3]. آدامار همیشه به هندسه یِ مقدّماتی علاقه داشت، و مشتاقانه به نویسنده یِ نامه نامه نوشت و او را به شام دعوت کرد. نویسنده پاسخ داد که این کار برا یَش ممکن نیست، امّا آدامار را دعوت کرد که بیاید و او را ببیند. آدامار رفت و از دیدن ِ میزبان اش در آسایش‌گاه ِ روانی یِ شارنتون[4] یکّه خورد. آندره بلُک[5]، که در یک جنون ِ آنی، یک ی از برادرها، یک عمو، و یک عمّه اش را کُشته بود، باقی یِ عمر اش را در این آسایش‌گاه ِ روانی گذراند. در سال‌ها یِ پس از آن حادثه، بلُک شخص ِ بسیار آرام ی بود که عمیقاً به ریاضیّات علاقه داشت. بلُک چیزها یِ مهم ی در نظریّه یِ تابع‌ها یِ مختلط ِ یک‌متغیّره کشف کرد، و حتّا یک ثابت ِ بلُک هست. آدامار رفت او را دید، و آن دو مفصّل صحبت کردند. بعدها با هم نامه‌نگاری می‌کردند، و آدامار دایره‌ها یِ پاراتاکتیک[6] ِ بلُک را در کتاب ِ بزرگ ِ هندسه یِ مقدّماتی اش وارد کرد.

Laurent Schwartz: *A Mathematician Grappling with His Century*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001, p. 36.

1) Jacques Hadamard, 2) Grand-Rue, 3) Saint-Maurice, 4) Charenton, 5) André Bloch, 6) paratactic