پراکنده‌گی از پتانسیل ِ با بُرد ِ محدود در مکانیک ِ کلاسیک

امیرحسین ِ فتح‌اللهی

در این مقاله عنوان می‌شود که چطور پتانسیل‌های ِ با بُرد ِ محدود به سطحِ‌مقطع‌های ِ پراکنده‌گی ِ محدود منجر می‌شوند.

سطحِ‌مقطع ِ پراکنده‌گی جزئی در مکانیک ِ کلاسیک با رابطه‌ی زیر داده‌می‌شود:

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds(\Theta)}{d\Theta}\right| \tag{1}$$

که در آن s پارامتر ِ برخورد است [1]. زاویه‌ی پراکنده‌گی برحسب ِ پارامتر ِ برخورد برای ِ پتانسیل ِ شعاعی ِ $V(r)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\Theta(s) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2\left[1-\dfrac{V(r)}{E}\right]-s^2}} \tag{2}$$

که r_m کم‌ترین فاصله‌ی ذره‌ای با انرژی ِ E و پارامتر ِ برخورد ِ s از مرکز ِ نیرو است. در این‌جا ما فقط پتانسیل‌هایی را در نظر می‌گیریم که در همه‌ی فاصله‌ها دافعه باشند. با پیداکردن ِ تابع ِ وارون می‌توان $s(\Theta)$ را پیدا کرد. با داشتن ِ سطحِ‌مقطع ِ پراکنده‌گی ِ جزئی می‌توان سطحِ‌مقطع ِ پراکنده‌گی ِ کل را حساب کرد:

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega)\, d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi} \sigma(\Theta)\ \sin\Theta\, d\Theta \tag{3}$$

که با جای‌گذاری از رابطه‌ی بالا انتظار داریم:

$$\sigma_T = 2\pi\int_0^{\pi} \sigma(\Theta)\ \sin\Theta\, d\Theta = 2\pi\int_0^{\infty} s\, ds = \infty \tag{4}$$

پس به نظر می‌رسد که سطحِ‌مقطع ِ پراکنده‌گی ِ کل هم‌واره بی‌نهایت باشد! نکته این‌جاست که این نتیجه فقط برای ِ پتانسیل‌های بلندبُرد، در واقع بی‌نهایت بُرد، درست است. برای ِ پتانسیل‌هایی که بعد از یک فاصله صفر می‌شوند، در واقع یک پارامتر ِ برخورد ِ بیشینه وجود دارد که ذرات ِ برخوردکننده با

پارامتری بزرگ‌تر از آن پتانسیل را نمی‌بینند؛ این ذرات در واقع پراکنده نمی‌شوند و در نتیجه نباید در محاسبه‌ی بالا وارد شوند. اگر پارامترِ برخوردِ بیشینه را با $s_{\max}$ نشان دهیم داریم:

$$\sigma_T = 2\pi \int_0^{s_{\max}} s\, ds = 2\pi s_{\max}^2 \tag{5}$$

در نتیجه پتانسیل سطحِ موثری به اندازه‌ی مساحتِ دایره‌ای به شعاعِ $s_{\max}$ از خود نشان می‌دهد.

یک مثال - پتانسیلِ زیر را برایِ یک کره‌ی سخت در نظر بگیرید:

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases} \tag{6}$$

در این مسئله برایِ هر پارامترِ برخورد $r_m = R$. پس داریم:

$$\Theta(s) = \pi - 2\int_R^\infty \frac{s\, dr}{r\sqrt{r^2 - s^2}} = \pi - 2\arcsin\frac{s}{R} \tag{7}$$

که به ما می‌دهد: $s(\Theta) = R\cos\frac{\Theta}{2}$. این نتیجه را می‌شود با در نظر گرفتنِ برخوردِ کشسانِ ذره با کره‌ی سخت هم به دست آورد. رابطه‌ی اخیر بیش‌ترین مقدارِ قابلِ قبولِ پارامترِ برخورد را می‌دهد: $s_{\max} = R$، که در واقع همان شعاعِ کره‌ی سخت است. خواهیم داشت:

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds(\Theta)}{d\Theta}\right| = \frac{R\cos\frac{\Theta}{2}}{\sin\Theta}\frac{1}{2}R\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{4}R^2 \tag{8}$$

و از آن‌جا

$$\sigma_T = \int_{4\pi}\sigma(\Omega)\, d\Omega = 4\pi\frac{1}{4}R^2 = \pi R^2 = \pi s_{\max}^2 \tag{9}$$

که نشان می‌دهد کره‌ای به شعاعِ R سطحِ موثری به اندازه‌ی مساحتِ دایره‌ی عظیمه‌اش نشان می‌دهد.

مثالِ دیگر - پتانسیلِ یک کره‌ی نفوذپذیر را ممکن است به شکلِ زیر داد:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 > 0, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases} \tag{10}$$

انرژی، سرعتِ خطیِ ذرات در فواصلِ دور، تکانه ی زاویه‌ای و پارامترِ برخوردِ ذرات به شکلِ زیر به هم مربوط هستند:

$$\begin{aligned} l &= m v_0 s && (11) \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m v_0^2 && (12) \end{aligned}$$

در حالتی که $E < V_0$، ذرات کره را مانندِ کره‌ی نفوذناپذیر می‌بینند، و شرایط مانندِ مثالِ قبل می‌شود.
برایِ $E > V_0$ شرطِ کمترین فاصله‌ی ذره تا مرکزِ کره $\dot{r} = 0$ است که به ما می‌دهد:

$$\begin{aligned} E &= \frac{l^2}{2mr_m^2} + V(r_m) = \frac{m^2 v_0^2 s^2}{2mr_m^2} + V(r_m) && (13) \\ &= E\frac{s^2}{r_m^2} + V(r_m) \Rightarrow 1 - \frac{s^2}{r_m^2} = \frac{V(r_m)}{E} && (14) \end{aligned}$$

با رابطه‌ی بالا به‌راحتی می‌توان دید که : $r_m \leq R$ و در نتیجه:

$$1 - \frac{s^2}{r_m^2} = \frac{V_0}{E} \Rightarrow r_m = s\sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \Rightarrow s \leq r_m \leq R \qquad (15)$$

برای بیش‌ترین r_m خواهیم داشت:

$$r_m = R \Rightarrow R = s_{\text{ref}}\sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \Rightarrow s_{\text{ref}} = R\sqrt{\frac{E - V_0}{E}} < R \qquad (16)$$

برای ذراتی که با پارامتری بزرگ‌تر از s_{ref} تابیده می‌شوند، کره نفوذناپذیر است و در واقع برایِ آن‌ها $r_m = R$. در مشابهت با مسئله‌ی شکستِ نور، می‌توان ضریب‌شکستِ کره را به صورتِ $n = \sqrt{\dfrac{E - V_0}{E}}$ تعریف کرد که کم‌تر از 1 است. در این‌صورت نفوذِ ذرات به داخلِ کره مانندِ واردشدنِ نور از یک محیط با ضریب‌شکستِ کم‌تر به یک محیط با ضریبِ بزرگ‌تر است. در این‌صورت برای محیطی به شکلِ کره، s_{ref} را می‌شود از شرطِ بازتابشِ کلی نیز به‌دست آورد.
خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \pi - 2\int_{s/n}^{\infty} \frac{sdr}{r\sqrt{r^2(1 - \frac{V_0}{E}) - s^2}} \\ &= 2\arcsin\frac{s}{nR} - 2\arcsin\frac{s}{R} && (17) \end{aligned}$$

برایِ $0 \leq s \leq nR = s_{\text{ref}}$ و

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \pi - 2\int_{R}^{\infty} \frac{sdr}{r\sqrt{r^2 - s^2}} \\ &= \pi - 2\arcsin\frac{s}{R} && (18) \end{aligned}$$

برایِ $nR \leq s \leq R$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq nR: \quad \cos\frac{\Theta}{2} &= \sqrt{1 - \frac{s^2}{R^2}}\sqrt{1 - \frac{s^2}{n^2R^2}} + \frac{s^2}{nR^2} \Rightarrow && (19) \\ s^2 &= \frac{R^2 n^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}}{n^2 + 1 - 2n\cos\frac{\Theta}{2}} && (20) \end{aligned}$$

زاویه‌ی پراکنده‌گی که در آن بازتابش ِ کلی شروع می‌شود، که البته بیش‌ترین زاویه‌ی پراکنده‌گی است، به‌دست می آید:

$$s = s_{\mathrm{ref}} \Rightarrow \cos\frac{\Theta_{\max}}{2} = n \tag{21}$$

سطحِ‌مقطع ِ جزئی ِ پراکنده‌گی ناشی از پارامترهای $0 \le s \le nR = s_{\mathrm{ref}}$ به‌دست می‌آید:

$$\sigma_1(\Theta) = \frac{n^2R^2}{4\cos\frac{\Theta}{2}}\frac{(1-n\cos\frac{\Theta}{2})(\cos\frac{\Theta}{2}-n)}{(n^2+1-2n\cos\frac{\Theta}{2})^2}, \quad 0 \le \Theta \le \Theta_{\max} \tag{22}$$

هم‌چنین خواهیم داشت:

$$nR \le s \le R: \quad \Theta(s) = \pi - 2\arcsin\frac{s}{R} \Rightarrow s = R\cos\frac{\Theta}{2} \tag{23}$$

که همان رابطه برای کره‌ی نفوذناپذیر است، و در نتیجه می‌دهد:

$$\sigma_2(\Theta) = \frac{1}{4}R^2, \qquad 0 \le \Theta \le \Theta_{\max} \tag{24}$$

سطحِ‌مقطع ِ جزئی ِ پراکنده‌گی $(\sigma(\Theta) = \sigma_1(\Theta) + \sigma_2(\Theta))$ را می‌توان به‌دست آورد:

$$\sigma(\Theta) = \begin{cases} \frac{n^2R^2}{4\cos\frac{\Theta}{2}}\frac{(1-n\cos\frac{\Theta}{2})(\cos\frac{\Theta}{2}-n)}{(n^2+1-2n\cos\frac{\Theta}{2})^2} + \frac{1}{4}R^2, & 0 \le \Theta \le \Theta_{\max} \\ 0, & \Theta_{\max} \le \Theta \le \pi \end{cases} \tag{25}$$

می‌توان دید که

$$\sigma_T = 2\pi\int_0^\pi \sigma(\Theta)\ \sin\Theta\ d\Theta = \pi R^2 = \pi s_{\max}^2 \tag{26}$$

به عنوان ِ آخرین نکته یادآوری می‌شود که هر پتانسیل ِ بی‌نهایت‌بُرد در مکانیک ِ کلاسیک سطح ِ مقطع ِ کل ِ بی‌نهایت می‌دهد. در این‌جا منظور از بی‌نهایت‌بُرد پتانسیلی است که فاصله‌ی وجود نداشته باشد که پس از آن پتانسیل دقیقاً صفر شود.

1 یادداشت‌ها و مرجع‌ها

[1] H. Goldstein; “Classical mechanics”, 2nd edition (Addison-Wesley, 1980), chap. 3