فضازمان ـ ریندلر

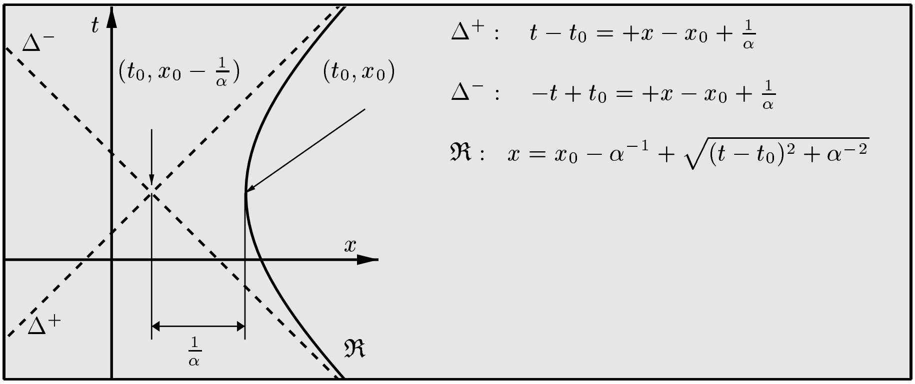
احمد ـ شریعتی

در نسبیّت ـ گالیله‌ای چارچوب ی می‌توان تعریف کرد که حرکت ـ صلب ـ شتاب‌دار با شتاب ـ ثابت دارد. منظور از صلب بودن ـ حرکت ـ این چارچوب، این است که نقطه‌ها ی ـ مختلف ـ چارچوب نسبت به هم ثابت اند، و البته همه‌گی با یک شتاب حرکت می‌کنند. در نسبیّت ـ خاص هم می‌توان چارچوب ـ صلب ی در نظر گرفت که هر نقطه اش ویژه‌شتاب ـ ثابت دارد، امّا البته ویژه‌شتاب ـ نقطه‌ها ی ـ مختلف با هم فرق دارد. ناظر ـ گسترده ی ـ متناظر با این چارچوب ناظر ـ ریندلر نام دارد. توصیف ـ ناظر ـ ریندلر از فضازمان ـ مینکفسکی با توصیف ـ یک ناظر ـ لخت از این فضازمان فرق دارد. ناظر ـ ریندلر یک افق ـ دید و یک افق ـ تأثیر دارد. در این مقاله ی ـ آموزشی، فضازمان از دید ـ ناظر ـ ریندلر با جزئیّات توصیف می‌شود.

۱ حرکت ـ هذلولی‌وار

فرض کنید ذرّه ای در چارچوب ـ لخت ـ K حرکت کند و در لحظه ی ـ t_0 مکان ـ ش $\mathbf{r}(t_0)$، سرعت ـ ش $\mathbf{v}(t_0)$ و شتاب ـ ش $\mathbf{a}(t_0)$ باشد. $E_0=(t_0,\mathbf{r}(t_0))$ یک روی‌داد در فضازمان ـ مینْکُفسْکی است. در چارچوب ـ لخت ـ K' که با سرعت ـ ثابت ـ $\mathbf{v}(t_0)$ حرکت می‌کند، سرعت ـ ذرّه در روی‌داد ـ E_0 صفر است. چنین چارچوب ی یک دست‌گاه ـ سکون ـ آنی ی ـ جسم در روی‌داد ـ E_0 نام دارد. اگر K' یک دست‌گاه ـ سکون ـ آنی ی ـ جسم در روی‌داد ـ E_0 باشد، هر دست‌گاه ـ لخت ـ دیگر ی هم که نسبت به K' فقط چرخیده باشد یک دست‌گاه ـ سکون ـ آنی ی ـ آن ذرّه در روی‌داد ـ E_0 است. حالت ـ خاصّ ی را در نظر می‌گیریم که ذرّه در چارچوب ـ K در امتداد ـ یک خطّ ـ راست حرکت کند. محور ـ x ـ دست‌گاه ـ K را در این امتداد می‌گیریم و فرض می‌کنیم K' آن دست‌گاه ـ سکون ـ آنی ای برا ی ـ جسم باشد که محورها یش موازی ی ـ محورها ی ـ K است. شتاب ی که ذرّه در روی‌داد ـ E_0 در دست‌گاه ـ K' دارد "ویژه‌شتاب" ـ آن ذرّه در روی‌داد ـ E_0 نام دارد.

گزاره. جهان‌خطّ ـ ذرّه ای که در امتداد ـ محور ـ x با ویژه‌شتاب ـ ثابت ـ α حرکت می‌کند و در $t=t_0$ در $\mathbf{r}(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$ ساکن است هذلولی ی ـ زیر است (شکل ـ 1).



شکل ـ 1 جهان‌خط ـِ ذره ای با ویژه‌شتاب ـِ α که در لحظه یِ $t = t_0$ در $x = x_0$ ساکن بوده.

$$x = x_0 - \frac{1}{|\alpha|} + \mathrm{sgn}(\alpha)\sqrt{(t - t_0)^2 + \frac{1}{\alpha^2}}, \qquad (1)$$
$$y = y_0, \qquad z = z_0.$$

$\mathrm{sgn}(\alpha)$ یعنی علامتِ α.

اثبات. اگر دست‌گاهِ لختِ K' با سرعتِ v در امتداد ـِ محور ـِ x ـِ دست‌گاهِ K حرکت کند، و محورها یِ دو دست‌گاه موازی یِ هم باشند، مختصّه‌ها یِ روی‌دادها در این دو دست‌گاه با تبدیلِ لُرِنتسِ زیر به هم مربوط اند.

$$t = t_0 + \gamma\left(t' + vx'\right), \quad x = x_0 + \gamma\left(x' + vt'\right), \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'. \qquad (2)$$

در این جا سرعتِ نور را 1 گرفته ایم و $\gamma = \gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. با مشتق‌گیری به راحتی دیده می‌شود که رابطه یِ سرعت‌ها این است:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\,(1 + u'_x v)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\,(1 + u'_x v)}, \qquad (3)$$

و باز با مشتق‌گیری معلوم می‌شود که رابطه یِ شتاب‌ها این است:

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3\,(1 + u'_x v)^3},\\
a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2\,(1 + u'_x v)^2} - \frac{v\,u'_y\,a'_x}{\gamma^2\,(1 + u'_x v)^3},\\
a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2\,(1 + u'_x v)^2} - \frac{v\,u'_z\,a'_x}{\gamma^2\,(1 + u'_x v)^3}.
\end{aligned}$$

اگر ذرّه فقط در امتداد ِ محور ِ x حرکت کند شتاب هم فقط در امتداد ِ محور ِ x است. فرض کنید در لحظه ِ $t = t_0$

$$
\begin{aligned}
&x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,\\
&u_x(t_0) = v, \quad u_y(t_0) = 0, \quad u_z(t_0) = 0.
\end{aligned}
$$

این یعنی در چارچوب ِ K داریم $E_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0)$، و از (2) پیدا است که برا ی ِ همین روی‌داد در چارچوب ِ K' داریم $E_0 = (0, 0, 0, 0)$. اینک از (3) پیدا است که

$$u'_x(0) = 0, \quad u'_y(0) = 0, \quad u'_z(0) = 0.$$

پس K' همان دست‌گاه ِ سکون ِ آنی ی ِ جسم است و شتاب ی که در این دست‌گاه ِ سنجیده می‌شود "ویژه‌شتاب" ِ ذرّه است که آن را با α نشان می‌دهیم. از تبدیل ِ شتاب‌ها (که در بالا آمد) به ساده‌گی دیده می‌شود که

$$a(t_0) := a_x(t_0) = \frac{\alpha}{\gamma^3(v)} = \frac{\alpha}{\gamma^3\left(u_x(t_0)\right)}.$$

با گذشت ِ زمان سرعت ِ ذرّه و در نتیجه دست‌گاه ِ سکون ِ آنی َ ش عوض می‌شود، امّا استدلال ِ بالا در هر زمان ِ t_0 ی درست است، پس در هر زمان ِ t ای داریم

$$a(t) = \frac{\alpha}{\gamma^3\left(u(t)\right)}.$$

این در واقع یک معادله ی ِ دیفرانسیل برا ی ِ تابع ِ $u := u_x(t)$ است.

$$\gamma^3(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\gamma(u)u\Big) = \alpha \quad \overset{1}{\Longrightarrow} \quad \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \alpha t \quad \overset{2}{\Longrightarrow} \quad u = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}$$

در انتگرال‌گیری یِ گام ِ 1 از شرط ِ $u(0) = 0$ استفاده کرده ایم، و در گام ِ 2 توجه کرده ایم که u و αt هم‌علامت اند. رابطه ای که به دست آمده یک معادله ی ِ دیفرانسیل برا ی ِ $x(t)$ است، که حلّ ِ آن با شرط ِ آغازین ِ $x(0) = x_0$ می‌شود

$$x = x_0 - \frac{1}{|\alpha|} + \operatorname{sgn}(\alpha)\sqrt{t^2 + \frac{1}{\alpha^2}}.$$

این معادله، که یک شاخه ی ِ یک هذلولی است، معادله یِ جهان‌خطّ ِ ذرّه ای است که ویژه‌شتاب ِ ثابت ِ α دارد و در زمان ِ 0 در نقطه ی ِ x_0 ساکن بوده (شکل ِ 1). با گذاشتن ِ $t - t_0$ به جا یِ t

می‌توان جوابِ مسئله را با این شرط که در $t = t_0$ ذرّه در x_0 ساکن است نوشت. معمولاً این معادله به شکلِ زیر نوشته می‌شود.

$$\left(x - x_0 + \frac{1}{|\alpha|}\right)^2 - (t - t_0)^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

از این به بعد فرض می‌کنیم α مثبت است (این یعنی جهتِ محورِ x را از ابتدا طوری می‌گیریم که α مثبت باشد).

۲ افق

یک ناظرِ نقطه ای، که آن را $\mathfrak{R}$ می‌نامیم، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ویژه‌شتابِ ثابتِ $\alpha > 0$ داشته باشد. مجانب‌ها یِ هذلولی یِ (1) دو خطِ نورگونه یِ زیر اند (شکلِ 1).

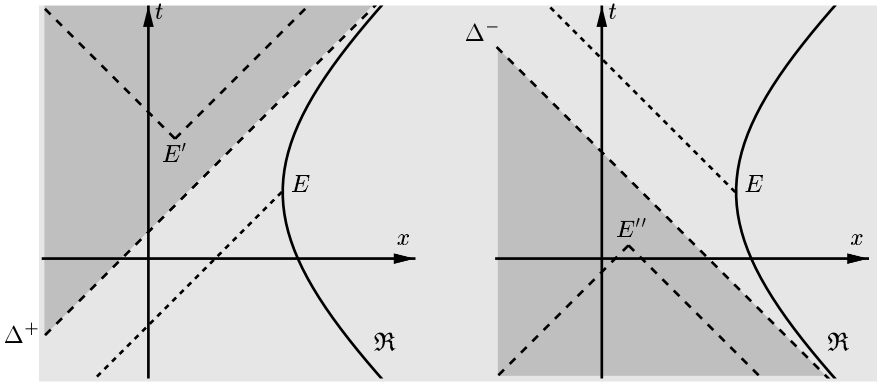
$$\Delta^{\pm}: \quad x = \pm t + x_0 - \frac{1}{\alpha}$$

این خط‌ها هم‌دیگر را در نقطه ای به طولِ $x_0 - \frac{1}{\alpha}$ قطع می‌کنند که فاصله اش با رأسِ هذلولی $\frac{1}{\alpha}$ است.

خطِ نورگونه یِ Δ^+ که با معادله یِ $x = t - t_0 + x_0 - \alpha^{-1}$ داده می‌شود، صفحه یِ مینکفسکی یِ tx را به دو ناحیه تقسیم می‌کند (شکلِ 2.a). روی‌دادها یِ ناحیه یِ تیره‌ترِ شکلِ (2.a) خارج از گستره یِ دیدِ $\mathfrak{R}$ اند، زیرا مخروطِ‌نورِ آینده‌سو یی که رأسِ آن روی‌داد ی مثلِ E' در ناحیه یِ $x < t - t + x_0 - \frac{1}{\alpha}$ است هرگز هذلولی یِ (1) را قطع نمی‌کند (معادلاً، مخروطِ نورِ گذشته‌سو یی که رأس‌ش نقطه ای مثلِ E رو یِ جهان‌خطِ ذره است، ناحیه یِ تیره‌ترِ شکلِ 2.a را قطع نمی‌کند).

تعریف. خطِ Δ^+ را "افقِ دیدِ" ذره یا ناظرِ $\mathfrak{R}$ می‌نامیم. روی‌دادها یِ فراتر از افقِ دید در گستره یِ دیدِ $\mathfrak{R}$ نیستند.

خطِ نورگونه یِ Δ^- که با معادله یِ $x = -t + t_0 + x_0 - \alpha^{-1}$ داده می‌شود هم صفحه یِ مینکفسکی یِ tx را به دو ناحیه تقسیم می‌کند (شکلِ 2.b). روی‌دادها یِ ناحیه یِ تیره‌ترِ شکلِ (2.b) خارج از گستره یِ تأثیرِ علّی یِ $\mathfrak{R}$ اند، زیرا مخروطِ‌نورِ گذشته‌سو یی که رأسِ آن روی‌داد ی مثلِ E'' در ناحیه یِ $x < -t + t_0 + x_0 - \frac{1}{\alpha}$ است، هرگز هذلولی یِ (1) را قطع نمی‌کند (معادلاً، مخروطِ نورِ آینده‌سو یی که رأس‌ش نقطه ای مثلِ E رو یِ جهان‌خطِ ذره است، ناحیه یِ تیره‌تر را قطع نمی‌کند).



(2.a) (2.b)

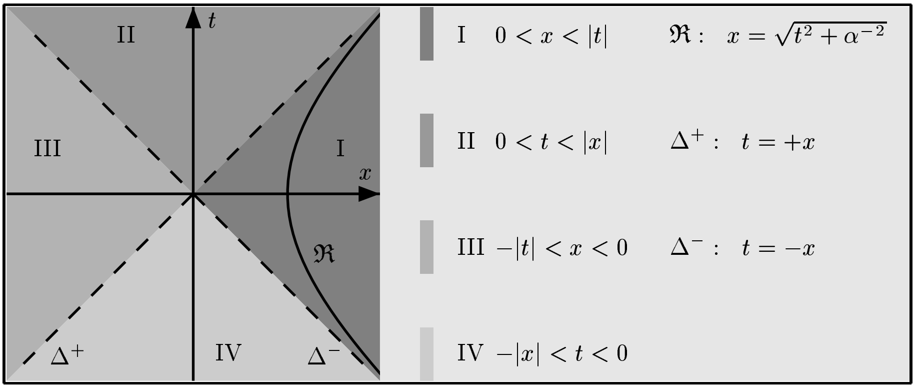
شکلِ 2 افقِ دید (Δ^+) و افقِ تأثیر (Δ^-). ناحیه یِ تیره‌ترِ شکلِ (2.a) فراتر از افقِ دیدِ $\mathfrak{R}$ است. ناحیه یِ تیره‌ترِ شکلِ (2.b) فراتر از افقِ تأثیرِ $\mathfrak{R}$ است.

تعریف. خطِ Δ^- را "افقِ تأثیر"ِ ذره یا ناظرِ $\mathfrak{R}$ می‌نامیم. ذرّه نه می‌تواند خودَش از این افق بگذرد، نه می‌تواند بر روی‌دادها یِ فراتر از این افق تأثیر بگذارد.

افق‌ها یِ دید و تأثیر، یعنی خط‌ها یِ نورگونه یِ $\Delta^\pm$، فضازمانِ مینکفسکی را، مطابقِ شکلِ 3 به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. روی‌دادها یِ ناحیه یِ I هم در گستره یِ دیدِ $\mathfrak{R}$ اند، هم در گستره یِ تأثیرَش. روی‌دادها یِ ناحیه یِ II در گستره یِ تأثیرِ $\mathfrak{R}$ هستند، اما بیرون از افقِ دیدِ $\mathfrak{R}$ اند. پس $\mathfrak{R}$ می‌تواند بر این روی‌دادها تأثیر بگذارد، اما این روی‌دادها تأثیر ی بر $\mathfrak{R}$ ندارند. روی‌دادها یِ ناحیه یِ III بیرون از هر دو افقِ $\mathfrak{R}$ اند: نه $\mathfrak{R}$ آن‌ها را می‌بیند، و نه آن‌ها می‌توانند تأثیر ی بر $\mathfrak{R}$ بگذارند. روی‌دادها یِ ناحیه یِ IV در گستره یِ دیدِ $\mathfrak{R}$ هستند، اما بیرون از افقِ تأثیرِ $\mathfrak{R}$ اند، پس این روی‌دادها بر $\mathfrak{R}$ تأثیر دارند، امّا $\mathfrak{R}$ نمی‌تواند بر آن‌ها تأثیر بگذارد.

۳ حرکتِ صُلبِ شتاب‌دار

پیوستارِ $\mathcal{A}$ از ناظرها یِ نقطه‌ای ای را در نظر بگیرید که همه در لحظه یِ $t = 0$، از دیدِ ناظرِ لختِ گسترده یِ K، ساکن باشند و بازه یِ $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ از محورِ x را پوشانده باشند. هر ناظرِ نقطه‌ای یِ $\mathfrak{R}$ را می‌توان با مکانِ لحظه یِ صفرَش، یعنی با $\xi \in \mathfrak{I}$ برچسب زد، $\mathfrak{R}_\xi$. فرض می‌کنیم ناظرِ $\mathfrak{R}_\xi$ با ویژه‌شتابِ ثابت و مثبتِ $\alpha(\xi)$ حرکت کند. فاصله یِ دو ناظرِ نقطه‌ای یِ $\mathfrak{R}_\xi$ و $\mathfrak{R}_{\xi+\Delta\xi}$ در زمانِ $t = 0$، از دیدِ K، $\Delta\xi$ است. با گذشتِ زمان سرعتِ ناظرها، از دیدِ K، تغییر



شکلِ 3 جهان‌خطِ ذره (یا ناظر)ی است که ویژه‌شتابِ ثابتِ α دارد، و در لحظه‌یِ $t = 0$ در نقطه‌یِ $x = \alpha^{-1}$ ساکن بوده. خطِ Δ^+ افقِ دیدِ این ناظر، و خطِ Δ^- افقِ تأثیرِ او است. این دو خطِ نورگونه فضازمانِ مینکفسکی را به چهار ناحیه‌یِ I، II، III، و IV تقسیم می‌کنند.

می‌کند. فرض کنیم این سرعت در زمانِ t $u(\xi, t)$ باشد، و فاصله‌یِ ناظرِ $\mathfrak{R}_\xi$ از ناظرِ $\mathfrak{R}_{\xi+\Delta\xi}$ در لحظه‌یِ t ، از دیدِ K، Δx باشد. می‌گوییم پیوستارِ $\mathcal{A}$ صُلب است اگر

$$\frac{\Delta x}{\Delta \xi} = \sqrt{1 - u^2(\xi, t)}\ . \tag{4}$$

دلیلِ این نام‌گذاری این است: فنر ی در نظر بگیرید که اگر وقت ی ساکن است طول‌َش $\Delta\xi$ باشد، نه فشرده باشد نه کشیده. فرض کنید چنین فنر ی ناظرِ $\mathfrak{R}_\xi$ را به ناظرِ $\mathfrak{R}_{\xi+\Delta\xi}$ وصل کرده باشد. از دیدِ K، در زمانِ t طولِ این فنر Δx است، پس از نظرِ ناظرِ هم‌راهِ K′، که نسبت به K با سرعتِ $u(\xi, t)$ حرکت می‌کند، طولِ این فنر $\Delta x/\sqrt{1 - u^2(\xi, t)}$ است. شرطِ (4) معادلِ این است که $\Delta x/\sqrt{1 - u^2(\xi, t)} = \Delta\xi$، که یعنی این فنر همواره در دست‌گاهِ سکون‌َش نه فشرده است نه کشیده.

گزاره. برا یِ آن که پیوستارِ $\mathcal{A}$ صُلب باشد باید $\alpha(\xi) = 1/\xi$، و بازه‌یِ $\mathfrak{I}$ نیم‌خطِ $0 < \xi < \infty$ باشد؛ یعنی پیوستارِ $\mathcal{A}$ با دسته هذلولی‌ها یِ زیر مشخّص می‌شود:

$$x^2 - t^2 = \xi^2, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

اثبات. برا یِ دیدنِ این مطلب ابتدا معادله‌یِ حرکتِ $\mathfrak{R}_\xi$ را از دیدِ K می‌نویسیم.

$$x = f(\xi, \alpha(\xi), t) = \xi - \frac{1}{\alpha(\xi)} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{\alpha^2(\xi)}}\ .$$

داریم

$$
\begin{aligned}
u(\xi,t) &= \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{\alpha^2(\xi)}}} = \frac{t}{x-\xi+\frac{1}{\alpha(\xi)}},\\
\gamma &:= \frac{1}{\sqrt{1-u^2(\xi,t)}} = \alpha(\xi)\left(x-\xi+\frac{1}{\alpha(\xi)}\right),\\
\Delta x &= f(\xi+\Delta\xi,\alpha(\xi+\Delta\xi),t) - f(\xi,\alpha(\xi),t)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\alpha'(\xi)\right)\Delta\xi\\
&= \left(1+\frac{\alpha'(\xi)(x-\xi)}{\alpha^2(\xi)\left(x-\xi+\frac{1}{\alpha(\xi)}\right)}\right)\Delta\xi.
\end{aligned}
$$

پس شرطِ صُلب بودنِ $\mathcal{A}$ می‌شود

$$
1+\frac{\alpha'(\xi)(x-\xi)}{\alpha^2(\xi)\left(x-\xi+\frac{1}{\alpha(\xi)}\right)} = \frac{1}{\alpha(\xi)\left(x-\xi+\frac{1}{\alpha(\xi)}\right)},
$$

که پس از ساده کردن به شکلِ

$$
\left[\alpha^2(\xi)+\alpha'(\xi)\right]\cdot(x-\xi)=0
$$

در می‌آید. این معادله تنها در صورت ی برا یِ همه یِ زمان‌ها برقرار است که

$$
\alpha^2(\xi)+\alpha'(\xi)=0.
$$

حلّ‌ِ این معادله یِ دیفرانسیل هست

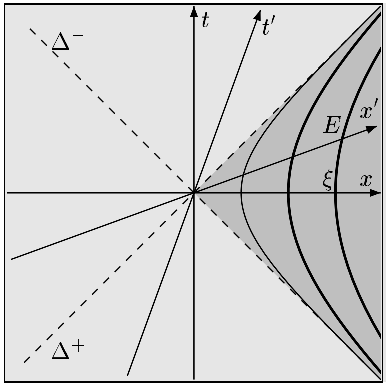
$$
\alpha(\xi)=\frac{1}{\xi-C}.
$$

C یک ثابتِ انتگرال‌گیری است که (با یک انتقال در امتداد ِ محور ِ x) می‌توان آن را صفر کرد. پس داریم

$$
\mathcal{I}=\{\xi\in\mathbb{R}\mid\quad 0<\xi\}
$$

و برا یِ هر ξ داریم $x=\sqrt{t^2+\xi}$، که معمولاً آن را به شکلِ زیر می‌نویسیم.

$$
x^2-t^2=\xi^2,\quad x>0,\quad t\in\mathbb{R} \tag{5}
$$



شکل ـ 4 دسته‌هذلولی‌ها یِ $x^2 - t^2 = \xi^2$، برا یِ $0 < \xi < +\infty$. هر هذلولی جهان‌خط یک ناظر نقطه‌ای است.

با دیفرانسیل‌گیری از $x^2 - t^2 = \xi^2$ (برا یِ ξ یِ ثابت)، می‌توانیم به آسانی سرعت ـِ ناظر ـِ ξ را در چارچوب ـِ مینکفسکی یِ (t, x, y, z) حساب کنیم:

$$v_\xi := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{x}. \tag{6}$$

از این جا به به ساده‌گی دیده می‌شود که در $t = 0$، سرعت ـِ ξ صفر است، و این صفر بودن مستقل از اندازه یِ ξ است. پس، تمام ـِ ناظرها یِ نقطه‌ای یِ ξ در $t = 0$ در چارچوب ـِ مینکفسکی یِ (t, x, y, z) ساکن اند.

۴ فضازمان ـِ ریندلِر ـِ ناحیه یِ I

دسته هذلولی یِ (5) در شکل ـِ 4 کشیده شده است. این نکته مهم است که مجانب‌ها یِ همه یِ این هذلولی‌ها دو خط ـِ نورگونه یِ $t = \pm x$ است، و بنا بر این افق ـِ دید و افق ـِ تأثیر برا یِ همه یِ این ناظرها یِ نقطه ای یک ی است.

گزاره. اگر دست‌گاه ـِ (t', x') حاصل ـِ یک خیز ـِ خالص ـِ دست‌گاه ـِ (t, x) باشد (شکل ـِ 4)، معادله یِ دسته هذلولی یِ (5) در این دست‌گاه ـِ لخت به شکل ـِ

$$x'^2 - t'^2 = \xi^2, \quad x > 0, \quad t' \in \mathbb{R}$$

است.

اثبات. این حکم در واقع از تعریف ـِ گروه ـِ لُرِنتس نتیجه می‌شود. جزئیّات ـِ اثبات را به خواننده وا

می‌گذاریم.

در این مرحله خوب است دقّت کنیم که تمام ِ ناظرها ی ِ نقطه‌ای ی ِ ξ در $t' = 0$ در چارچوب ِ مینکفسکی ی ِ (t', x', y', z') ساکن اند.

فرض کنید E روی‌داد ی در ناحیه ی ِ I باشد. E رو ی ِ یک و تنها یک ی از هذلولی‌ها ی ِ (5) است. از طرف ی، اگر E را به مبدأ وصل کنیم، یک خط ِ فضاگونه به دست می‌آید. (فضاگونه بودن ِ این خط بدان معنی است که شیب ِ آن (یعنی نسبت ِ t/x) کوچک‌تر از 1 (یعنی $1/c$) است.) معادله ی ِ این خط هست $t = vx$ که در آن $v < 1$ است. این خط تمام ِ هذلولی‌ها ی ِ $x^2 - t^2 = \xi^2$ را قطع می‌کند، و از (6) پیدا است که سرعت ِ تمام ِ ناظرها ی ِ ξ در رو ی ِ این خط v است.

تعریف می‌کنیم

$$\theta := \tanh^{-1} \frac{t}{x} \qquad -\infty < \theta < +\infty. \tag{7}$$

اکنون هر روی‌داد ی در ناحیه ی ِ I با چهار مختصه ی ِ $(\theta, \xi, \eta, \zeta)$ مشخص می‌شود. این چهار مختصه را مختصه‌ها ی ِ ریندلری در ناحیه ی ِ I ِ فضازمان ِ مینکفسکی می‌نامیم. رابطه ی ِ تبدیل ِ مختصه‌ها ی ِ مینکفسکی به ریندلری، و بالعکس، به صورت ِ زیر است.

$$\theta = \tanh^{-1} \frac{t}{x}, \quad \xi = \sqrt{x^2 - t^2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z; \tag{8}$$

$$t = \xi \sinh \theta, \quad x = \xi \cosh \theta, \quad y = \eta, \quad z = \zeta. \tag{9}$$

اکنون می‌توان به کمک ِ این رابطه‌ها، شکل ِ متریک را در مختصه‌ها ی ِ ریندلری به دست آورد. خواهیم داشت:

$$\mathrm{d}s^2 = -\xi^2\, \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2. \tag{10}$$

تعریف ـ فضازمان ِ ریندلِر یعنی مجموعه ی ِ

$$\mathcal{R} = \big\{(\theta, \xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^4 \ | \quad \xi > 0\big\} \tag{11}$$

به هم‌راه ِ متریک ِ (10). در مورد ِ این فضازمان توجه به نکته‌ها ی ِ زیر مهم است.

۱) علامت ِ منفی در اولین جمله، و سه علامت ِ مثبت در سه جمله ی ِ بعدی ِ (10)، نشان می‌دهند که θ یک متغیر ِ زمان‌گونه است، و ξ و η و ζ سه مختصه ی ِ فضاگونه اند.

۲) این متریک به زمان ِ ریندلری، یعنی به θ، بسته‌گی ندارد.

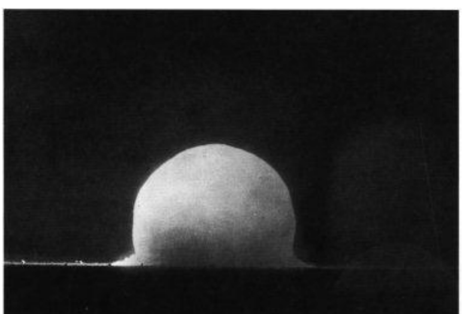
۳) فضازمان ی که متریک ـ (10) توصیف می‌کند چیز ی نیست جز بخش ـ I ـ فضازمان ـ مینکفسکی.

در سالِ 1945، اولین آزمایشِ بمبِ اتمی در نیومکزیکو و با نامِ ترینیتی[1] انجام شد. در سالِ 1946 ارتش ایالاتِ متحده عکس‌هایی از این واقعه را منتشر کرد. در تعدادی از این عکس‌ها زمانِ گرفتنِ عکس به هم‌راهِ اندازه‌یِ گویِ انفجار نیز آمده بود. فیزیک‌دانِ روس، سِدُف[2]، با استفاده از این اطلاعات و تحلیلِ ابعادی قدرتِ انفجار را تخمین زد. استدلالِ او این بود که شعاعِ گویِ انفجار پس از زمانِ t، یعنی $R(t)$ ، تنها به زمانِ t، کلِ انرژیِ آزاد شده E، و چگالی هوا ρ بستگی دارد. به سادگی می‌توان نشان داد تنها کمیتِ بی‌بُعدی که با $R(t)$، E، و t و ρ می‌توان ساخت $R^5\rho/(Et^2)$ است. پس

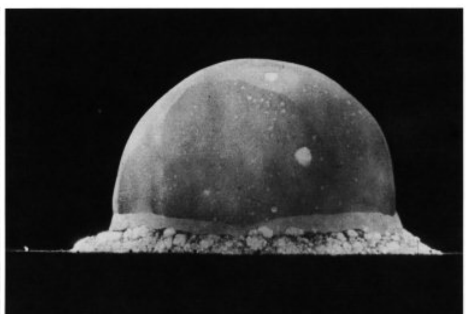
$$R = \mu \cdot \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5},$$

که در این‌جا μ کمیتی بی‌بعد است. بر مبنای استدلال‌هایی مبتنی بر فیزیکِ شوک‌موج‌ها او نتیجه گرفت μ تقریباً 1 است. عکس‌هایِ زیر 6 ms و 16 ms پس از انفجار است. در هر یک از عکس‌ها طولِ پاره‌خطی که در عکس مشخص شده 100 m است. با توجه به عکس‌هایِ زیر اینک می‌توانید نشان دهید انرژیِ آزاد شده در انفجار حدودِ 10^{14} J است. در واقع می‌توانید از یکی از عکس‌ها استفاده کنید و $\mu \approx 1$ بگیرید. با استفاده از اطلاعاتِ هر دو عکس، می‌توانید درستی رابطه‌یِ بالا را بررسی کنید. با توجّه به این که هر تُن تی‌اِن‌تی 4.2×10^9 J قدرتِ این انفجار تقریباً 25 kT تی‌اِن‌تی بوده است.

امیرِ آقامحمّدی



100 m



100 m

[1] Trinity, [2] L. I. Sedof,