ساعت ـ آفتابی [1]

X1-004 (2001/08/01)

محمّد ـ خرّمی mamwad@mailaps.org

فریناز ـ روشنی farinaz@iasbs.ac.ir

احمد ـ شریعتی shariati@mailaps.org

امیرحسین ـ فتح‌اللهی fatho@mail.cern.ch

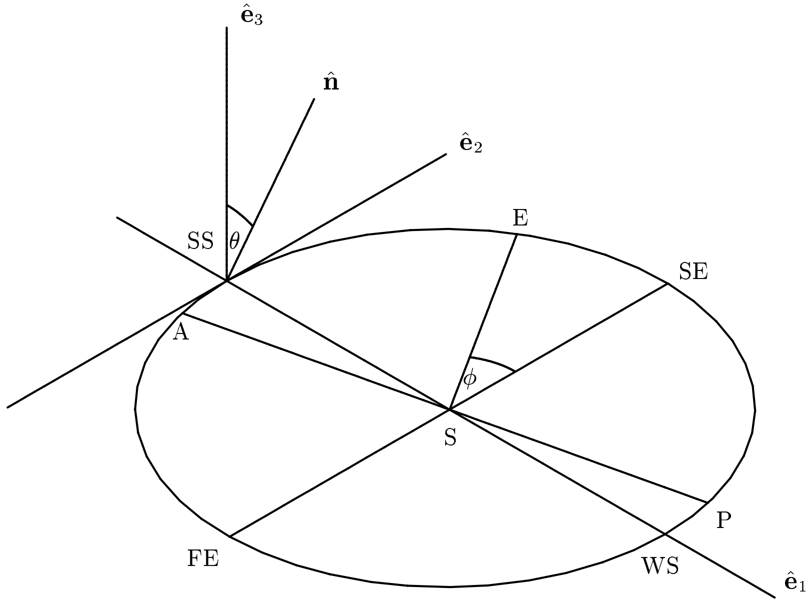
هندسه یِ چرخش ـ زمین به دور ـ خود، و گردش ـ آن به دور ـ خورشید بررسی می‌شود. با استفاده از آن طرح ـ یک ساعت ـ آفتابی، و نیز روش ـ دقیق‌کردن ـ آن معرفی می‌شود.

0 مقدمه

زمین دور ـ محور ـ قطبی یِ خود می‌چرخد و دوره یِ این چرخش 23 ساعت و 56 دقیقه است (روز ـ نجومی). ظهر وقت ی است که خورشید در آسمان درست به طرف ـ جنوب (یا شمال) است. زمین دور ـ خورشید هم می‌گردد و دوره یِ این حرکت 366.24 روز ـ نجومی است (یک سال ـ خورشیدی). چنان که خواهیم دید، به خاطر ـ این حرکت ـ انتقالی مدت ـ بین ـ دو ظهر ـ متوالی کم ی بیش از روز ـ نجومی می‌شود. به این مدت روز ـ خورشیدی می‌گویند. تعداد ـ روزها یِ خورشیدی در یک سال یک ی کم‌تر از تعداد ـ روزها یِ نجومی است. بنابراین هر سال 365.24 روز ـ خورشیدی است. به‌تر است بگوییم 365.24 روز ـ خورشیدی یِ متوسط. چون (چنان که خواهیم دید) فاصله یِ زمانی یِ بین ـ دو ظهر ـ متوالی یک‌سان نیست بل که به این بسته‌گی دارد که در کدام روز ـ سال ایم. این پدیده دو علت دارد. یک ی این که مدار ـ زمین به دور ـ خورشید بیضی است نه دایره. خروج‌ازمرکز ـ این بیضی 0.017 است. (بنابراین این بیضی خیل ی شبیه ـ دایره است.) دیگر این که محور ـ چرخش ـ زمین بر صفحه یِ مداری یِ زمین به دور ـ خورشید عمود نیست. محور ـ چرخش ـ زمین با عمود بر

[1] این مقاله، با اجازه ی ـ نویسنده‌ها، از منزل‌گاه ـ زیر برداشته شده، و همه ی ـ حقوق ـ آن برا ی ـ نویسنده‌ها محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-004.ps

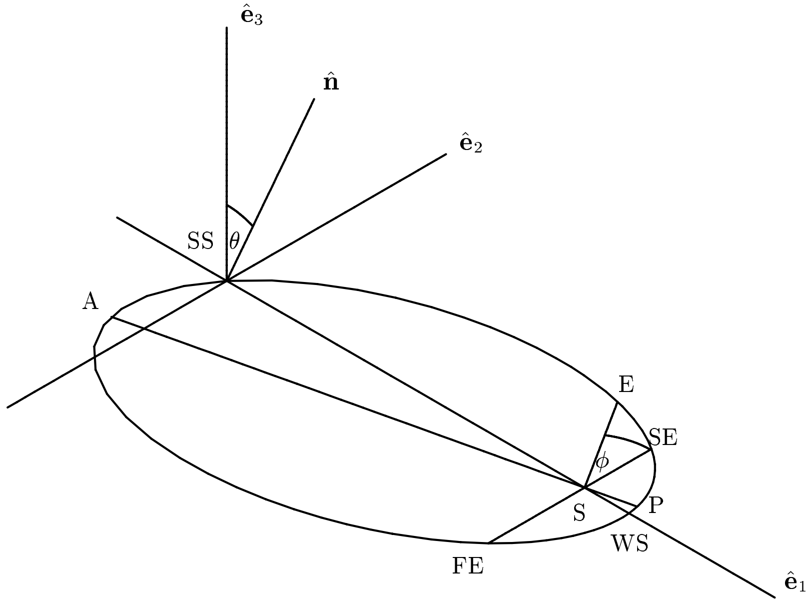


انقلاب ـ تابستانی	SS:	خورشید	S:
اعتدال ـ پاییزی	FE:	زمین	E:
انقلاب ـ زمستانی	WS:	اوج	A:
اعتدال ـ بهاری	SE:	حضیض	P:

شکل ـ 1

صفحه ی مداری ی زمین زاویه ی θ می‌سازد، که مقدار ـ این زاویه $23^\circ 27'$ است. چون خروج‌ازمرکز ـ مدار ـ زمین خیل ی کم است، فاصله ی زمین تا خورشید چندان تغییر نمی‌کند. پس گرم‌وسردبودن ـ روز با این تعیین می‌شود که زاویه ی تابش ـ خورشید نسبت به سطح ـ زمین چه قدر است و طول ـ روز چه قدر است.

وقت ی زاویه ی خط ـ واصل ـ زمین به خورشید، با محور ـ قطبی ی زمین کم‌ترین مقدار ـ ممکن ($(\pi/2) - \theta$) است، طول ـ روز در نیم‌کره ی شمالی بیشینه است. به این زمان انقلاب ـ تابستانی ی نیم‌کره ی شمالی می‌گوییم. در این حالت طول ـ روز در نیم‌کره ی جنوبی کمینه است. پس به همین زمان انقلاب ـ زمستانی ی نیم‌کره ی جنوبی هم می‌گوییم. وقت ی زاویه ی خط ـ واصل ـ زمین به خورشید با محور ـ خورشید بیشینه ($(\pi/2) + \theta$) است، طول ـ روز در نیم‌کره ی شمالی کمینه و در

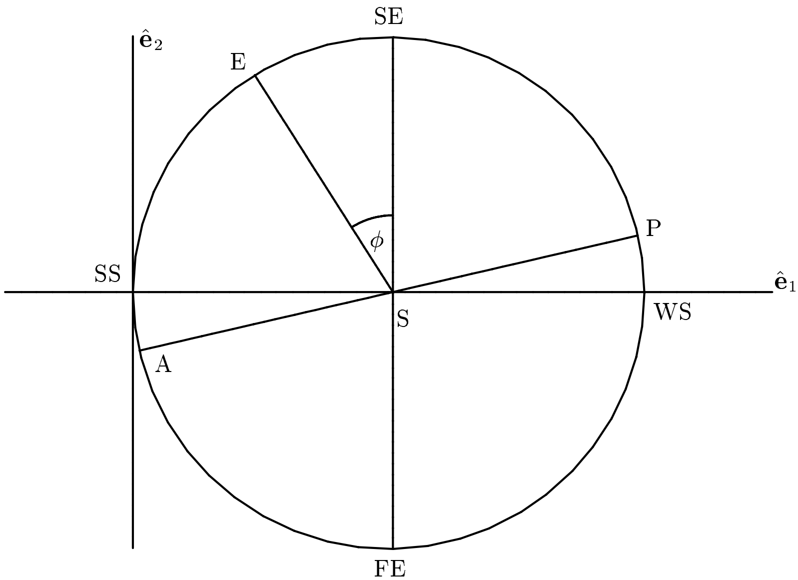


S:	خورشید	SS:	انقلابِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدالِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلابِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدالِ بهاری

شکلِ 2

نیم‌کره یِ جنوبی بیشینه است. به این زمان انقلابِ زمستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی، یا انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ جنوبی، می‌گوییم. دو بار در سال است که خطِ واصلِ زمین به خورشید بر محورِ چرخشِ زمین عمود می‌شود. به این دوزمان اعتدالین می‌گویند. اعتدالِ بهاری پس از انقلابِ زمستانی و پیش از انقلابِ تابستانی است، و اعتدالِ پاییزی برعکس.

این چهارنقطه در مدارِ زمین، علی‌الاصول به نقاطِ اوج و حضیضِ مدارِ زمین ربط ی ندارند. در واقع به خاطرِ این که محورِ چرخشِ زمین با دوره یِ حدوداً 26 000 سال پیش‌روی می‌کند، جا یِ این چهارنقطه هم رو یِ مدارِ زمین عوض می‌شود. اما 26 000 سال خیل ی طولانی است. برا یِ زمان‌ها یِ در حدِ عمرِ انسان، محورِ چرخشِ زمین ثابت است و جهتِ آن فعلاً چنان است که تصادفاً انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی نزدیکِ نقطه یِ اوجِ مدارِ زمین است.

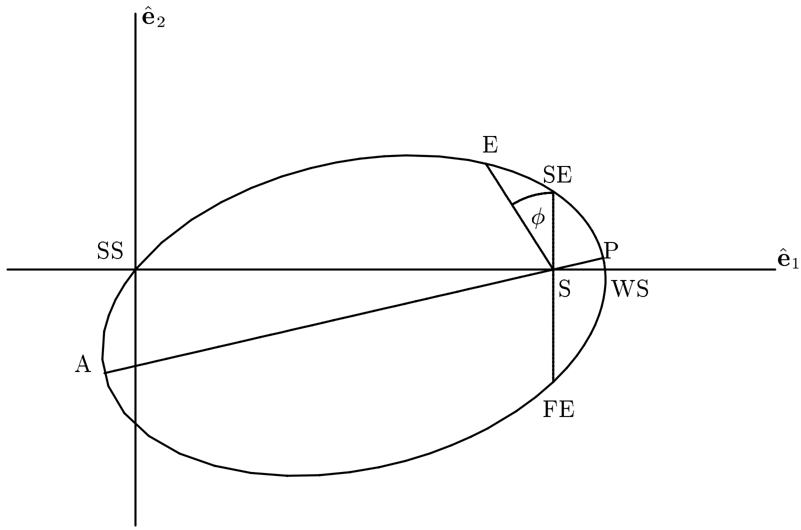


S:	خورشید	SS:	انقلابِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدالِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلابِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدالِ بهاری

شکلِ 3

فعلاً نقطه یِ اوجِ مدارِ زمین تقریباً 14 روز پس از انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی است و نقطه یِ حضیضِ مدارِ زمین تقریباً 14 روز پس از انقلابِ زمستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی. شکلِ 1 هندسه یِ مدارِ زمین را نشان می‌دهد. شکلِ 2 همان شکلِ 1 اما با خروج‌ازمرکزِ اغراق‌آمیز ($e = 0.8$) است، تا بیضی‌بودنِ مدارِ زمین مشخص باشد. شکل‌ها یِ 3 و 4 هم تصویرِ دوبعدی یِ شکل‌ها یِ 1 و 2 اند.

از شکلِ 3 دیده می‌شود که مدارِ زمین واقعاً خیل ی شبیهِ دایره است. اختلافِ نسبی یِ قطرِ بزرگ و کوچکِ بیضی برا یِ خروج‌ازمرکزها یِ کوچک $e^2/2$ است، که برا یِ مدارِ زمین از مرتبه یِ 10^{-4} می‌شود. همین است که چنین‌اختلاف ی رو یِ شکل دیده نمی‌شود. اختلافِ نسبی یِ فاصله‌ها یِ اوج و حضیضِ زمین تا خورشید از این بیش‌تر است. این اختلاف برابرِ $2e$ است، که تقریباً



S:	خورشید	SS:	انقلاب ِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدال ِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلاب ِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدال ِ بهاری

شکل ِ 4

0.035 است. اما تغییر ِ طول ِ روز، و تغییر ِ زاویه یِ تابش ِ خورشید نسبت به سطح ِ زمین خیل ی بیش از این مقدار است. البته مقدار ِ این تغییرات به عرض ِ جغرافیایی بسته‌گی دارد. اگر هندسه یِ مدار ِ زمین با چیز ی که فعلاً داریم فرق می‌کرد، ترتیب ِ فصل‌ها چیز ِ دیگر ی می‌شد. مثلاً فرض کنید خروج‌ازمرکز ِ مدار ِ زمین خیل ی بیش‌تر از مقدار ِ فعلی می‌بود، و انحراف ِ محور ِ قطبی یِ زمین از عمود بر مدار ِ زمین خیل ی کم‌تر. در آن صورت فاصله یِ زمین تا خورشید فصل را تعیین می‌کرد، و معنی یِ این حرف آن است که تابستان ِ نیم‌کره‌ها یِ شمالی و جنوبی هم‌زمان می‌شد.

1 جا یِ سایه رو یِ سطح ـِ زمین

بردار ـِ یکه یِ $\hat{\mathbf{e}}_1$ را در جهت ـِ خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید در انقلاب ـِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی، و بردار ـِ یکه یِ $\hat{\mathbf{e}}_3$ را در جهت ـِ عمود بر صفحه یِ مداری یِ زمین به طرف ـِ شمال می‌گیریم. ضمناً

$$\hat{\mathbf{e}}_2 := \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1. \tag{1}$$

محور ـِ قطبی یِ زمین را با $\hat{\mathbf{n}}$، و خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید را با $\hat{\mathbf{s}}$ نشان می‌دهیم. زاویه یِ محور ـِ قطبی یِ زمین با بردار ـِ $\hat{\mathbf{e}}_3$ را با θ، و زاویه یِ $\hat{\mathbf{s}}$ با خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید در اعتدال ـِ بهاری را با ϕ نشان می‌دهیم. داریم

$$\hat{\mathbf{n}} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3, \tag{2}$$

و

$$\hat{\mathbf{s}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_2. \tag{3}$$

از اینجا α (زاویه یِ $\hat{\mathbf{n}}$ با $\hat{\mathbf{s}}$) به دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \sin\theta\sin\phi. \tag{4}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ تصویر ـِ خورشید رو یِ سطح ـِ زمین، اول جهت ـِ $\hat{\mathbf{s}}$ نسبت به زمین را حساب می‌کنیم. برا یِ این کار مختصات ـِ نسبت‌به‌زمین‌ثابت ی تعریف می‌کنیم. محور ـِ z را محور ـِ قطبی یِ زمین می‌گیریم. محور ـِ x را مماس بر زمین در جهت ـِ شرق، و محور ـِ y را چنان می‌گیریم که

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}. \tag{5}$$

مبدئ ـِ زمان را ظهر می‌گیریم. در این صورت جهت ـِ خورشید در $t = 0$ (یعنی وقت ی خورشید در راستا یِ شمالی– جنوبی یِ آسمان است) می‌شود

$$\hat{\mathbf{s}}(0) = -\hat{\mathbf{y}}\sin\alpha + \hat{\mathbf{z}}\cos\alpha. \tag{6}$$

حرکت ـِ ظاهری یِ خورشید در آسمان دوران با سرعت ـِ زاویه‌ای یِ $-\omega$ حول ـِ محور ـِ قطبی (محور ـِ z) است. ماتریس ـِ این دوران می‌شود

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

از این‌جا بردار ِ جهت ِ خورشید در زمان ِ t به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = R(t)\hat{\mathbf{s}}(0), \tag{8}$$

یا

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = -\hat{\mathbf{x}}\sin\alpha\sin\omega t - \hat{\mathbf{y}}\sin\alpha\cos\omega t + \hat{\mathbf{z}}\cos\alpha. \tag{9}$$

ذکر ِ دو نکته بد نیست. اولاً از تغییر ِ α طی ِ یک شبانه‌روز چشم پوشیده ایم. ثانیاً ω سرعت ِ زاویه‌ای ِ خورشیدی ِ چرخش ِ زمین است. این سرعت برابر است با 2π تقسیم بر روز ِ خورشیدی. اما خواهیم دید روز ِ خورشیدی ثابت نیست. از تغییر ِ ω طی ِ یک شبانه‌روز هم چشم پوشیده ایم.

حالا صفحه ای را در نظر بگیرید که در نقطه ای به عرض ِ جغرافیایی ِ λ بر زمین مماس باشد. بردار ِ یکه ی ِ عمود بر این صفحه بردار ِ یکه ی ِ شعاعی در آن نقطه است، که آن را با $\hat{\mathbf{r}}$ نشان می‌دهیم:

$$\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{y}}\cos\lambda + \hat{\mathbf{z}}\sin\lambda. \tag{10}$$

بردار ِ سایه ی ِ یک میله ی ِ واحد روی این صفحه می‌شود

$$\mathbf{S}(t) = -\frac{1}{\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{s}}(t)}[\hat{\mathbf{s}}(t) - \hat{\mathbf{r}}\ \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{s}}(t)]. \tag{11}$$

داریم

$$\cos\xi := \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{s}}(t) = \cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha, \tag{12}$$

که در آن ξ زاویه ی ِ جهت ِ خورشید با بردار ِ عمود بر سطح ِ زمین است. از آن‌جا

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = {} & (\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha)^{-1}[\hat{\mathbf{x}}\sin\alpha\sin\omega t \\ & +\hat{\mathbf{y}}\sin\lambda(\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha) \\ & +\hat{\mathbf{z}}\cos\lambda(\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha)]. \end{aligned} \tag{13}$$

حالا یک دست‌گاه ِ جدید تعریف می‌کنیم که دو تا از بردارهای ِیکه ی ِ آن بر سطح ِ زمین مماس اند. بردار ِ $\hat{\mathbf{X}}$ را همان $\hat{\mathbf{x}}$ می‌گیریم. بردار ِ $\hat{\mathbf{Y}}$ را بردار ِ یکه ی ِ مماس بر سطح ِ زمین به طرف ِ شمال

می‌گیریم. $\hat{\mathbf{Z}}$ را هم عمود بر سطح ـ زمین به طرف ـ بالا می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Y}} &= \hat{\mathbf{y}}\sin\lambda + \hat{\mathbf{z}}\cos\lambda,\\ \hat{\mathbf{Z}} &= -\hat{\mathbf{y}}\cos\lambda + \hat{\mathbf{z}}\sin\lambda = \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned} \tag{14}$$

از این‌جا مختصات ـ سایه رو یِ سطح ـ زمین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\sin\alpha\sin\omega t}{\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha},\\ Y &= \frac{\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha}.\end{aligned} \tag{15}$$

یک ی از نتایج ـ این رابطه، زمان ـ طلوع و غروب ـ خورشید است. در طلوع و غروب، طول ـ سایه بی‌نهایت می‌شود، یعنی $\cos\xi = 0$. پس داریم

$$\omega t_0 = \pm\cos^{-1}(-\tan\lambda\cot\alpha). \tag{16}$$

در عرض ـ جغرافیایی یِ صفر (استوا) طرف ـ راست ـ عبارت ـ بالا می‌شود $\pm\pi/2$، یعنی طول ـ روز نصف ـ طول ـ شبانه‌روز است، و به فصل بسته‌گی ندارد. در نیم‌کره یِ شمالی، اگر $\alpha < \pi/2$، آن‌گاه اندازه یِ ωt_0 بیش از $\pi/2$ می‌شود، یعنی طول ـ روز بیش از نصف ـ طول ـ شبانه‌روز می‌شود. این مربوط است به نیمه یِ اول ـ سال (بهار و تابستان ـ نیم‌کره یِ شمالی). در نیمه یِ دیگر ـ سال $\alpha > \pi/2$، و طول ـ روز کم‌تر از نصف ـ طول ـ شبانه‌روز است. بیش‌ترین طول ـ روز (در نیم‌کره یِ شمالی) وقت ی است که α کمینه $((\pi/2) - \theta)$ است (انقلاب ـ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی). مدار ـ قطبی یِ شمالی $\lambda = (\pi/2) - \theta$ است. شمال ـ این مدار $(\lambda > (\pi/2) - \theta)$ منطقه یِ قطبی یِ شمالی است. وقت ی $\lambda > \alpha$، مقدار ـ $\cos\xi$ هم‌واره مثبت می‌ماند. این مربوط به زمان ی از سال است که خورشید در آن عرضِ‌جغرافیایی غروب نمی‌کند. اگر $\lambda > \pi - \alpha$، آن‌گاه $\cos\xi$ هم‌واره منفی است، یعنی خورشید زیر ـ افق است. این زمان ـ شب ـ دائمی در آن عرضِ‌جغرافیایی است. مشابه ـ همین‌ها با شش ماه فاصله، در نیم‌کره یِ جنوبی رخ می‌دهد.

چنان که دیدیم، بیش‌ترین مقدار ـ تابش ـ خورشید به زمین طی ـ یک روز، به زاویه یِ خورشید با عمود بر سطح ـ زمین، و طول ـ روز بسته‌گی دارد. کم‌ترین مقدار ـ زاویه یِ تابش ـ خورشید با سطح ـ زمین (رابطه یِ (12)) سر ـ ظهر است و در این حالت،

$$\cos\xi = \sin(\lambda + \alpha). \tag{17}$$

مدار ـ رأس‌السرطان $\theta = \lambda$، و مدار ـ رأس‌الجدی $-\theta = \lambda$ است. به ناحیه ی بین ـ این دو مدار ($|\lambda| < \theta$) ناحیه یِ حاره می‌گویند. در این‌جا ممکن است ξ صفر شود. یعنی زمان ی وجود دارد که خورشید عمودی می‌تابد. این زمان الزاماً در انقلاب ـ تابستانی (یا زمستانی) نیست. در واقع از رابطه یِ بالا دیده می‌شود این زمان وقت ی است که

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda. \tag{18}$$

اما این طولانی‌ترین روز ـ سال نیست. طولانی‌ترین روز ـ سال در انقلاب ـ تابستانی (یِ هر یک از نیم‌کره‌ها) است. در مدارها یِ رأس‌السرطان و رأس‌الجدی این دو نقطه (طولانی‌ترین روز ـ سال و تابش ـ عمودی یِ خورشید) یکی می‌شوند. با کاهش ـ عرض ـ جغرافیایی، ضمناً تغییرات ـ طول ـ روز کم می‌شود، پس اثر ـ عمودی‌بودن ـ تابش ـ خورشید بر مقدار ـ تابش ی که زمین دریافت می‌کند بیش‌تر می‌شود. در استوا فقط همین عامل مئثر است. پس بیش‌ترین مقدار ـ تابش در استوا در اعتدالین است.

در شمال ـ رأس‌السرطان ξ هرگز صفر نمی‌شود و کم‌ترین مقدار ـ آن زمان ی است که α کمینه شود. در این حالت کمینه یِ ξ برابر ـ $\lambda - \theta$ می‌شود. نتیجه این که روز ـ بیش‌ترین تابش، در شمال ـ رأس‌السرطان روز ـ انقلاب ـ تابستانی است. از رأس‌السرطان به طرف ـ جنوب، این روز به‌تدریج به طرف ـ اعتدال ـ بهاری می‌رود تا در استوا درست اعتدال ـ بهاری می‌شود. اما در استوا، مقدار ـ تابش ـ خورشید در اعتدال ـ بهاری و اعتدال ـ پاییزی یک‌سان است. به‌طرف ـ جنوب که برویم، روز ـ بیش‌ترین تابش از اعتدال ـ پاییزی به طرف ـ انقلاب ـ زمستانی می‌رود، تا در رأس‌الجدی این روز دقیقاً انقلاب ـ زمستانی می‌شود. در جنوب ـ مدار ـ رأس‌الجدی، روز ـ بیش‌ترین‌تابش همیشه روز ـ انقلاب ـ زمستانی است. (انقلاب‌ها و اعتدال‌ها برا یِ نیم‌کره یِ شمالی اند).

2 خم‌ها یِ محل ـ سایه در ناحیه‌ها یِ مختلف

رابطه‌ها یِ (15) جا یِ سایه رو یِ زمین را نشان می‌دهند. از این‌جا دو دسته خم به دست می‌آید: خم‌ها یِ روزثابت (یعنی خم‌ها یِ ϕ ثابت) و خم‌ها ی ساعت‌ثابت (یعنی خم‌ها یِ (ωt) ثابت). شکل ـ خم‌ها یِ ساعت‌ثابت ساده است. با حذف ـ α از رابطه‌ها یِ (15)، نتیجه می‌شود

$$Y = -\cot\lambda + \frac{\cot\omega t}{\sin\lambda} X. \tag{19}$$

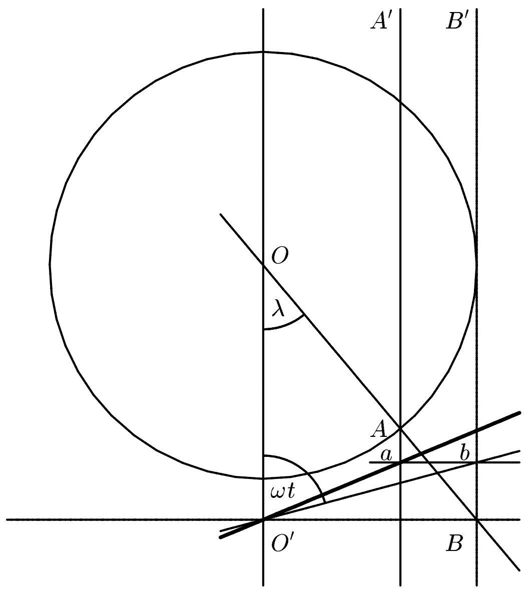
این‌ها یک دسته خط ـ راست اند، که همه از نقطه یِ $(0, -\cot\lambda)$ می‌گذرند. با به‌دست آوردن ـ این نقطه می‌شود عرض ـ جغرافیایی یِ محل را حساب کرد. (در [1] هم روش ی برا یِ تعیین ـ عرض ـ جغرافیایی معرفی شده.) اگر هدف فقط ساختن ـ یک ساعت ـ ساده (بدون ـ تقویم) باشد، کار بسیار

آسان است. شکل ِ 5 روش ِ کار را نشان می‌دهد.

این خط‌ها در دو حالت ِ خاص از این هم ساده‌تر می‌شوند. در استوا ($\lambda = 0$) خط‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یی عمودی می‌شوند:

$$X = \tan \omega t. \tag{20}$$

در قطب‌ها، خط‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یی شعاعی اند که فاصله یِ زاویه‌ای یِشان یک‌نواخت است، درست مثل ِ خط‌ها یِ ساعت ِ معمولی. تنهاتفاوت این است که این‌جا دایره یِ کامل 24 ساعت است نه 12 ساعت. ضمناً در قطب‌ها شمال و جنوب ِ مشخص ی وجود ندارد. در قطب ِ شمال همه یِ جهت‌ها جنوب است و در قطب ِ جنوب برعکس. در این‌جا ظهر هم خوش‌تعریف نیست، چون طول ِ سایه طی یِ روز تغییر نمی‌کند. به همین علت مبدئ ِ ساعت اختیاری است و تقارن ِ دایره‌ای یِ خط‌ها یِ ساعت‌ثابت (حول ِ میله) هم با این سازگار است.



شکل ِ 5

از نقطه یِ O (جا یِ میله) خط ِ شمالی– جنوبی یِ OO' را می‌کشیم. دایره ای به مرکز ِ O و شعاع ِ واحد (طول ِ میله) می‌کشیم. نیم‌خط ِ OB را با زاویه یِ λ (عرض ِ جغرافیایی) نسبت به OO' می‌کشیم. این نیم‌خط دایره را در نقطه یِ A قطع می‌کند. از A خط ِ شمالی– جنوبی یِ AA' را می‌کشیم. فاصله یِ A از خط ِ OO' برابر ِ $\sin \lambda$ است. مماس ِ شمالی– جنوبی یِ BB' بر

دایره را می‌کشیم. این مماس نیم‌خط ِ OB را در نقطه یِ B قطع می‌کند. از نقطه یِ B خط ِ شرقی– غربی یِ BO' را می‌کشیم. این خط OO' را در O' قطع می‌کند. طول ِ OO' برابر ِ $\cot\lambda$ است. تا این‌جا برا یِ هر ساعت ی یک‌سان است. از نقطه یِ O' خط ِ $O'b$ را با زاویه یِ ωt نسبت به $O'O$ می‌کشیم. (t زمان نسبت به ظهر است.) این خط BB' را در b قطع می‌کند. از b خط ِ شرقی– غربی یِ ba را می‌کشیم. این خط AA' را در a قطع می‌کند. خم ِ ساعت ِ t بخش ی از خط ِ $O'a$ است.

شکل ِ خم‌ها یِ روزثابت از این پیچیده‌تر است. چیز ی که به طور ِ کلی می‌شود گفت این است که این‌ها با تبدیل ِ $\phi \to \pi - \phi$ عوض نمی‌شوند. چون بسته‌گی یِ جای یِ سایه به ϕ تنها از طریق ِ α است، که آن هم فقط به $\sin\phi$ بسته‌گی دارد. شکل ِ خم ِ اعتدال ($\alpha = \pi/2$) هم ساده است. به ازا یِ این مقدار ِ α،

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\tan\omega t}{\cos\lambda},\\
Y &= \tan\lambda.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

این معادله یِ یک خط ِ افقی است. حالا نمودار ِ ساعت در پنج ناحیه یِ مختلف (استوا، حاره یِ شمالی، معتدل ِ شمالی، قطبی یِ شمالی، و خود ِ قطب ِ شمال) را بررسی می‌کنیم.

2.1 استوا

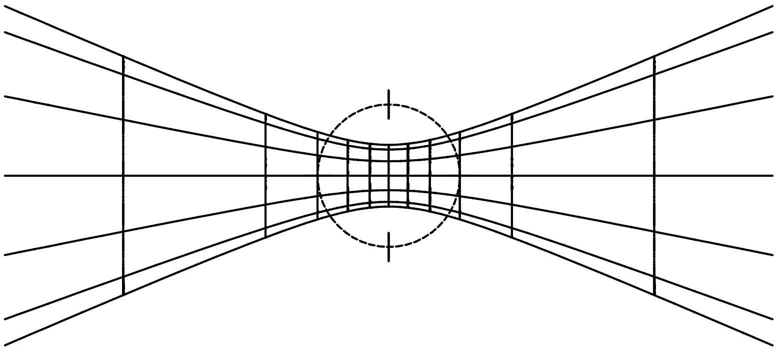
در این‌جا معادله‌ها یِ (15) می‌شوند

$$
\begin{aligned}
X &= \tan\omega t,\\
Y &= \frac{-\cot\alpha}{\cos\omega t}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

خم‌ها یِ روزثابت هذلولی اند:

$$
Y = -\cot\alpha\sqrt{1+X^2}. \tag{23}
$$

هیچ یک از این خم‌ها بسته نیست، که نشان می‌دهد خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. وقت ِ طلوع و غروب، سایه به بی‌نهایت (مجانب ِ هذلولی‌ها) می‌گراید. شکل ِ خم‌ها، هم نسبت به شرق و غرب متقارن است، و هم نسبت به شمال و جنوب. در ظهر ِ روزها یِ اعتدال، خورشید کاملاً عمودی می‌تابد و طول ِ سایه صفر می‌شود. در انقلاب‌ها، انحراف ِ خورشید نسبت به حالت ِ عمودی بیشینه و طول ِ سایه هم بیشینه می‌شود. شکل ِ 6 خم‌ها یِ ساعت‌ثابت و روزثابت در استوا را نشان می‌دهد.



شکل ِ 6

خم‌ها ي روزثابت و ساعت‌ثابت در استوا. جهت ِ شمال رو به بالا است. خم‌ها ي ساعت‌ثابت خط‌ها ي عمودی اند. خط ِ وسط ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها ي 5- تا 5 (نسبت به ظهر)، یعنی هفت ِ صبح تا پنج ِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خط ِ افقی خط ِ اعتدال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلاب ِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلاب ِ زمستانی است. شعاع ِ دایره یِ خط‌چین واحد (طول ِ میله) است. خود ِ میله هم در مرکز ِ دایره است.

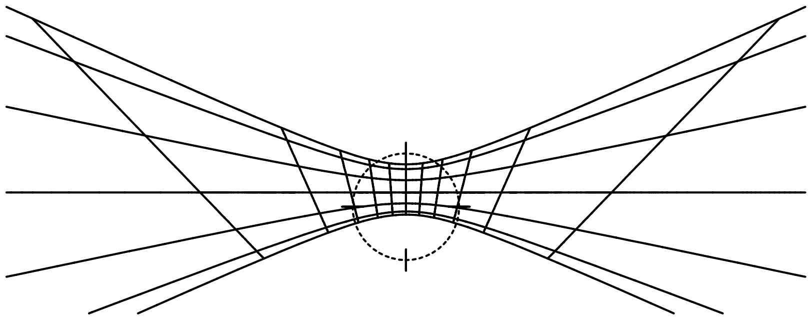
2.2 ناحیه یِ حاره یِ شمالی

هنوز هم همه یِ خم‌ها یِ روزثابت باز اند، یعنی خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. ظهر ِ دو روز است که خورشید عمودی می‌تابد. در این روزها

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda, \tag{24}$$

و از (4)

$$\sin\phi = \frac{\sin\lambda}{\sin\theta}. \tag{25}$$



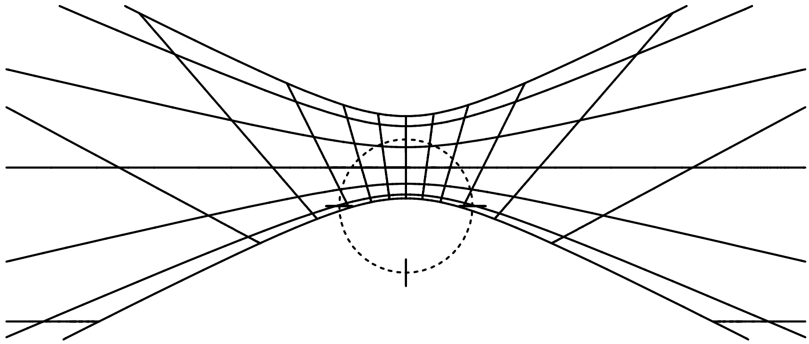
شکل ـ 7

خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه یِ حاره یِ شمالی. جهت ـِ شمال رو به بالا است. خط ـِ عمودی یِ وسط خط ـِ ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها یِ 5- تا 5 (نسبت به ظهر)، یعنی هفت ـِ صبح تا پنج ـِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خط ـِ افقی خط ـِ اعتدال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـِ زمستانی است. شعاع ـِ دایره‌ی خط‌چین واحد (طول ـِ میله) است. خود ـِ میله هم در مرکز ـِ دایره است. این شکل برا یِ عرض ـِ جغرافیایی یِ 15° کشیده شده.

یک ی از این روزها در بهار است $(\phi < \pi/2)$ و یک ی در تابستان $(\phi > \pi/2)$. بین ـِ این دوروز (از جمله در انقلاب ـِ تابستانی) ظهرها خورشید در شمال ـِ آسمان است و سایه اَش در جنوب می‌افتد. هر چه به طرف ـِ شمال برویم، فاصله یِ این دوروز از هم کم‌تر می‌شود، تا در رأس‌السرطان دوروز رو یِ هم و رو یِ انقلاب ـِ تابستانی می‌افتند. تقارن ـِ شمال- جنوب ی که در خم‌ها یِ استوا دیده می‌شد، این‌جا وجود ندارد. خم‌ها یِ شمالی (پاییز و زمستان) بزرگ‌تر اند، هر چند روزها یِ متناظر با این خم‌ها کوتاه‌تر اند.

2.3 ناحیه یِ معتدل ـِ شمالی

در این‌جا هم همه یِ خم‌ها یِ روزثابت باز اند، یعنی خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. خورشید هرگز عمودی نمی‌تابد. انحراف ـِ خورشید از خط ـِ عمودی، در انقلاب ـِ تابستانی کمینه می‌شود.



شکل ـ 8

خم‌ها ي روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه ي معتدل ـ شمالی. جهت ـ شمال رو به بالا است. خط ـ عمودی ي وسط خط ـ ظهر است و خط‌ها ي دیگر ساعت‌ها ي 6- تا 6 (نسبت به ظهر)، یعنی شش ـ صبح تا شش ـ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خط ـ افقی ي بلند خط ـ اعتدال است. فاصله ي زمانی ي خم‌ها ي روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـ تابستانی (ي نیم‌کره ي شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـ زمستانی است. شعاع ـ دایره ي خط‌چین واحد (طول ـ میله) است. خود ـ میله هم در مرکز ـ دایره است. این شکل برا ي عرض ـ جغرافیایی ي 30° کشیده شده.

2.4 ناحیه ي قطبی ي شمالی

در این‌جا در بخش ی از سال خم‌ها ي روزثابت بسته اند، یعنی خورشید طلوع و غروب نمی‌کند. شرط ـ این روی‌داد آن است که $\cos\xi$ به ازا ي همه ي مقدارها ي ωt مثبت بماند، یعنی

$$\sin\lambda\cos\alpha > |\cos\lambda\sin\alpha|. \tag{26}$$

برا ي ناحیه ي قطبی ي شمالی، $0 < \lambda$ و شرط ـ بالا می‌شود

$$\alpha < \lambda, \tag{27}$$

یا

$$\sin\phi > \frac{\cos\lambda}{\sin\theta}. \tag{28}$$

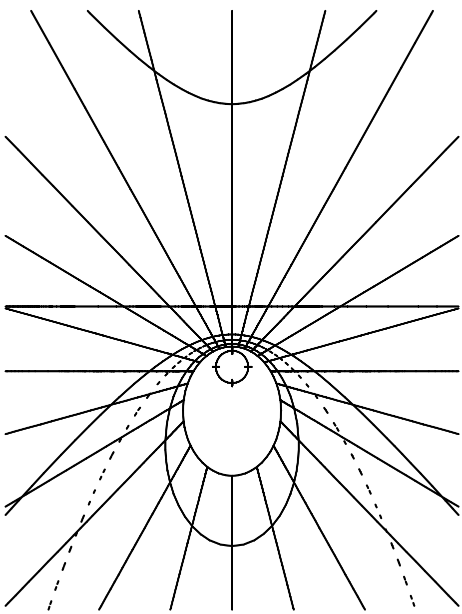
وسط ِ این بازه یِ زمانی انقلاب ِ تابستانی است. معادله یِ خم ِ مربوط به مرز ِ این شرط (تساوی در رابطه یِ بالا) می‌شود

$$X = \frac{\sin \omega t}{\cos \lambda (1 + \cos \omega t)},$$
$$Y = \frac{\sin^2 \lambda \cos \omega t - \cos^2 \lambda}{\sin \lambda \cos \lambda (1 + \cos \omega t)}. \qquad (29)$$

دوره یِ مشابه ی هم حول ِ انقلاب ِ زمستانی است،

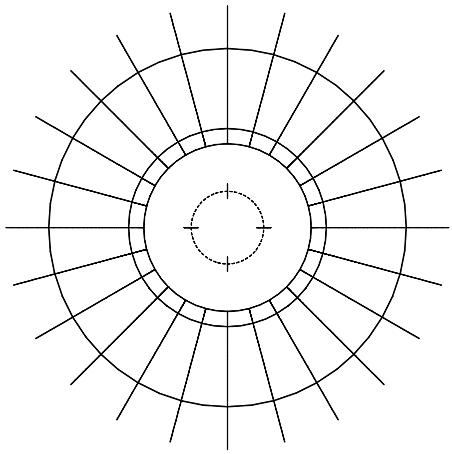
$$\sin \phi < -\frac{\cos \lambda}{\sin \theta}, \qquad (30)$$

که طی ِ آن $\cos \xi$ مثبت نمی‌شود، یعنی شب ِ دائمی است.



شکل ِ 9
خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه یِ قطبی یِ شمالی. جهت ِ شمال رو به بالا است. 24 خط ِ شعاعی خط‌ها یِ ساعت‌ثابت اند. خط ِ عمودی یِ وسط ِ شمالی خط ِ ظهر است و جهت ِ افزایش ِ ساعت ساعت‌گرد است. (این ساعت 24 شماره دارد نَه 12 تا، یعنی یک شبانه‌روز را می‌پوشاند. خم ِ خط‌چین ناحیه یِ خم‌ها یِ بسته (روزها یِ دائمی) را از ناحیه یِ خم‌ها یِ باز جدا می‌کند. خط ِ افقی یِ بلند خط ِ اعتدال است. از خم‌ها یِ روزثابت در نیمه یِ دوم ِ سال فقط یک ی کشیده شده، خم ِ شمالی ِ مربوط به یک ماه پیش از اعتدال ِ بهاری یا یک ماه پس از اعتدال ِ پاییزی. شعاع ِ دایره یِ مرکزی واحد (طول ِ میله) است. خود ِ میله هم در مرکز ِ دایره است. این شکل برا یِ عرض ِ جغرافیایی یِ $75°$ کشیده شده.

در قطب ِ شمال، شکل‌ها از این هم ساده‌تر می‌شوند. خم‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یِ شعاعی اند و خم‌ها یِ روزثابت دایره‌ها یِ متحدالمرکز.



شکل ـِ 10
خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در قطب ـِ شمال. خط‌ها یِ شعاعی خم‌ها یِ ساعت‌ثابت اند. جهت ـِ افزایش ـِ ساعت هم ساعت‌گرد است. در این‌جا ظهر خوش‌تعریف نیست. دایره‌ها (جز دایره یِ خط‌چین) خم‌ها یِ روزثابت اند. کوچک‌ترین ـِ این‌ها به انقلاب ـِ تابستانی مربوط است. فاصله یِ زمانی یِ این دایره‌ها از هم یک ماه است. دایره یِ بیرونی مال ـِ یک ماه پس از اعتدال ـِ بهاری، یا یک ماه پیش از اعتدال ـِ پاییزی است. شعاع ـِ دایره یِ خط‌چین واحد (طول ـِ میله) است. خود ـِ میله هم در مرکز ـِ دایره است.

3 تنظیم ـِ دقیق ـِ ساعت

تا این‌جا در مدرج‌کردن ـِ ساعت این فرض را به کار برده ایم که سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ چرخش ـِ زمین ثابت است. این فرض دقیقاً درست نیست. اگر محور ـِ چرخش ـِ زمین بر صفحه یِ مداری عمود می‌بود، این سرعت برابر ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخش ـِ زمین منها یِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ حرکت ـِ مداری یِ زمین می‌شد. اولی ثابت است ولی دومی ثابت نیست، چون مدار ـِ زمین بیضی است. تغییرات ـِ نسبی یِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ مداری یِ زمین از مرتبه یِ e است. خود ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ مداری حدود ـِ 0.003 برابر ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ چرخش ـِ زمین است. به این ترتیب، تغییرات ـِ نسبی یِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ زمین از مرتبه یِ 10^{-4} است. این متناظر است با تغییرات ـِ طول ـِ شبانه‌روز از مرتبه‌ی 5 ثانیه. اگر هدف مدرج‌کردن ـِ ساعت با دقت ـِ دقیقه باشد، این 5 ثانیه طی ـِ یک شبانه‌روز مهم نیست. اما این 5 ثانیه‌ها با هم جمع می‌شود و باعث می‌شود زمان ـِ ظهر از ساعت ـِ 12 جابه‌جا شود. بیشینه یِ این جابه‌جایی از مرتبه یِ همین 5 ثانیه ضرب در 200 (نصف ـِ تعداد ـِ روزهای سال) است، که حدود ـِ 15 دقیقه می‌شود. پس برا یِ مدرج‌کردن ـِ ساعت با دقت ـِ دقیقه، باید این اثر را در نظر گرفت. جز این، عمودنبودن ـِ محور ـِ چرخشِ زمین بر مدارَ ش هم باعث ـِ تغییر ـِ طول ـِ شبانه‌روز طی ـِ سال می‌شود.

معادله‌ی مدار ـِ زمین

$$s = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\phi-\phi_{\mathrm{P}})} \qquad (31)$$

است، که در آن a نیم‌قطر ـِ بزرگ ـِ بیضی، و s فاصله یِ زمین با خورشید است. مبدئ ـِ سنجش ـِ زاویه یِ سمتی (نسبت به خورشید) اعتدال ـِ بهاری، و $\phi_{\rm P}$ زاویه یِ نقطه یِ حضیض است. سرعت ـِ زاویه‌ای یِ حرکت ـِ مداری از این رابطه به دست می‌آید.

$$s^2\dot{\phi} = l, \tag{32}$$

که در آن l ثابت است. معادله یِ (31) تا مرتبه یِ یک نسبت به e می‌شود

$$s = a[1 - e\cos(\phi - \phi_{\rm P})]. \tag{33}$$

از این‌جا سرعت ـِ زاویه‌ای یِ مداری (تا مرتبه یِ یک نسبت به e) می‌شود

$$\Omega = \dot{\phi} = \frac{l}{a^2}[1 + 2e\cos(\phi - \phi_{\rm P})]. \tag{34}$$

ضریب ـِ کروشه سرعت ـِ زاویه‌ای یِ متوسط (Ω_0) است. پس

$$\begin{aligned}\Omega(T) &= \Omega_0[1 + 2e\cos(\phi - \phi_{\rm P})],\\ &= \Omega_0\{1 + 2e\cos[\Omega_0(T - T_{\rm P})]\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Ω_0 برابر است با 2π تقسیم بر یک سال. T زمان از اعتدال ـِ بهاری است. $T_{\rm P}$ هم زمان ـِ حضیض است. رابطه یِ ϕ با T می‌شود

$$\phi(T) = \Omega_0 T + 2e\{\sin[\Omega_0(T - T_{\rm P})] + \sin(\Omega_0 T_{\rm P})\}. \tag{36}$$

به خاطر ـِ عمودنبودن ـِ محور ـِ چرخش ـِ زمین بر مدار َـ ش، سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی تفاضل ـِ Ω از سرعت ـِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخشِ‌زمین نیست. سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی را از اختلاف ـِ زمانی یِ دو ظهر ـِ متوالی تعریف می‌کنیم. فرض کنید در زمان ـِ T جهت ـِ خورشید $\hat{\rm s}_0$ است. از مرکز ـِ زمین بردار ی در جهت ـِ $\hat{\rm s}_0$ می‌کشیم. در این زمان، در محل ـِ برخورد ـِ این بردار با سطح ـِ زمین ظهر است. سرعت ـِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخش ـِ زمین را با $\tilde{\omega}$ نشان می‌دهیم. پس از گذشت ـِ زمان ـِ $2\pi/\tilde{\omega}$، این نقطه در اثر ـِ چرخش ـِ زمین سر ـِ جا یِ خود َـ ش بر می‌گردد، اما در این زمان جهت ـِ خورشید دیگر $\hat{\rm s}_0$ نیست. با فرض ـِ کوچک‌بودن ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ مداری یِ زمین به سرعت ـِ زاویه‌ای یِ چرخش ـِ آن (که فرض ـِ معقول ی است، چون نسبت ـِ این‌دو تقریباً 0.003 است) جهت ـِ جدید ـِ خورشید

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0 + \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\Omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0 \tag{37}$$

است. به این ترتیب، در این زمان در آن نقطه ظهر نیست. در زمان ِ کوچک ِ δt پس از این، نقطه یِ مشاهده یِ $\hat{\mathbf{s}}_0$ به خاطر ِ چرخش ِ زمین به نقطه یِ

$$\hat{\mathbf{s}}' = \hat{\mathbf{s}}_0 + \delta t\, \tilde{\omega}\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0 \tag{38}$$

رفته است. (نقطه یِ مشاهده در واقع رو یِ سطح ِ زمین است، اما چون فقط جهت ِ بردار ِ نقطه یِ مشاهده مهم است، می‌شود آن را خود ِ $\hat{\mathbf{s}}_0$ گرفت.) ظهر در این نقطه‌یِ‌مشاهده زمانی ی است که سه‌بردار ِ $\hat{\mathbf{s}}$، $\hat{\mathbf{s}}'$، و $\hat{\mathbf{n}}$ در یک صفحه باشند، یعنی زمان ی که حاصلِ‌ضرب ِ سه‌تایی یِ این سه‌بردار صفر شود. این حاصلِ‌ضرب می‌شود

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}} &= \frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0) + \tilde{\omega}\delta t(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0)\cdot(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0),\\
&= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{n}} \cdot [\hat{\mathbf{s}}_0 \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0)] + \tilde{\omega}\delta t(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0)\cdot(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0),\\
&= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_3 - \hat{\mathbf{s}}_0\ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) + \tilde{\omega}\delta t \sin^2\alpha,\\
&= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\cos\theta + \tilde{\omega}\delta t\sin^2\alpha.
\end{aligned} \tag{39}$$

از این‌جا δt برا یِ ظهر به دست می‌آید:

$$\delta t = \frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}^2}\frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}. \tag{40}$$

سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی (ω) را 2π تقسیم بر فاصله یِ دو ظهر ِ متوالی تعریف می‌کنیم. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{(2\pi/\tilde{\omega}) + \delta t},\\
&= \tilde{\omega} - \frac{\tilde{\omega}^2\delta t}{2\pi},\\
&= \tilde{\omega} - \frac{\Omega\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}.
\end{aligned} \tag{41}$$

دیده می‌شود که اگر $\theta = 0$، طرف ِ راست $\tilde{\omega} - \Omega$ می‌شود و اگر $\theta = \pi$، طرف ِ راست $\tilde{\omega} + \Omega$ می‌شود، که همان چیز ی است که انتظار داریم.

تعداد ِ روزها یِ خورشیدی یِ یک سال می‌شود

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau}\omega(T)\mathrm{d}T,$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[\tilde{\omega}\tau - \int_0^{\tau} \frac{\Omega(T)\cos\theta}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi(T)}\mathrm{d}T\right],\\
&= \tilde{N} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta(1+\tan^2\phi)}{1+\cos^2\theta\tan^2\phi}\mathrm{d}\phi,\\
&= \tilde{N} - \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\cos\theta\tan\phi)\Big|_0^{2\pi},\\
&= \tilde{N} - \mathrm{sgn}(\cos\theta).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

توجه کنید که $\tan^{-1}$ در رابطه‌ها یِ بالا چندمقداری است. $\tan^{-1}(\cos\theta\tan\phi)$ در $\phi = 0$ صفر است و نسبت به ϕ هم پیوسته است. τ دوره یِ حرکت ِ مداری یِ زمین (یک سال)، و $\tilde{N}$ تعداد ِ روزها یِ نجومی یِ سال است. از این‌جا سرعتِ‌زاویه‌ای یِ متوسط ِ خورشیدی می‌شود

$$
\omega_0 = \tilde{\omega} - \Omega_0\,\mathrm{sgn}(\cos\theta). \tag{43}
$$

حالا می‌خواهیم ببینیم در زمان ِ T، اختلاف ِ زمان ِ استاندارد (بر اساس ِ یک ساعت برابر ِ یک بیست‌وچهارم ِ روز ِ متوسط ِ خورشیدی) با زمان ِ خورشیدی (بر اساس ِ جا یِ خورشید در آسمان) چه قدر است. هر دوزمان از فاز ِ چرخش ِ زمین به دست می‌آیند، اما یک ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ متوسط و یک ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ لحظه‌ای:

$$
\int_0^{T}\omega(T')\mathrm{d}T' = \int_0^{T_0}\omega_0(T')\mathrm{d}T' = \int_0^{\tilde{T}}\tilde{\omega}(T')\mathrm{d}T'. \tag{44}
$$

زمان ی که از ساعت ِ آفتابی خوانده می‌شود T_0 است. زمان ِ واقعی T است. اختلاف ِ این دوزمان تا مرتبه یِ یک می‌شود

$$
\omega_0(T-T_0) + \int_0^{T}[\omega(T') - \omega_0]\mathrm{d}T' = 0, \tag{45}
$$

یا

$$
T - T_0 = \frac{1}{\omega_0}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \Omega_0 T\}\,\mathrm{sgn}(\cos\theta). \tag{46}
$$

(چون این عبارت مرتبه‌یِ‌یک است، در طرف ِ راست می‌شود T یا T_0 گذاشت.) طرف ِ راست ِ این عبارت در اعتدال ِ بهاری صفر می‌شود. حالا فرض کنید در اعتدال ِ بهاری، ظهر به اندازه یِ Δ_0 بعد از ساعت ِ 12 باشد. این مقدار به ساعت ِ قراردادی بسته‌گی دارد. به این ترتیب، اگر زمان ی که ساعت ِ خورشیدی نشان می‌دهد T_0 باشد، زمان ِ قراردادی (T') می‌شود

$$
T' = T_0 + \frac{1}{\omega_0}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \Omega_0 T\}\,\mathrm{sgn}(\cos\theta) + \Delta_0. \tag{47}
$$

برا یِ دو نقطه که ساعت ـ رسمی یِشان یکی است، Δ_0 یک‌سان نیست و تفاوت ـ Δ_0 برا یِ این دو نقطه به اختلاف ـ طولِ‌جغرافیایی یِ این دونقطه بسته‌گی دارد:

$$\Delta_0' - \Delta_0 = \frac{(\zeta' - \zeta)d_0}{2\pi}. \tag{48}$$

در این‌جا ζ طول ـ جغرافیایی یِ محل، و d_0 روز ـ خورشیدی یِ متوسط (24 ساعت) است.

به رابطه یِ (46) بر گردیم. این رابطه را می‌شود این طور نوشت.

$$\begin{aligned} T - T_0 \ &= \frac{d_0}{2\pi}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \phi\}\,\mathrm{sgn}(\cos\theta) + \frac{d_0}{2\pi}(\phi - \Omega_0 T)\,\mathrm{sgn}(\cos\theta), \\ &=: \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned} \tag{49}$$

اگر مدار ـ زمین دایره‌ای می‌بود، جمله یِ دوم صفر می‌شد. اگر محور ـ چرخش ـ زمین بر مدار ـ آن عمود می‌بود، جمله یِ اول صفر می‌شد. با توجه به این که فاصله یِ زاویه‌ای یِ نقطه یِ حضیض از اعتدال ـ بهاری حدود ـ $\pi/2$ است، و با توجه به رابطه یِ (36)، بیشینه یِ جمله یِ دوم می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta_{2\mathrm{m}} \ &\approx \ \frac{4e\ d_0}{2\pi}, \\ &\approx \ 15\mathrm{min}. \end{aligned} \tag{50}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ـ بیشینه یِ جمله یِ اول مشتق ـ آن نسبت به ϕ را صفر می‌گذاریم:

$$\frac{|\cos\theta|(1 + \tan^2\phi)}{1 + \cos^2\theta\tan^2\phi} = 1. \tag{51}$$

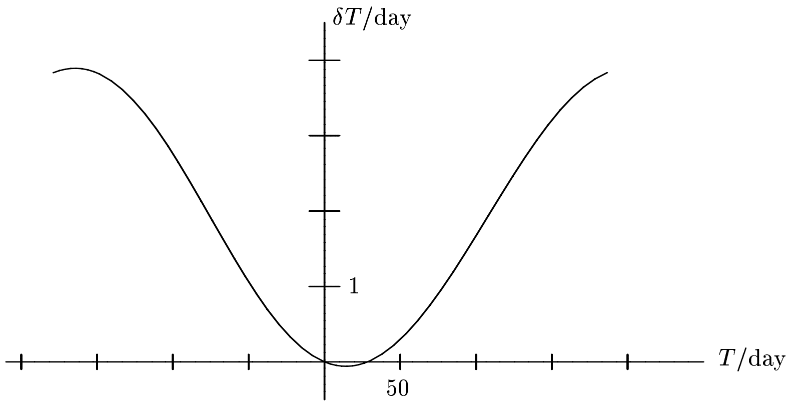
نتیجه می‌شود

$$\tan^2\phi = \frac{1}{|\cos\theta|}, \tag{52}$$

و از آن‌جا بیشینه یِ جمله یِ اول می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta_{1\mathrm{m}} \ &= \ \left[\tan^{-1}\left(|\cos\theta|^{-1/2}\right) - \tan^{-1}\left(|\cos\theta|^{1/2}\right)\right]\frac{d_0}{2\pi}, \\ &\approx \ 0.007 d_0, \\ &\approx \ 10\mathrm{min}. \end{aligned} \tag{53}$$

دیده می‌شود در مورد ـ زمین، اثر ـ بیضی‌بودن ـ مدار ـ زمین و عمودنبودن ـ محور ـ چرخش ـ آن بر مدار ـَ ش از یک مرتبه است.



شکل ـ 11
نمودار ـ تقویم ـ واقعی منها یِ تقویم ـ آفتابی، بر حسب ـ زمان.

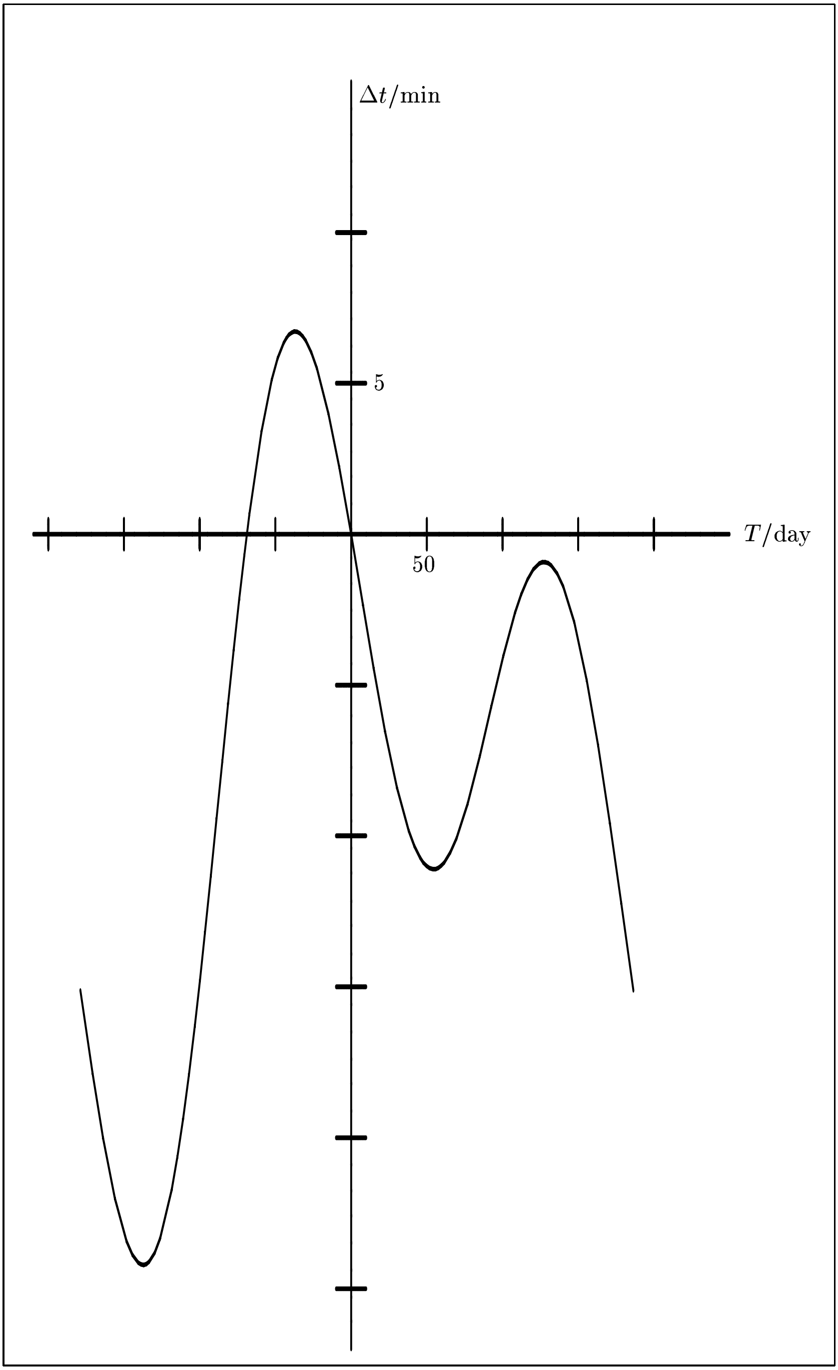
اگر زاویه یِ محور ـ چرخش ـ یک سیاره با عمود بر مدار َش زیاد می‌شد (نزدیک ـ 90 درجه) اتفاق ـ جالب ی می‌افتاد. برا یِ ساده‌گی مدار را دایره می‌گیریم. داریم

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \tan^{-1}(\epsilon \tan\phi) = \begin{cases} 0, & 0 < \phi < \pi/2 \\ \pi, & \pi/2 < \phi < 3\pi/2 \\ 2\pi, & 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases}. \qquad (54)$$

معنی یِ این عبارت آن است که برا یِ چنین‌سیاره ای، از اعتدال ـ بهاری تا انقلاب ـ تابستانی طول ـ روز برابر ـ روز ـ نجومی است. طول ـ روز ـ انقلاب ـ تابستانی نصف ـ روز (برا یِ $\theta > \pi/2$) یا یک و نیم روز (برا یِ $\theta < \pi/2$) است. پس از آن تا انقلاب ـ زمستانی طول ـ روز برابر ـ روز ـ نجومی است، و در انقلاب ـ زمستانی دوباره همین روز ـ غیرِعادی تکرار می‌شود. بین ـ سیاره‌ها یِ منظومه‌یِ‌شمسی، وضعیت ـ اُرانوس از همه یِ سیاره‌ها یِ دیگر به این وضعیت نزدیک‌تر است ($\theta \approx 98^\circ$).

برا یِ تنظیم ـ دقیق ـ ساعت و تقویم، دو نمودار لازم است. یک ی نمودار ـ انحراف ـ تقویم ـ واقعی از تقویم ـ آفتابی بر حسب ـ زمان، و دیگر ی نمودار ـ انحراف ـ ساعت ـ واقعی از ساعت ـ آفتابی. شکل ـ 11 نمودار ـ اول را نشان می‌دهد. معنی یِ این نمودار آن است که اگر روز ـ خوانده‌شده از رو یِ ساعت ـ آفتابی T باشد، باید مقدار ـ δT را به آن افزود تا روز ـ واقعی به دست آید.

شکل ـ 12 نمودار ـ انحراف ـ ساعت ـ واقعی از ساعت ـ خورشیدی را نشان می‌دهد. معنی یِ این نمودار آن است که اگر ساعت ـ آفتابی زمان ـ t را نشان دهد، باید به آن مقدار ـ Δt را افزود تا ساعت ـ واقعی به دست آید. البته به جز این، باید مقدار ـ Δ_0 را هم افزود تا ساعت ـ رسمی به دست آید. مقدار ـ Δ_0 قراردادی است، و در واقع برابر است با زمان ـ رسمی یِ ظهر ـ آفتابی در محل منها یِ ساعت ـ دوازده ـ ظهر، در روز ـ اعتدال ـ بهاری.



شکل ِ 12
نمودار ِ ساعت ِ واقعی منها یِ ساعت ِ آفتابی، بر حسب ِ زمان.

4 دستورالعمل برا یِ ساختن ـ ساعت ـ آفتابی

- یک ناحیه یِ هموار ـ افقی یِ آفتاب‌گیر پیدا کنید. افقی‌بودن را می‌شود با مثلاً تراز ـ آبی امتحان کرد. آفتاب‌گیربودن هم نوعاً یعنی این که جنوب ـ این ناحیه باز باشد (در ناحیه یِ معتدل ـ شمالی، از جمله ایران).
- یک میله را به طور ـ عمودی نصب کنید، چنان که سایه یِ میله کاملاً رو یِ بخش ـ هموار ـ ناحیه یِ افقی بیفتد. در ناحیه یِ معتدل ـ شمالی، این یعنی اطراف ـ میله در جهت ـ شمال و شرق و غرب تا فاصله یِ چندبرابر ـ طول ـ میله باز باشد، یعنی به‌تر است میله در جنوب ـ ناحیه یِ افقی نصب شود. با استفاده از رابطه یِ (19) یا با استفاده از روش ـ هندسی یِ شکل ـ 5، خم‌ها یِ تقریبی یِ ساعت‌ثابت را بکشید.

اگر فقط ساعت ـ بی‌تقویم ـ تقریبی (تا حد ـ نیم‌ساعت دقت) می‌خواهید، کار تمام است. در غیر ـ این صورت،

- در رابطه یِ (15) به جا یِ λ عرض ـ جغرافیایی یِ محل را بگذارید و α را مقدار ـ ثابت ی بگیرید. معادله یِ پارامتری یِ خم ـ روزثابت به دست می‌آید. پارامتر ωt است، و α از رابطه یِ (4) به دست می‌آید، که در آن ϕ زاویه یِ خط ـ واصل ـ زمین به خورشید با این خط در اعتدال ـ بهاری است، و $\theta = 23°27'$. تقویم ـ تقریبی چنین به دست می‌آید که گذشت ـ هر ماه برابر است با افزایش ـ ϕ به مقدار ـ $\pi/6$ (یا 30 درجه). این کار را برا یِ مقدارها یِ مختلف ـ ϕ انجام دهید. نتیجه برا یِ ایران چیز ی شبیه ـ شکل ـ 8 خواهد شد. (این شکل خم‌ها یِ ساعت‌ثابت را هم دارد.)
    - با استفاده از شکل ـ 11، می‌شود تقویم ـ دقیق را از رو یِ تقویم ـ تقریبی به دست آورد.
- زمان ـ رسمی یِ ظهر ـ آفتابی در روز ـ اعتدال ـ بهاری در محل را به دست آورید. برا یِ این‌کار می‌توانید وقت ی ساعت ـ آفتابی دوازده ـ ظهر را نشان می‌دهد ساعت ـ رسمی را بخوانید. این مقدار ـ Δ_0 را می‌دهد.
- با استفاده از نمودار ـ شکل ـ 12، می‌شود ساعت ـ دقیق را از رو یِ ساعت ـ تقریبی به دست آورد. (به عددها یِ این نمودار باید مقدار ـ Δ_0 را هم افزود.)

5 مرجع

[۱] محمود ـ بهمن‌آبادی و احسان ـ لطفی؛ مجله یِ فیزیک ۱۸، ۳ و ۴ (پاییز و زمستان ـ ۱۳۷۹) ۱۰۴ تا ۱۰۸