اثر ـ جَو ـ زمین بر شکل و اندازه یِ ظاهری یِ اجسام[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-018 (2003/08/28)

اثر ـ شکست ـ نور در جَو ـ زمین بر اندازه و شکل ـ ظاهری یِ اجسام بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود این پدیده که اجسام در نزدیکی یِ افق بزرگ‌تر می‌نمایند، نَه یک پدیده یِ فیزیکی بل که یک پدیده یِ روان‌شناختی است، اما این پدیده که اجسام در نزدیکی یِ افق پخ می‌نمایند، فیزیکی است.

0 مقدمه

چگالی یِ جَو ـ زمین یک‌نواخت نیست. به همین خاطر نور ی که وارد ـ جَو ـ زمین می‌شود می‌شکند و این شکست، بر اندازه و شکل ـ ظاهری یِ اجسام (از جمله ماه و خورشید) مئثر است. جهت ـ مثبت ـ محور ـ z را جهت ـ شعاعی در نقطه یِ مشاهده در سطح ـ زمین و به طرف ـ بیرون می‌گیریم. هر جهت را می‌شود با (θ,ϕ) مشخص کرد، که زاویه‌ها یِ مختصات ـ کروی با این محور ـ z و به مرکز ـ نقطه یِ مشاهده اند. به خاطر ـ شکست ـ نور در جَو، پرتو یی که ظاهراً از جهت ـ (θ,ϕ) می‌آید، در واقع از جهت ـ (θ_0,ϕ_0) آمده است. با معلوم‌بودن ـ ضریبِ‌شکست در جَو، بسته‌گی یِ (θ_0,ϕ_0) به (θ,ϕ) به دست می‌آید. از این‌جا می‌شود اندازه (یِ زاویه‌ای) یِ و شکل ـ واقعی جسم را بر حسب ـ مشخصات ـ ظاهری یِ آن به دست آورد. به‌ویژه، می‌خواهیم ببینیم پدیده یِ درشت‌دیدن ـ ماه و خورشید در نزدیکی یِ افق، و بیضی‌دیدن ـ قرص ـ ماه و خورشید در نزدیکی یِ افق، فیزیکی (ناشی از شکست ـ نور) است یا روان‌شناختی.

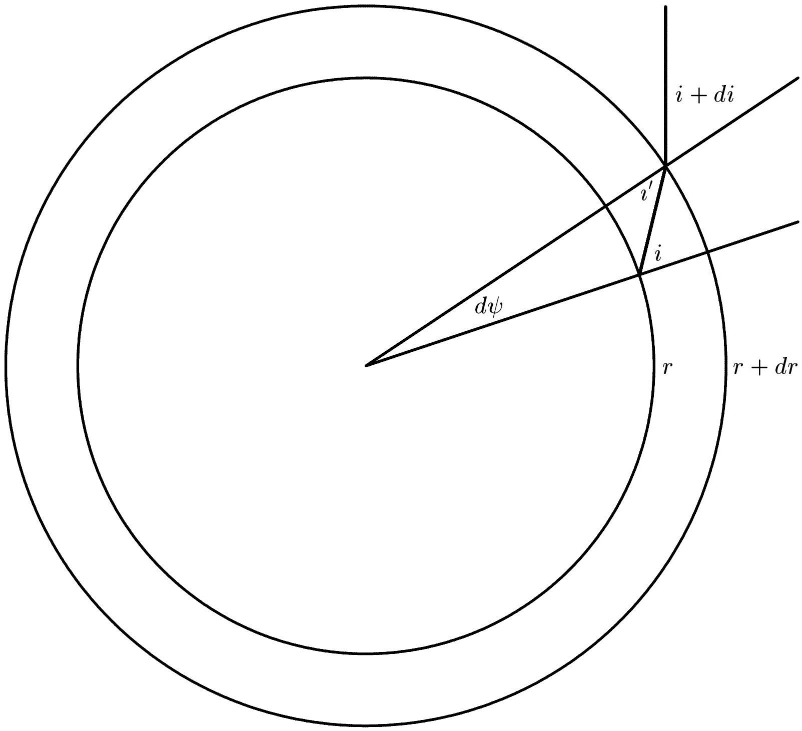
در یک مدل ـ ساده برا یِ جَو، فرض می‌کنیم چگالی یِ جَو تابع ـ فقط ارتفاع (یا فاصله تا مرکز ـ زمین) است. از این‌جا نتیجه می‌شود زاویه‌ها یِ سمتی یِ ϕ و ϕ_0 برابر اند:

$$\phi_0=\phi, \qquad (1)$$

و θ_0 هم تابع ـ θ است. با به‌دست‌آوردن ـ بسته‌گی یِ θ_0 به θ، شکل و اندازه یِ زاویه‌ای یِ واقعی یِ

[1] این مقاله، با اجازه یِ نویسنده، از منزل‌گاه ـ نویسنده برداشته شده است، و همه یِ حقوق ـ آن برا یِ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-018.ps



شکل ـ 1

هر جسم بر حسب ـ مشخصات ـ ظاهری یِ آن به دست می‌آید. اگر اندازه یِ زاویه‌ای یِ جسم ـ موردِنظر کوچک باشد، آن‌گاه رابطه یِ مشخصه‌ها یِ ظاهری و واقعی به فقط زاویه یِ جهت ـ مشاهده یِ جسم با جهت ـ روبه‌بالا بسته‌گی دارد.

1 مسیر ـ نور در جَو

زمین را یک کره یِ کامل به شعاع ـ R می‌گیریم، و فاصله یِ هر نقطه در جَو با مرکز ـ زمین را با r و ضریب ـ شکست در جَو را با $n(r)$ نشان می‌دهیم. مختصات ـ کروی یِ (r, ψ, ϕ) را با همان محور ـ z که در بخش ـ قبل تعریف شد، اما با مبدئِ ـ منطبق بر مرکز ـ زمین در نظر می‌گیریم. مسیر ـ یک باریکه یِ نور در جَو را با $\psi(r)$ نشان می‌دهیم. (با فرض ی که در باره یِ ضریب ـ شکست شد، ϕ مستقل از r است.) به این ترتیب، θ برابر است با زاویه یِ باریکه در $r = R$، با محور ـ z؛ و θ_0 برابر است با مقدار ـ ψ در حد ـ $r \to \infty$. زاویه یِ باریکه با جهت ـ شعاعی را با i نشان می‌دهیم. شکل ـ 1 هندسه یِ شکست ـ نور را نشان می‌دهد.

از قانون ِ سْنِل [a]—دِکَرت [b]،

$$\frac{\sin(i+\mathrm{d}i)}{\sin i'}=\frac{n}{n+\mathrm{d}n}. \tag{2}$$

هم‌چنین، از رو ‌یِ شکل ِ 1 دیده می‌شود

$$i'=i-\mathrm{d}\psi, \tag{3}$$

و

$$\begin{aligned} r\,\mathrm{d}\psi\ &=\ (\tan i')\,\mathrm{d}r,\\ &=\ (\tan i)\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{4}$$

رابطه‌ها ‌یِ اخیر، تا مرتبه ‌یِ یک درست اند. از این‌جا،

$$\frac{\sin i+(\cos i)\,\mathrm{d}i}{\sin i-r^{-1}(\cos i\ \tan i)\,\mathrm{d}r}=1-\frac{\mathrm{d}n}{n}, \tag{5}$$

یا

$$(\cot i)\,\mathrm{d}i+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}n}{n}=0, \tag{6}$$

که نتیجه می‌دهد

$$n\,r\,\sin i=C. \tag{7}$$

C مقدار ی ثابت است. از ترکیب ِ (4) با (7)، دیده می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=\frac{\dfrac{C}{n\,r^2}}{\sqrt{1-\dfrac{C^2}{n^2\,r^2}}}, \tag{8}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}u}=-\frac{\dfrac{N\ \sin\theta_0}{n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{N\ \sin\theta_0}{n}\,u\right)^2}}, \tag{9}$$

که

$$\begin{aligned} u\ &:=\ \frac{R}{r},\\ N\ &:=\ n(r=R), \end{aligned} \tag{10}$$

و ثابت ِ C هم بر حسب ِ N، R، و θ_0 بیان شده است. در $r = R$ (نقطه یِ مشاهده) ψ صفر است. به این ترتیب،

$$\psi(r \to \infty) = \int_0^1 \mathrm{d}u \, \frac{\dfrac{N \, \sin\theta_0}{n}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{N \, \sin\theta_0}{n} \, u\right)^2}}, \tag{11}$$

و از آن‌جا،

$$\theta = \int_0^1 \mathrm{d}u \, \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{(n/N)^2 - (u \, \sin\theta_0)^2}}. \tag{12}$$

در محیط‌ها یِ رقیق، ضریب ِ شکست به شکل ِ

$$n = 1 + \alpha \, \rho \tag{13}$$

است، که ρ چگالی و α ثابت ی وابسته به جنس ِ محیط است. (اگر ملکول‌ها یِ سازنده یِ محیط دوقطبی یِ الکتریکی یِ دائمی داشته باشند، این ثابت به دما هم بسته‌گی دارد.) این رابطه وقت ی درست است که انحراف ِ ضریب ِ شکست از 1 کوچک باشد [1]. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= 1 + \alpha \, (\rho - \rho_0), \\ &= 1 + \alpha \, \rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right), \end{aligned} \tag{14}$$

که ρ_0 چگالی یِ هوا در سطح ِ زمین است، و چون بیش‌تر ِ جَو از ملکول‌ها یِ بدون ِ دوقطبی یِ دائم ساخته شده، α ثابت فرض شده. عبارت ِ بالا را به این شکل می‌نویسیم.

$$\frac{n}{N} = 1 - \Delta \, f(u), \tag{15}$$

که

$$\Delta := \rho_0 \, \alpha = N - 1 = 1 - \frac{1}{N}, \tag{16}$$

و

$$f := 1 - \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{17}$$

با استفاده از

$$N = 1.0003, \tag{18}$$

نتیجه می‌شود

$$\Delta = 3\times 10^{-4}. \tag{19}$$

مقدار ـِ f بین ـِ 0 و 1 است، و

$$\begin{aligned} f(u=0) &= 1,\\ f(u=1) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Δ هم ثابت ی کوچک است. به این ترتیب، (12) می‌شود

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^1 \mathrm{d}u\, \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1-(u\,\sin\theta_0)^2 - 2\Delta\, f(u)}},\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}u\, \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1-(u\,\sin\theta_0)^2}} + \Delta\,\sin\theta_0\, \int_0^1 \mathrm{d}u\, \frac{f(u)}{[1-(u\,\sin\theta_0)]^{3/2}},\\ &= \theta_0 + \Delta\,\sin\theta_0\, \int_0^1 \mathrm{d}u\, \frac{f(u)}{[1-(u\,\sin\theta_0)]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{21}$$

چگالی یِ جَو، در فاصله یِ کوچک ی از سطح ـِ زمین (کوچک در مقایسه با شعاع ـِ زمین) عملاً صفر می‌شود. بنابراین f یک است، مگر آن که u خیل ی نزدیک به یک باشد. یک تقریب برا یِ f این است که نمودار ـِ آن را به شکل ـِ دو پاره‌خط بگیریم:

$$f(u) = \begin{cases} 1, & 0\le u\le 1-\sigma \\ \sigma^{-1}\,(1-u), & 1-\sigma\le u\le 1 \end{cases}. \tag{22}$$

ثابت ـِ σ از مشتق ـِ f در $u=1$ به دست می‌آید:

$$f'(1) = -\frac{1}{\sigma}. \tag{23}$$

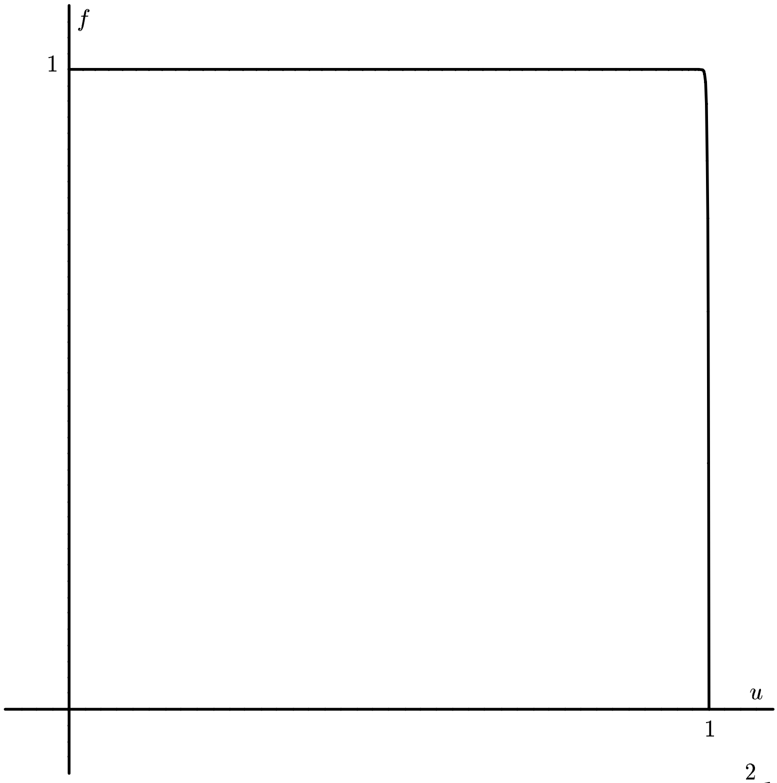
یک مدل برا یِ جَو ـِ زمین، جَو ـِ هم‌دما است. برا یِ چنین‌جَو ی،

$$f = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\,\left(\frac{1}{u}-1\right)\right], \tag{24}$$

(مثلاً [2])، که

$$\sigma := \frac{L}{R} := \frac{k_\mathrm{B}\,T}{g\,m\,R}. \tag{25}$$

k_B ثابت ـِ بُلتس‌مان [c]، T دما یِ مطلق ـِ جَو، g شتاب ـِ گرانش، و m جرم ـِ ملکولی یِ میان‌گین ـِ هوا است. L پارامتر ی با بعد ـِ طول است. با گذاشتن ـِ $(N_\mathrm{A}\,k_\mathrm{B}) = 8.3\,\mathrm{J/(molK)}$، $T = 300\ \mathrm{K}$،



شکلِ 2

نمودارِ f برحسبِ u

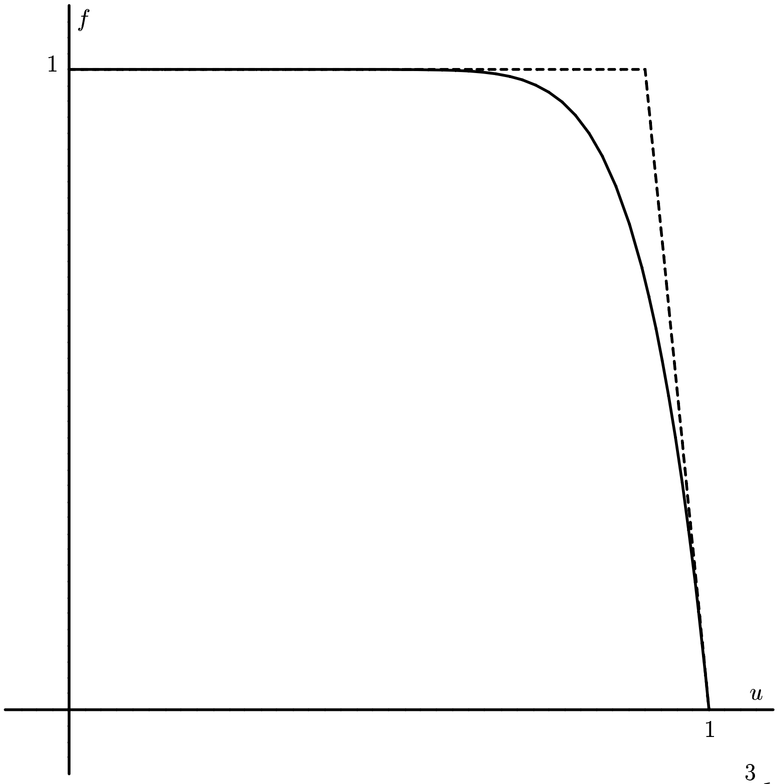
$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$، و $(N_\mathrm{A}\,m) = 0.029\,\mathrm{g/mol}$، و $R = 6400\,\mathrm{km}$ (که N_A عددِ آوُگادرُ [d] است)، نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
L &= 8.8\ \mathrm{km},\\
\sigma &= 0.0014,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

که نشان می‌دهد σ واقعاً کوچک است. در واقع اگر نمودارِ f برحسبِ u، و تقریبِ دوپاره‌خطی یِ آن را بکشیم، با این مقدارِ σ فقط یک مربع دیده می‌شود، شکلِ 2. شکلِ 3 نمودارِ اغراق‌شده یِ f و تقریبِ آن است. در این نمودار، $\sigma = 0.1$ است. چنان که از شکلِ 2 بر می‌آید، f با تقریبِ بسیارخوب ی 1 است. اگر θ_0 خیلی به $(\pi/2)$ نزدیک نباشد، انتگرال‌ده یِ رابطه یِ (21) در نزدیکی یِ $u = 1$ خیلی بزرگ نمی‌شود و می‌شود f را 1 گرفت. در این صورت،

$$
\theta = \theta_0 + \Delta\ \tan\theta_0. \tag{27}
$$

این تقریب زمان ی معتبر است که جسمِ موردِمشاهده خیلی نزدیک به افق نباشد. این تقریب، در واقع



شکل ـِ 3

نمودار ـِ f بر حسب ـِ u، به ازا يِ $\sigma = 0.1$. خط‌چین تقریب ـِ f با دو مماس بر آن در $u = 0$ و $u = 1$ را نشان می‌دهد.

هم‌ارز با این است که جَو را لایه ای مسطح بگیریم (و نَه کروی)، که اگر مسیر ـِ نور در جَو، در مقایسه با شعاع ـِ زمین ناچیز باشد، معقول است. دیده می‌شود در این حالت تنهامشخصه یِ جَو که وارد می‌شود ضریب ـِ شکست در سطح ـِ زمین است. با محاسبه یِ مستقیم ـِ شکست ـِ نور ی که از یک تیغه یِ مسطح می‌گذرد، نتیجه می‌شود

$$\sin\theta = N\,\sin\theta_0. \tag{28}$$

از (16) (و با توجه به کوچکی یِ Δ) نتیجه می‌شود

$$N = 1 + \Delta, \tag{29}$$

که از ترکیب ـِ (28) با آن،

$$\sin\theta_0 + (\theta - \theta_0)\,\cos\theta_0 = \sin\theta_0 + \Delta\,\sin\theta_0, \tag{30}$$

که همان (27) است.

برا یِ جسم‌ها یِ نزدیک به افق، تقریب ِ (27) خوب نیست. یک راه استفاده از تقریب ِ (22) است. با جاگذاری یِ این عبارت در (21) نتیجه می‌شود

$$\theta \,=\, \theta_0 + \Delta\,\left[\frac{(1-\sigma)\,\sin\theta_0}{\sqrt{1-(1-\sigma)^2\,\sin^2\theta_0}} - \frac{(1-\sigma)\,\sin\theta_0}{\sigma\,\sqrt{1-(1-\sigma)^2\,\sin^2\theta_0}} + \frac{1}{\sigma}\,\tan\theta_0 - \frac{1}{\sigma\,\sin\theta_0\,\cos\theta_0} + \frac{1}{\sigma\,\sin\theta_0\,\sqrt{1-(1-\sigma)^2\,\sin^2\theta_0}}\right]. \tag{31}$$

از جمله،

$$\theta\left(\theta_0=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \Delta\sqrt{\frac{2-\sigma}{\sigma}}, \tag{32}$$

که با گذاشتن ِ مقدارها یِ عددی یِ Δ و σ می‌دهد

$$\theta\left(\theta_0=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 0.01. \tag{33}$$

شکل ِ 4 نمودار ِ $(\theta-\theta_0)$ بر حسب ِ θ را نشان می‌دهد.

2 اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری و اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی

دو بردار ِ یکه یِ $\hat{\mathbf{n}}$ و $\hat{\mathbf{n}}'$ با جهت‌ها یِ به‌ترتیب (θ,ϕ) و (θ',ϕ') را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}\cos\gamma \,&=\, \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}',\\ &=\cos\theta\,\cos\theta' + \sin\theta\,\sin\theta'\,\cos(\phi-\phi'),\end{aligned} \tag{34}$$

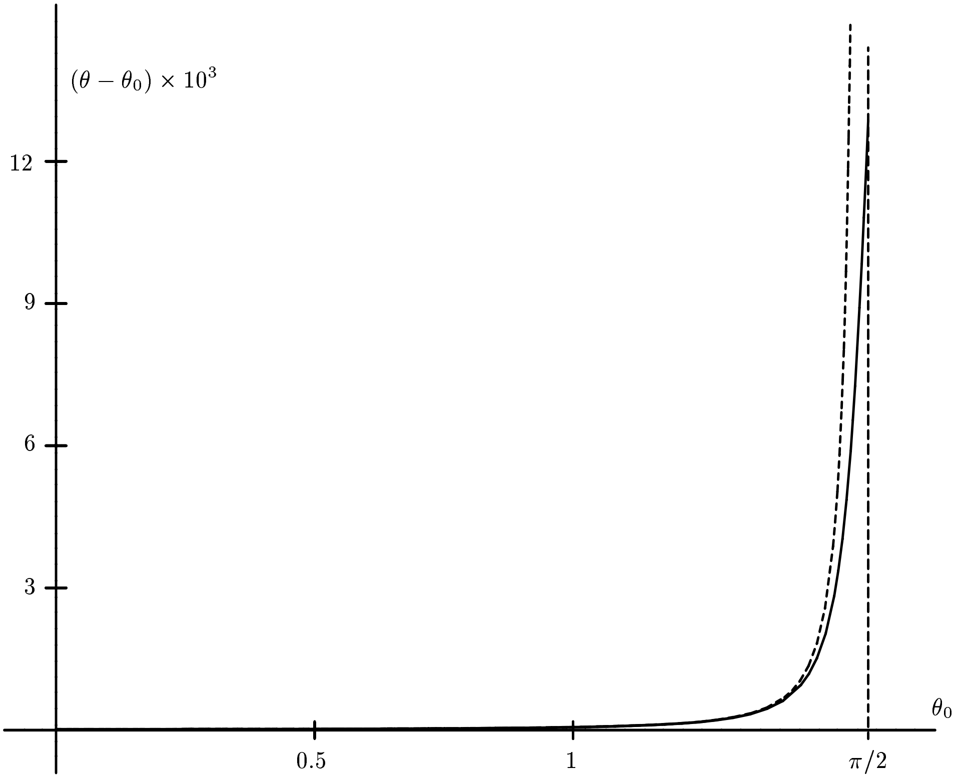
که γ زاویه یِ این دوبردار با هم است. اگر مقدارها یِ

$$\begin{aligned}\delta\theta \,&:=\, \theta'-\theta,\\ \delta\phi \,&:=\, \phi'-\phi\end{aligned} \tag{35}$$

کوچک باشند (جهت‌ها یِ این دوبردار به هم نزدیک باشند) (34) را می‌شود ساده‌تر کرد:

$$\begin{aligned}\cos\gamma \,&=\, \cos(\theta'-\theta) + \sin\theta\,\sin\theta'\,[\cos(\phi'-\phi)-1],\\ &\approx 1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2} - \frac{\sin^2\theta\,(\delta\phi)^2}{2},\end{aligned} \tag{36}$$

که نتیجه می‌دهد



شکل ـ 4

نمودار ـ $(\theta-\theta_0)$ بر حسب ـ θ. خط‌چین نمودار ـ $\Delta\ \tan\theta_0$ بر حسب ـ θ_0 است.

$$\gamma \approx \sqrt{(\delta\theta)^2+\sin^2\theta\,(\delta\phi)^2}. \tag{37}$$

(این نتیجه را با استفاده از شکل ـ عنصر ـ طول در مختصات ـ کروی هم می‌شد به دست آورد.) از این‌جا رابطه ي اندازه‌ي‌زاویه‌ای ي ظاهری و اندازه‌ي‌زاویه‌ای ي واقعی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_0}{\gamma} &= \frac{\sqrt{(\delta\theta_0)^2+\sin^2\theta_0\,(\delta\phi_0)^2}}{\sqrt{(\delta\theta)^2+\sin^2\theta\,(\delta\phi)^2}},\\ &= \frac{\sqrt{(\delta\theta_0)^2+\sin^2\theta_0\,(\delta\phi_0)^2}}{\sqrt{(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\theta_0)^2(\delta\theta_0)^2+[(\sin^2\theta)/(\sin^2\theta_0)]\,\sin^2\theta_0\,(\delta\phi_0)^2}}.\end{aligned} \tag{38}$$

در این‌جا از این استفاده شده که ϕ و ϕ_0 برابر اند. از جمله،

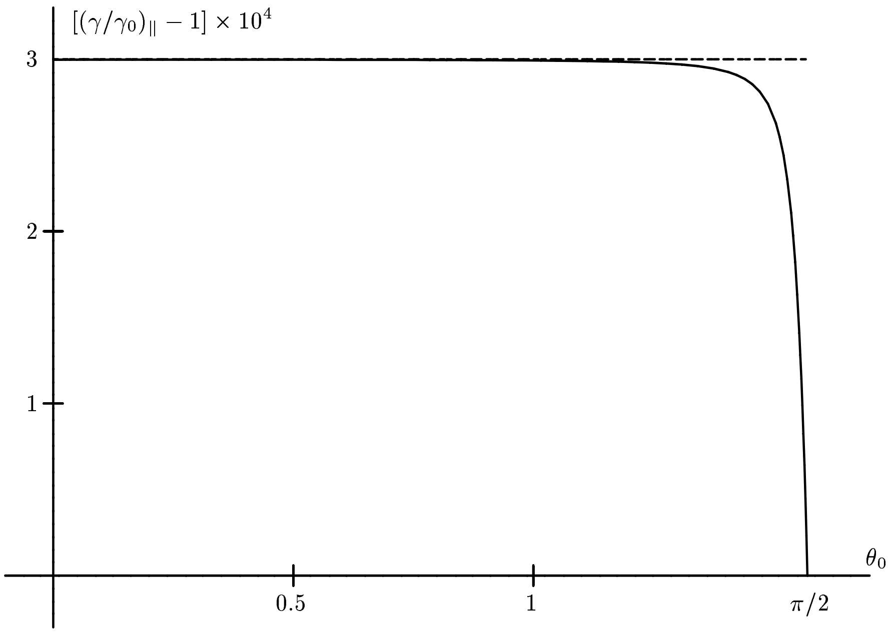
$$\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)_{\parallel} = \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}, \tag{39}$$

و

$$\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)_\perp = \frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}\theta}, \tag{40}$$

که $\|$ و $\perp$، متناظر اند با به‌ترتیب حالت ی که پاره‌خط ِ موردِمشاهده موازی با افق یا عمود بر آن است.

شکل ِ 5 نمودار ِ $[(\gamma/\gamma_0)_\| - 1]$ بر حسب ِ θ_0 است. از این نمودار دیده می‌شود برا یِ پاره‌خط‌ها یِ موازی با افق، اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری کوچک‌تر از اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی است، اما اختلاف ِ نسبی یِ این اندازه‌ها از مرتبه یِ 10^{-4} است.

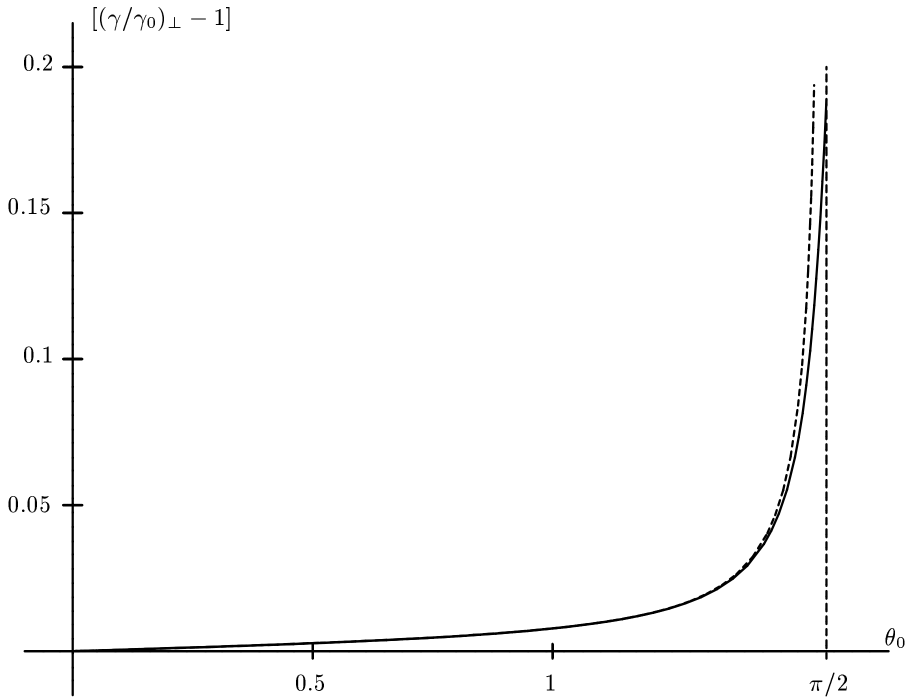


شکل ِ 5

نمودار ِ $[(\gamma/\gamma_0)_\| - 1]$ بر حسب ِ θ_0

شکل ِ 6 نمودار ِ $[(\gamma/\gamma_0)_\perp - 1]$ بر حسب ِ θ_0 است. از این نمودار دیده می‌شود برا یِ پاره‌خط‌ها یِ عمود بر افق هم، اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری کوچک‌تر از اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی است. اما این بار اختلاف ِ نسبی یِ این اندازه‌ها، در نزدیکی یِ افق چشم‌گیر است:

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_\perp \left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0.2. \tag{41}$$



شکل ـِ 6

نمودار ـِ $[(\gamma/\gamma_0)_\perp - 1]$ بر حسب ـِ θ_0. خط‌چین نمودار ـِ $\Delta\,(1 + \tan^2\theta_0)$ بر حسب ـِ θ_0 است.

3 نتیجه

از نمودارها یِ بخش ـِ پیش، دیده می‌شود

- اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری یِ هر جسم، هم‌واره کوچک‌تر از اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی یِ آن است.
- این اختلافِ‌اندازه، جز زمان ی که جسم نزدیک به افق است ناچیز است.

- تغییرِاندازه يِ ظاهری، در راستا يِ موازی با افق همیشه ناچیز است، حتا وقت ی جسم نزدیک ـِ افق باشد.

به این ترتیب، این که ماه و خورشید در نزدیکی يِ افق بزرگ‌تر به نظر می‌رسند، یک پدیده يِ روان‌شناختی است نَه فیزیکی [3]. اما اندازه‌يِ‌زاویه‌ای يِ ظاهری يِ ماه و خورشید در راستا يِ عمود بر افق، واقعاً حدود ـِ 20% کم‌تر از اندازه‌يِ‌زاویه‌ای يِ واقعی است. پس این که ماه و خورشید، در نزدیکی يِ افق پخ می‌نمایند، یک پدیده يِ فیزیکی است. ضمناً برا يِ تحلیل ـِ این مسئله، فقط دو داده لازم است: Δ و σ. اول يِ برابر است با ضریبِ‌شکست ـِ جَو در سطح ـِ زمین منها يِ یک، و دوم ی برابر است با ارتفاع ـِ مشخصه يِ افت ـِ چگالی يِ جَو در سطح ـِ زمین تقسیم بر شعاع ـِ زمین.

4 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 4

[2] S. P, Strelkov; "Mechanics", 3rd edition (Mir Publishers, 1969) section 97

[3] Lloyd Kaufman & James R. Kaufman; "Explaining the moon illusion", Proceddings of the National Academy of Sciences **97** (2000) 500

5 اسم‌ها يِ خاص

[a] Snell

[b] Descartes

[c] Boltzmann

[d] Avogadro