

## یادداشتی بر مقاله‌ی دوبروی: تابش - موج‌ها و کوانتم‌ها

امیرحسین فتح‌اللهی

چکیده: این یادداشت توضیحی است به زبان امروزی از کاری که دُبروی در یکی از مقاله‌های مهمش کرده، کاری که در آن رابطه‌ی  $\lambda = h/p$  برای ذره‌های مادی پیش‌نهاد می‌شود.

دوبروی اولین کسی است که رفتار دوگانه‌ی موج - ذره را که برای فوتون شناخته شده بود، به دیگر ذرات، از جمله الکترون‌ها، نسبت داد. کار او از این بابت اهمیت دارد که این رفتار دوگانه را نه به عنوان یک خیال‌پردازی شاعرانه، بل که بر اساس روابط کمی - آزمون‌پذیر مطرح کرد. دوبروی فرض می‌کند که به هر ذره موجی وابسته است، و طول موج این موج،  $\lambda$ ، به تکانه‌ی ذره،  $p$ ، به این شکل مربوط است.

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

این رابطه برای فوتون به راحتی به دست می‌آید، به این ترتیب: از الکترومغناطیس مکسول، که در زمان دوبروی کاملاً شناخته شده بود، می‌دانیم که موج الکترومغناطیسی حامل انرژی و تکانه است. اگر جسمی انرژی  $E$  را از تابش الکترومغناطیسی‌ای با بسامد  $\nu$  جذب کند، تکانه‌اش به اندازه‌ی  $p = E/c$  تغییر خواهد کرد.

بنا بر نظریه‌ی اینشتین، این تابش را می‌توان متشکل از تعدادی فوتون گرفت که انرژی هر کدام  $h\nu$  است؛ یعنی  $E = N h\nu$ . به این ترتیب داریم

$$p = \frac{E}{c} = \frac{N h\nu}{c} = N \frac{h}{\lambda}, \quad \left( \lambda := \frac{c}{\nu} \right),$$

که آن را می‌توان این طور تفسیر کرد: تکانه‌ی هر فوتون  $h/\lambda$  است.

رابطه‌ی  $p = E/c$  را می‌شود برای فوتون از این راه هم به دست آورد که در رابطه‌ی جرم - انرژی - نسبیت، یعنی  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ ، جرم سکون را صفر بگذاریم. پس فوتون ذره‌ای است با جرم سکون صفر.

اگرچه رابطه‌ی دوبروی برای فوتون خیلی ساده به دست می‌آید، ولی تعمیم آن برای ذرات جرم‌دار به همین سراسستی نیست. کاری که دوبروی می‌کند این است که این رابطه را برای ذره‌ای

جرم‌دار به دست می‌آورد.<sup>1</sup> بدین منظور، دوبروی ابتدا فرض می‌کند ذره یک پدیده‌ی درونی متناوب دارد، که برای ناظر هم‌راه ذره با بسامد  $\nu_0$  نوسان می‌کند، به طوری که  $h\nu_0 = m_0 c^2$ . این پدیده‌ی درونی از دید ناظری که ذره را متحرک می‌بیند با بسامد کمتر  $\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$  نوسان می‌کند. این پدیده‌ی درونی را برای ناظر هم‌راه ذره و ناظر متحرک به ترتیب مثلاً با  $\sin 2\pi\nu_1 t$  و  $\sin 2\pi\nu_0 t_0$  توصیف می‌کنیم، که در آن  $t_0$  و  $t$  به ترتیب زمان‌هایی هستند که ناظر هم‌راه و ناظر متحرک اندازه می‌گیرند. اشاره می‌کنیم که تطابق فازی را که دوبروی از آن صحبت می‌کند، در مورد همین دو تابع است. پس از زمان  $t$  ناظر متحرک ذره را در فاصله‌ی  $x = vt$  می‌بیند. هم‌چنین از تبدیل لورنتس داریم

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{\beta}{c} x \right).$$

با جای‌گذاری  $t_0$  در  $\sin 2\pi\nu_0 t_0$ ، به  $\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{\beta}{c} x \right)$  با  $\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  می‌رسیم، که نمایان‌گر یک موج از دید ناظری است که ذره را متحرک می‌بیند. این همان موجی است که دوبروی وجودش را پیش‌نهاد می‌کند، و بسامدش از رابطه‌ی  $h\nu = mc^2$ ، با توجه به این که  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  نیز داده می‌شود. توجه داریم که وجود این موج، همان‌طور که دوبروی اشاره می‌کند، نتیجه‌ی مستقیم تلفیق نسبیت و رابطه‌ی کوانتومی پلانک-اینشتین است. در واقع به راحتی می‌توان دید که هر دو تابع  $\sin 2\pi\nu t_0$  و  $\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{\beta}{c} x \right)$  در معادله‌ی کوانتومی نسبیتی موج، موسوم به معادله‌ی کلاین-گوردن، صدق می‌کنند. سرعت فاز این موج، باز همان‌طور که دوبروی نیز می‌گوید،  $c/\beta$  است، که از سرعت نور بیش‌تر است. طول موج را نیز می‌توان به راحتی حساب کرد. داریم:

$$\lambda = \frac{c/\beta}{\nu} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{h}{p}$$

که همان رابطه‌ی دوبروی است.

دوبروی مجموع کارهایش در این زمینه را در رساله‌ی دکترایش و هم‌چنین در یک مقاله [1] که در سال 1924 چاپ شد ارائه کرد. در آن‌جا رابطه‌ی معروف خود را می‌آورد، ولی در همین یادداشت ترجمه‌شده که مال 1923 است نیز رابطه‌ی  $p = \frac{h}{\lambda}$  را اگرچه به‌طور ضمنی و در حالت خاص برای یک الکترون که مسیر دایره‌ای را با سرعت ثابت می‌گردد، آورده است. یک‌جا رابطه‌ی

$$\frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} T_r = nh,$$

را می‌آورد که در آن  $n$  عدد صحیح،  $T_r$  زمان تناوب، و  $\beta = v/c$ ، که  $v$  سرعت الکترون است. برای تکانه از نسبیت داریم  $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ . با جای‌گذاری در بالا داریم:  $p v T_r = nh$ . اما

<sup>1</sup> دوبروی می‌گوید که حتا در مورد فتون هم چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که بر اساس داده‌های تجربی جرم سکون فتون کم‌تر از  $10^{-53}$  kg، یعنی کم‌تر از  $10^{-23}$  برابر جرم الکترون است.

$v_{Tr}$  محیط دایره‌ای است که الکترون دور می‌زند، و اگر بنا باشد که مسیر الکترون پایدار باشد، موج وابسته به الکترون روی مسیر دایره‌ای باید یک موج ایستاده بسازد؛ چیزی که دوبرئی به آن شرط تشدید می‌گوید. پس با توجه به شرط مرزی دوری روی دایره، محیط دایره باید مضرب صحیحی از طول موج باشد، یعنی  $p n \lambda = n h$  که همان رابطه‌ی معروف است. همان‌طور که دیده شد موج دوبرئی سرعتی بیش از سرعت نور دارد، و از آن‌جا که خود ذره حتماً سرعتی کم‌تر از نور دارد، این‌طور به نظر می‌رسد که ذره و موج وابسته‌اش فوراً از هم دور شده و جدا می‌افتند. دوبرئی در 1924 به این موضوع می‌پردازد. واقعیت این است سرعتی که در بالا به آن اشاره شد سرعت فاز است، در صورتی که وضعیت برای سرعت گروه متفاوت است. سرعت گروه با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

که در آن  $k = 2\pi/\lambda$ ، عدد موج و  $\omega = 2\pi\nu$ . بنا بر رابطه‌ی دوبرئی داریم  $k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi m_0 \beta c}{h\sqrt{1-\beta^2}}$  پس داریم

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega/d\beta}{dk/d\beta} = \frac{2\pi m_0 c^2 \beta}{h\sqrt{(1-\beta^2)^3}} \frac{h\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{2\pi m_0 c} = \beta c = v.$$

پس می‌بینیم که سرعت گروه با سرعت ذره برابر است، و گروه موج هم‌واره با ذره می‌ماند. جلسه‌ی دفاعیه‌ی دکتری دوبرئی در نوامبر 1924 و در دانش‌گاه پاریس بود. او در جواب یکی از اعضای هیأت داوران پیش‌نهاد می‌کند که موج‌اش را باید بشود در آزمایش‌های پراکنده‌گی الکترون از بلورها آشکار کرد. واقعیت این است که در ابتدا کار دوبرئی بیش‌تر نظریه‌پردازی شخصی به نظر می‌آمد تا چیزی که به طبیعت ربط داشته باشد. نکته‌ی جالب توجه این است که وقتی اینشتین در مورد شایسته‌گی کار دکتری دوبرئی مورد مشورت قرار می‌گیرد، اگرچه هنوز نظریه‌اش مورد آزمون تجربی قرار نگرفته بود، و طبیعتاً مورد شک بود، درجه‌ی دکتری را برای او توصیه می‌کند. در 1925 دیویسون<sup>(1)</sup> و گرمر<sup>(2)</sup>، برحسب اتفاق، شرایطی را پدید آوردند که می‌توانست طرح پراش الکترون‌های نسبتاً کم انرژی را از بلور آشکار کند. در 1927 و 1928 جرج تامسون<sup>(3)</sup> آزمایش‌ها را با کیفیت متفاوت و بهتر و برای الکترون‌های پرانرژی انجام داد، و در همه‌ی این موارد رابطه‌ی دوبرئی مورد تأیید قرار گرفت. (جرج تامسون پسر جوزف تامسون<sup>(4)</sup>، کاشف الکترون بود. پدر در 1906 جایزه‌ی نوبل<sup>(5)</sup> گرفت، چون نشان داد الکترون ذره است؛ پسر در 1937 جایزه‌ی نوبل گرفت، چون نشان داد این الکترون موج است!) در 1926 شرویدینگر توانست معادله‌ی موجی بنویسد که در واقع معادله‌ی حرکت موجی بود که به ذره‌ی متحرک غیرنسبیتی وابسته بود. در چند سال بعد دیراک<sup>(6)</sup>، کلاین<sup>(7)</sup> و گُردن<sup>(8)</sup> معادله‌های موجی نوشتند که توصیف‌کننده‌ی موج وابسته به ذرات نسبیتی بود، و البته دوبرئی قبلاً وجود این موج‌ها را پیش‌بینی کرده بود. دوبرئی در 1929 به تنهایی جایزه‌ی نوبل گرفت.

توضیح: در تهیه‌ی این یادداشت به‌طور وسیعی از مرجع [2] استفاده شده است.

## مراجع

- [1] L. de Broglie, *A Tentative Theory of Light Quanta*, Phil. Mag. **47**, (1924), 446.  
[2] A. P. French and E. F. Taylor, *An Introduction to Quantum Physics*, M.I.T. Introductory Physics Series, Chapman & Hall, 1st ed. 1979.

## اسامی خاص

<sup>1)</sup>C. J. Davisson (1881–1958), <sup>2)</sup>L. H. Germer (1896–1971), <sup>3)</sup>George Paget Thomson (1892–1975), <sup>4)</sup>Joseph John Thomson (1856–1940), <sup>5)</sup>Nobel, <sup>6)</sup>P. A. M. Dirac (1902–1984), <sup>7)</sup>O. Klein, <sup>8)</sup>W. Gordon,

وقت ی وارد ـ اُن اِس<sup>1)</sup> شدم، حدوداً چهار ماه کاملاً گیج بودم. تو ی ـ خانه خیل ی از من مراقبت شده بود، و حالا یک دفعه این جا افتاده بودم تو ی ـ یک سبک ـ خیل ی خاص ـ زنده گی، با آدم‌ها یی که نمی‌شناختم ـ شان. قوانین اُن اِس با قوانین ـ دبیرستان فرق داشت. هیچ برنامه ی ـ هفته گی ای نبود که ما را وادارد کار ـ مان را سر و سامان بدهیم. با این تصمیم شروع کردم که یک برنامه ی ـ خیل ی ـ صُلب برا ی ـ خود ام تثبیت کنم ـ روز به روز، ساعت به ساعت. این آشکارا یک شکست ـ کامل بود. روش ـ دیگر ی در پیش گرفتیم، که عبارت بود از این که هر هفته یک موضوع را بخوانم. خیل ی زود، مثل ـ اکثر ـ دانش‌جوها ی ـ اُن اِس، رفتن به کلاس‌ها ی ـ سُرئین<sup>2)</sup> را کنار گذاشتم، زیرا این درس‌ها خیل ی ساده بودند. ما می‌بایست کتاب بخوانیم و به خود ـ مان سر و سامان بدهیم. در دبیرستان و پیش‌دانش‌گاهی<sup>3)</sup> من خیل ی خودکار بودم، ولی در یک چارچوب ـ مشخص ـ آن جا کاملاً روی ـ پا ی ـ خود ام نمی‌ایستادم.

Laurent Schwartz: *A Mathematician Grappling with his Century*, Birkhäuser Verlag, 2001, pp. 68–69.

<sup>1)</sup>Ecole Normale Supérieure (ENS), <sup>2)</sup>Sorbonne, <sup>3)</sup>Class Préparatoires