پرتابه ی ِ کوانتومی

ابراهیم ِ کریمی e_karimi@uok ac.ir

فریبا مصلحی ِ راد fmrad@iasbs.ac.ir

سید محمّد ِ هاشمی hashemi@dena.sharif.edu

چکیده: در این مقاله به بررسی ی ِ حالت ها ی ِ کوانتومی ی ِ نوترون‌ها در میدان ِ گرانشی ی ِ زمین پرداخته شده است. در بخش ِ اول، حرکت ِ یک پرتابه ی ِ نوترونی در میدان ِ گرانشی ی ِ زمین، از دید گاه ِ کلاسیکی و کوانتومی، بررسی شده. در بخش ِ بعد کار ِ تجربی ی ِ گروه ی در آزمایش‌گاه ِ لاوء ـ لَنژوین [a] تشریح شده است. در نهایت نتایج این کارها با هم مقایسه شده است.

1 مقدمه

آشکار شدن ِ آثار ِ کوانتومی در بسیار ی از پدیده ها ی ِ فیزیکی تجربه شده است. اما معمولاً گرانش عامل ِ مهم ی در این پدیده‌ها نیست، زیرا در دنیا ی ِ اطراف ِ ما گرانش از دیگر برهم‌کنش‌ها ضعیف‌تر است. یک میدان ِ گرانشی ی ِ ثابت، اگر با برهم‌کنش ِ یک دیواره ترکیب شود، می‌تواند منجر به مقیّد شدن ِ ذرّه در ناحیه ای از فضا بشود. امّا چون میدان ِ گرانش در اطراف ِ ما خیل ی ضعیف است، برا ی ِ مشاهده ی ِ چنین حالت‌ها ی ِ مقید ی باید برهم‌کنش ِ ذره یِ مورد نظر با عوامل ِ دیگر را از بین ببریم، به گونه ای که سهم ِ آن‌ها آن قدر کوچک باشد که تئثیر ی بر آثار ِ کوانتومی ی ِ ناشی از میدان ِ گرانشی نداشته باشد. باید دنبال ِ ذره ای بگردیم که هم برهم‌کنش ِ غالب برا یش گرانش باشد، هم آن قدر کوچک باشد که رفتار ش کوانتومی باشد. به‌ترین نام‌زد برا ی ِ انجام ِ چنین آزمایش ی نوترون است، زیرا: ۱) بارَ ش صفر است؛ ۲) نیمه عُمرَ ش زیاد است؛ ۳) جِرمَ ش کم است.

در این نوشته، ابتدا مسئله ی ِ یک ذرّه در یک میدان ِ گرانشی ی ِ یک‌نواخت و یک دیواره ی ِ بسیار محکم را بررسی می‌کنیم، و سپس آزمایش ی را که اخیراً انجام شده و درست بودن ِ نظریّه را نشان می‌دهد توصیف می‌کنیم.

2 حرکت ِ پرتابی ـ دیدگاه ِ کوانتومی

هرگاه نوترون ی به طور ِ قائم بر رو ی ِ سطح ِ بازتاباننده ای رها شود، موج ِ نوترونی از سطح باز می‌تابد و با خودَ ش تداخل می‌کند. گاه ی یک موج ِ ایستاده از نوترون تشکیل می‌شود. در این

حالت احتمال ِ یافتن ِ نوترون در یک ارتفاع ِ خاص بسته‌گی به یک عدد ِ کوانتومی دارد، عدد ی که حالت ها ی ِ مقید ِ نوترون در این میدان را مشخص می‌کند. برا ی ِ به دست آوردن ِ تابع ِ احتمال ِ نوترون در این میدان باید برا ی ِ این نوترون معادله ی ِ شرودینگر[b] را (هم‌راه با شرایط ِ مرز ی ِ مناسب) حل کنیم [1]:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+mgz\right)\psi(z,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(z,t), \tag{1}$$

در این جا m جِرم ِ نوترون، z مکان، t زمان، و $\psi(z,t)$ تابع ِ موج ِ نوترون است. بهتر است معادله‌ی ِ شرودینگر را با پارامترها ی ِ مقیاس ِ ℓ و τ که از جنس ِ طول و زمان اند، بی‌بُعد کنیم.

$$\tau := \sqrt[3]{\frac{2\hbar}{mg^2}}, \qquad \ell := \frac{1}{2}g\tau^2. \tag{2}$$

کمیت‌ها ی ِ بی‌بُعد ِ Z و T را تعریف می‌کنیم و معادله يِ شرودینگر را بر حسب ِ آن‌ها بازنویسی می‌کنیم:

$$Z := \frac{z}{\ell}, \qquad T := \frac{t}{\tau}. \tag{3}$$

و از آن جا:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial Z^2}+Z\right)\psi(Z,T)=i\frac{\partial}{\partial T}\psi(Z,T), \tag{4}$$

متغیرها ی ِ جدید ِ Z و T مستقل اند. اینک از روش ِ جداسازی ی ِ متغیرها استفاده می‌کنیم. می‌گیریم

$$\psi(Z,T)=e^{-i\omega T}f(Z), \tag{5}$$

با کم ی محاسبه خواهیم دید که $f(Z)$ در معادله ی ِ ایری[c] صدق می‌کند:

$$-\frac{d^2}{dZ^2}f(Z)+(Z-\omega)f(Z)=0. \tag{6}$$

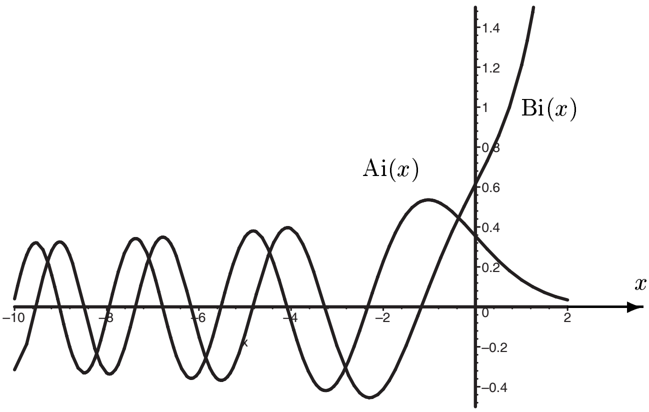
انرژی ِ ذره برابر است با ϵ:

$$\epsilon := \frac{\hbar\omega}{\tau}. \tag{7}$$

جواب‌ها ی ِ معادله ی ِ ایری به شکل ِ زیر است:

$$f(Z)=c_1\,\mathrm{Ai}(Z-\omega)+c_2\,\mathrm{Bi}(Z-\omega). \tag{8}$$

که در آن $\mathrm{Ai}(x)$ و $\mathrm{Bi}(x)$ تابع‌ها ی ِ ایری ی ِ نوع ِ اوّل و دوّم اند که تغییرات ِ آن‌ها برحسب ِ متغیرَ شان در شکل ِ ۱ رسم شده است [2].



شکل ۱: توابع ِ ایری، $\mathrm{Ai}(x)$ و $\mathrm{Bi}(x)$، برحسب ِ متغیر ِ x در بازه‌ی $[-10, +2]$ رسم شده است.

باید شرط‌ها ی ِ مرزی ی ِ زیر را اعمال کنیم:

$$\lim_{Z\to 0^+} \psi(Z,T) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{Z\to +\infty} \psi(Z,T) = 0. \tag{10}$$

از آن جا به دست خواهیم آورد:

$$\psi(Z,T) = c_1 e^{-i\omega T}\,\mathrm{Ai}(Z-\omega). \tag{11}$$

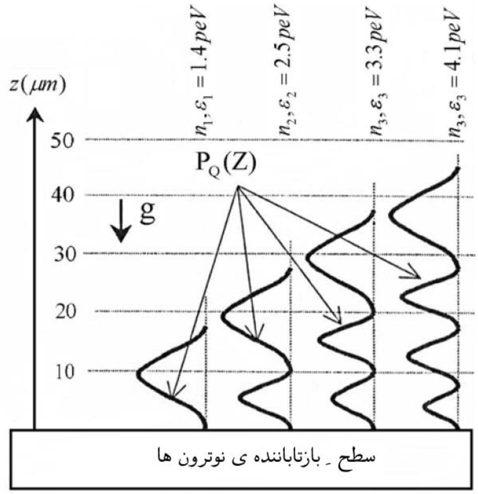
شرط ِ (9) مقادیر ِ انرژی را معین می‌کند. این شرط می‌گوید باید داشته باشیم $\mathrm{Ai}(-\omega) = 0$، که یعنی $-\omega$ باید یک ی از صفرها ی ِ تابع ِ Ai باشد. تابع ِ Ai بی‌شمار صفر دارد، که همه‌گی در نیمه ی ِ منفی ی ِ محور ِ حقیقی اند. این صفرها (z_n ها)، مانند ِ صفرها ی ِ تابع‌ها ی ِ بِسِل[e]، مجموعه ای گسسته اند. به این ترتیب، انرژی ِ نوترون ها از رابطه ی ِ (7) به صورت ِ گسسته ی ِ زیر در خواهد آمد:

$$\epsilon_n = -\frac{\hbar}{\tau} z_n. \tag{12}$$

احتمال ِ حضور ِ نوترون در مکان ِ Z به صورت ِ زیر است [1]:

$$P_Q(Z) := |\psi(Z,T)|^2 = |c_1\,\mathrm{Ai}(Z-\omega)|^2. \tag{13}$$

در شکل ِ ۲، حالت‌ها ی ِ کوانتومی و تابع ِ احتمال ِ وجود ِ نوترون در نقاط ِ مختلف برای چهار



شکل ۲: احتمال ـِ پیدا کردن ـِ نوترون ها بر حسب ـِ ارتفاع ـِ z . این نمودار از مرجع ـِ [3] برداشته شده است..

حالت ـِ کوانتومی ـِ مختلف رسم شده است.

3 حرکت ـِ پرتابی ـ دید گاه ـِ کلاسیکی

فرض کنید نوترون ی را تا ارتفاع ـِ H بالا آورده و آن را به طور ـِ عمودی رو ی ـِ سطح ـِ بازتاباننده رها کنیم (شکل ـِ ۳). از دید ـِ کلاسیکی می‌توان تابع ی تعریف که اگر در dz ضرب شود احتمال ـِ حضور ـِ ذرّه در فاصله‌ی ـِ بین ـِ z و $z + dz$ را بدهد. احتمال ـِ یافتن ـِ ذرّه در یک مکان با سرعت ـِ ذرّه نسبت ـِ عکس دارد، یعنی

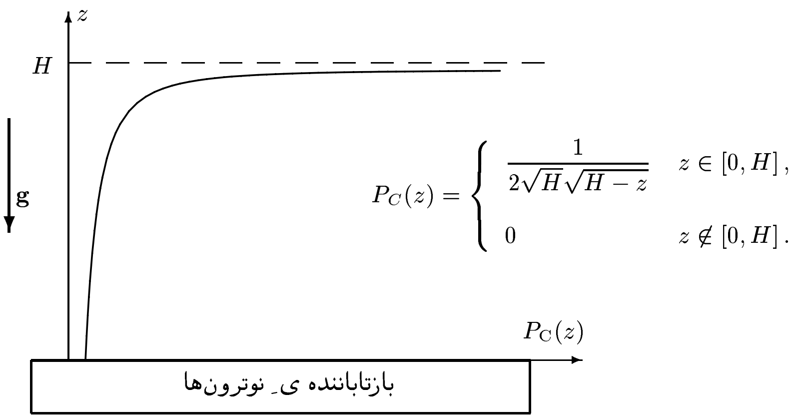
$$P_C(z) := \frac{C}{V(z)} \tag{14}$$

که در آن $P_C(z)$ و C به‌ترتیب تابع ـِ (کلاسیکی ـِ) احتمال و ثابت ـِ بهنجارش هستند. با استفاده از پایسته‌گی ی ـِ انرژی، سرعت ـِ ذرّه در مکان ـِ z برابر خواهد بود با:

$$V(z) = \pm\sqrt{2g(H - z)}. \tag{15}$$

با استفاده از بهنجارش، $\int_{-\infty}^{+\infty} P_C(z)\,dz = 1$، تابع ـِ احتمال به صورت ـِ زیر به‌دست خواهد آمد:

$$P_C(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{H}\sqrt{H-z}} & z \in [0, H]\,, \\ 0 & z \notin [0, H]\,. \end{cases} \tag{16}$$



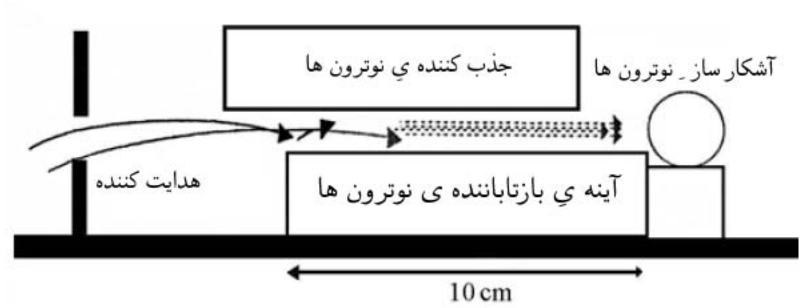
شکل ۳: تابع ِ (کلاسیکی ِ) احتمال ِ وجود ِ ذرّه، $P_C(z)$، برحسب ِ مکان (z) رسم شده است.

نمایش ِ تابع ِ احتمال بر حسب ِ ارتفاع از سطح ِ بازتاباننده در شکل ِ ۳ رسم شده است.

4 نتایج ِ آزمایش‌گاهی

در یک آزمایش ِ واقعی نمی‌توان یک نوترون را جدا کرد و اجازه داد آزادانه روی ِ سطح ِ بازتاباننده سقوط کند، تا چگالی ی ِ آن به صورت ِ تابع ی از ارتفاع به دست آید. به‌تر است باریکه ای از نوترون‌ها را تدارک ببینیم که افقی حرکت کنند. اگر در بالا ی ِ سطح ِ بازتاباننده تمام ِ نیروها، به استثنا ی ِ گرانش حذف شوند، آن وقت می‌توان حرکت ِ نوترون‌ها را به دو حرکت ِ مستقل ِ افقی و قائم تجزیه کرد. نیرو ی ِ گرانشی تنها بر مئلفه ی ِ قائم ِ سرعت اثر دارد و در این راستا (هم‌راه با سطح ِ بازتاباننده) یک چاه ِ پتانسیل به وجود می‌آورد. در گرِنُبل[d] در مرکز ِ لاوء ـ لَنژوین با چشمه‌ها ی ِ نوترونی ی ِ فوقِ‌سرد، نوترون‌ها یی با سرعت ِ در حدود ِ $10\,\mathrm{ms}^{-1}$ ایجاد کرده اند و آن‌ها را رو ی ِ سطح ی آینه ای به طول ِ $10\,\mathrm{cm}$ هدایت کردَند [3]. اگر اجازه دهیم نوترون‌ها به بالا بپرند، یک مسیر ِ سهمی‌شکل طی خواهند کرد. از دیدگاه ِ کلاسیک در جا یی که بیشینه ی سهمی است، مئلفه ی ِ عمودی ی ِ سرعت صفر می‌شود و سپس افزایش می‌یابد. برا ی ِ محدود کردن ِ مئلفه ی ِ عمودی ی ِ سرعت از یک جذب‌کننده ی نوترون، که موازی ی ِ سطح ِ بازتاباننده بود، استفاده کردند. فاصله ی ِ میان ِ جذب‌کننده و سطح بازتاباننده را می‌شد تنظیم کرد، و به این ترتیب می‌شد یک ارتفاع ِ خاص را بررسی کرد (شکل ِ ۴).

در این آزمایش، نوترون‌ها بین ِ آینه ی ِ پایینی و جذب‌کننده ی ِ بالایی در جریان اند. فرض کنید

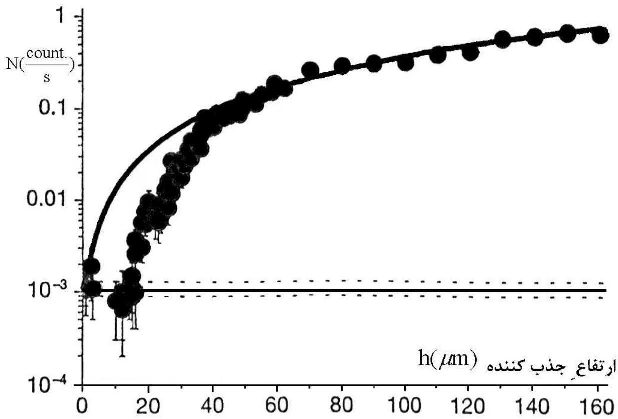


شکل ۴: چیده‌مان ـ آزمایش ی که در مرکز ـ تحقیقاتی لائو ـ لَنژوین انجام شده است. این نمودار از مرجع ـ [3] برداشته شده است..

h فاصله ی ـ بین ـ آینه و جذب‌کننده ی ـ نوترون‌ها باشد. تعداد ـ نوترون‌ها ی ـ دریافتی (N) به صورت ـ تابع ی از h اندازه‌گیری می‌شود. در واقع، مئلفه ی ـ عمودی ی ـ سرعت با پارامتر ـ h مشخص می‌شود. برا ی ـ این که مئلفه‌ها ی ـ عمودی و افقی ی ـ سرعت از هم جدا باشند باید در کیفیت و تنظیم ـ قسمت ها ی ـ مختلف ـ چیده‌مان ـ به کار رفته محدودیت‌ها یی را اعمال کنیم.

اگر h کوچک‌تر از پهنا ی ـ پایین‌ترین حالت ـ کوانتومی باشد، N باید صفر شود. حال شروع به افزایش ـ h می‌کنیم، سپس شمار ـ نوترون‌ها ی ـ دریافتی را به صورت ـ تابع ی از h می‌سنجیم. وقتی h برابر شد با پهنای ـ پایین ترین حالت ـ کوانتومی $(n = 1)$، آن وقت N باید به شدّت افزایش یابد تا h از پهنای ـ دومین حالت ـ کوانتومی کوچک تر شود. افزایش ـ h تئثیری در شمار ـ نوترون های ـ دریافتی ندارد و مقدار ـ N ثابت است. به همین ترتیب رفتار ـ کوانتومی ی ـ نوترون در میدان ـ گرانشی در h ها ی ـ کوچک دیده می‌شود؛ امّا اگر h به اندازه ی ـ کافی بزرگ شود، وابسته‌گی ی ـ کلاسیکی ی ـ N باید متناسب با h باشد، و افزایش‌ها ی ـ «گام‌به‌گام» ـ N از بین برود. امّا در واقع به دلیل ـ وابسته‌گی ی ـ h به‌سرعت‌ها ی ـ مُجاز (یا بالعکس) برای ـ انتشار در پهنای ـ شکاف ـ جذب‌کننده و آینه، این وابسته گی به صورت $h^{\frac{3}{2}}$ خواهد بود. نتایج ـ آزمایش گاه‌ی در شکل های ـ ۵ و ٦ نشان داده شده است.

همان طور که اشاره شد، اگر پهنا ی ـ شکاف کوچک‌تر از پهنا ی ـ فضایی ی ـ پایین ترین حالت ـ کوانتومی باشد، ناشفاف بودن ـ شکاف برا ی ـ نوترون‌ها به طور ـ واضح مشاهده می‌شود؛ حال آن که «قطر» ـ یک نوترون در حدود ـ $10^{-9}\mu\, m$ است که بسیار کوچک‌تر از پهنا یی است که شکاف برا ی ـ نوترون‌ها شروع به شفاف شدن می‌کند. این پهنا، که حدود ـ $15\mu\, m$ است، هنوز برا ی ـ نوترون ها شفاف نیست، امّا به اندازه ای بزرگ است که می‌توانیم عبور ـ نور مرئی را مشاهده کنیم. (طول ـ موج ـ

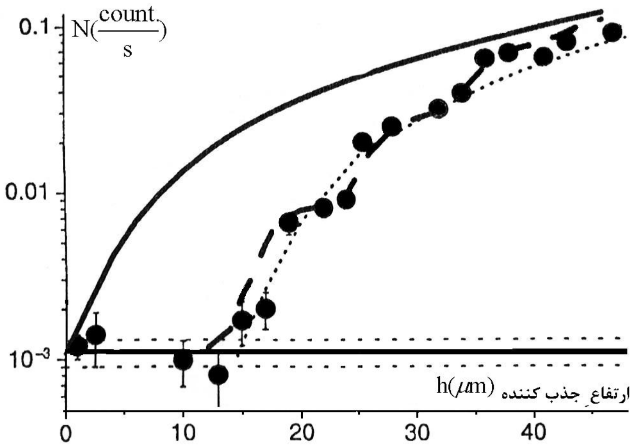


شکل ۵: منحنی یِ دریافت ِ نوترون بر حسب ِ ارتفاع ِ جذب‌کننده از سطح ِ بازتاباننده یِ امواج ِ نوترونی در صفحه یِ نیم‌لگاریتمی رسم شده است. دایره‌ها، نقاط ِ تجربی اند. منحنی ای که با خط ِ پیوسته کشیده شده منحنی یِ کلاسیکی است. خط‌ها یِ صاف ِ افقی مقادیر ِ مربوط به زمینه یِ آشکارساز و نایقینی یِ اندازه گیری شده در هنگام ِ خاموش بودن ِ چشمه یِ نوترونی را نشان می‌دهد. این نمودار از مرجع ِ [3] برداشته شده است..

نور ِ مرئی تقریباً 60 برابر ِ طول ِ موج ِ نوترون‌ها است.) این مشاهده دلیل ی است بر این واقعیت که شکاف واقعاً باز شده و قابل ِ تنظیم است. تحلیل ِ دقیق ِ آزمایش به ما اجازه می‌دهد احتمال ِ هر گونه خطا یِ سیستماتیک ی را در این آزمایش از بین ببریم. بدیهی است که اختلاف در نتایج ِ دریافت ِ نوترون‌ها از این واقعیت ناشی می‌شود که اثر ِ میدان ِ گرانشی یِ زمین بر نوترون‌ها زیاد نیست. مشاهده‌ی ِ آزمایش‌گاهی در مورد ِ حالت‌ها یِ کوانتومی یِ نوترون‌ها در میدان ِ گرانشی یِ زمین یک اثبات ِ «عام» از خواص ِ کوانتومی یِ مادّه است که با نظریه‌ها ی ِ کلاسیک و کوانتومی ای که در بخش ِ 1 بیان شد، مطابقت دارد.

پدیده ای که در این مقاله بیان شد، می‌تواند پایه یِ تحقیق‌ها یِ مربوط به خواص ِ اساسی یِ ماده باشد. مثلاً شاید بتوان با استفاده از گذارها یِ تشدیدی بین ِ چنین ترازها یِ باریک ی، تحلیل ِ دقیق ی از تناسب ِ بین ِ جرم‌ها یِ لختی و گرانشی ِ ذرّات ِ بنیادی (از جمله نوترون) ارائه داد.

5 مرجع‌ها



شکل ٦: منحنی ی ِ دریافت ِ نوترون بر حسب ِ مقادیر ِ کوچک ِ ارتفاع ِ جذب کننده از سطح ِ بازتابانده، در صفحه ی ِ نیم لگاریتمی رسم شده است. «دایره ها»، نقاط ِ تجربی اند؛ منحنی ای که با خط‌چین (خط ِ گسسته) کشیده شده، منطبق ِ بر محاسبات ِ کوانتومی است. منحنی ای که با خط ِ پیوسته کشیده شده رفتار ِ کلاسیک را نشان می‌دهد. خط‌ها ی ِ صاف ِ افقی مقادیر ِ مربوط به زمینه ی ِ آشکارساز و عدم‌قطعیت اندازه‌گیری شده در هنگام ِ خاموش بودن ِ چشمه ی ِ نوترونی را نشان می‌دهد. این نمودار از مرجع ِ [3] برداشته شده است..

[1] R. Shankar; "Principles of Quantum Mechanics", 2rd edition (Plenum Press, 1994) chapter 5.

[2] http://mathword.wolfram.com/AiryFunctions.html .

[3] Valery V.Nesvizhevsky *et al.*: Quantum states of neutrons in the Earth's gravitional field, *Nature*, Vol 415 (17 Jan 2002), pp. 297–299.

6 اسم‌ها یِ خاص

a) Laue–Langevin, b) Schrödinger, c) Airy, d) Grenoble, e) Bessel