فاصله‌ي نسبيِ ذراتِ کوانتمی

امیر آقامحمدی

چکیده: این یک یادداشتِ آموزشی است در موردِ این که چرا می‌گویند بوزون‌های یکسان تمایل دارند که به هم نزدیک شوند و فرمیون‌های یکسان تمایل دارند از هم دور شوند.

یکی از مباحثی که در درسِ مکانیکِ کوانتمی مطرح می‌شود بحثِ ذراتِ یک‌سان است. مکانیکِ کوانتمی براي ذراتِ یک‌سان پیش‌بینی هایی می‌کند که با مکانیکِ کلاسیک متفاوت است. یکی از پارامترهاي ذاتيِ ذره مثلِ جرم و یا بارِ ذره، اسپین آن است. اسپین مشابهِ کلاسیک هم ندارد. اسپینِ ذرات یا صحیح است یا نیمه‌صحیح. ذراتِ با اسپینِ صحیح بوزون و ذراتِ با اسپینِ نیمه‌صحیح فرمیون هستند. تابعِ حالتِ دستگاهی که از چند ذره‌يِ یک‌سان تشکیل شده بسته به آن که آن‌ها بوزون و یا فرمیون باشند نسبت به جابه‌جایی هر دو ذره‌يِ یک‌سان، متقارن و یا پادمتقارن است. تابعِ حالتِ کل ترکیبِ خطی‌ای از حاصلِ‌ضربِ تابعِ اسپینی و تابعِ فضایی است. مثلاً براي دو بوزونِ یک‌سان اگر تابعِ حالتِ اسپینی متقارن باشد تابعِ حالتِ فضایی هم باید متقارن باشد و اگر تابعِ حالتِ اسپینی پادمتقارن باشد تابعِ حالتِ فضایی هم باید پادمتقارن باشد. این‌ها براي این است که متقارن‌بودنِ تابعِ حالتِ کل براي یک سیستمِ دو بوزونی تضمین شود. فرض کنید این ذرات با هم برهم‌کنشی ندارند و همه‌يِ ذرات در یک پتانسیلِ خارجی قرار دارند. براي یک دستگاهِ دو ذره‌اي که ذره‌يِ 1 در حالتِ a با تابعِ حالتِ $u_a(x_1)$ و ذره‌يِ 2 در حالتِ b با تابعِ حالتِ $u_b(x_2)$ است، تابعِ حالتِ فضایی $\Psi(x_1,x_2)=u_a(x_1)u_b(x_2)$ است. اگر دو ذره یک‌سان باشند دیگر معنی ندارد بگوییم که کدام‌ذره در کدام‌حالت است. بسته به بوزون و یا فرمیون بودنِ ذرات و آن که تابعِ حالتِ اسپینی چه‌تقارنی داشته باشد تابعِ حالتِ فضایی می‌تواند متقارن و یا پادمتقارن باشد،

$$\Psi^{a,s}(x_1,x_2)=\frac{u_a(x_1)u_b(x_2)\pm u_a(x_2)u_b(x_1)}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

ضریبِ اضافيِ $1/\sqrt{2}$ براي بهنجار بودنِ تابعِ حالت است. شاخصِ s براي حالتِ متقارن و شاخصِ a براي حالتِ پادمتقارن است. در این روابط علامتِ مثبت (منفی) براي حالتِ متقارن (پادمتقارن) است.

این متقارن و یا پادمتقارن بودنِ یک خاصیتِ کوانتمی است که در حالتِ کلاسیک سابقه‌ای از آن

نداشتیم. این خاصیت منجر به آثاری می‌شود که تنها در حالتِ کوانتمی رخ می‌دهند. یکی از این اثرها آن است که هیچ دو فرمیونِ یک‌سانی نمی‌توانند در یک حالت باشند، به این دلیل که تابعِ حالتِ کل نسبت به جابه‌جاییِ دو ذره پادمتقارن است و اگر دو ذره در یک حالت باشند، تابعِ حالتِ کل صفر می‌شود. برعکس بوزون‌هایِ یک‌سان می‌توانند همگی در یک حالتِ کوانتمی قرار بگیرند. این اثر منجر به پدیده‌یِ چگالشِ بوز و اَبرشارگی می‌شود.

فرض کردیم که خودِ ذرات با هم برهم‌کنشی ندارند ولی با این همه می‌توان نشان داد که اگر دو ذره در حالتِ فضاییِ متقارن باشند به طورِ مؤثر به هم نزدیک‌تر و اگر در حالتِ فضاییِ پادمتقارن باشند به طورِ مؤثر از هم دورترند. برایِ نشان‌دادنِ کمّیِ این مطلب بیایید فاصله‌یِ نسبیِ دو ذره را حساب کنیم.

$$X := x_1 - x_2. \tag{2}$$

برایِ محاسبه‌یِ مکانِ نسبیِ دو ذره باید متوسطِ x_1 و متوسطِ x_2 را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle &= \langle x_1\rangle - \langle x_2\rangle \\
\langle x_1\rangle &= \langle\Psi|\, x_1|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle u_a\otimes u_b \pm u_b\otimes u_a|x_1|u_a\otimes u_b \pm u_b\otimes u_a\rangle \\
&= \frac{1}{2}[\langle u_a|x|u_a\rangle\langle u_b|u_b\rangle \pm \langle u_a|x|u_b\rangle\langle u_b|u_a\rangle \\
&\quad \pm\langle u_b|x|u_a\rangle\langle u_a|u_b\rangle + \langle u_b|x|u_b\rangle\langle u_a|u_a\rangle] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\,\langle x_a\rangle + \langle x_b\rangle\,\Big). \qquad (3)
\end{aligned}$$

که x_a و x_b متوسط‌گیریِ مکان روی حالت‌هایِ a و b است.

$$\langle x_a\rangle := \langle u_a(x)|\, x\,|u_a(x)\rangle \qquad \langle x_b\rangle := \langle u_b(x)|\, x\,|u_b(x)\rangle. \tag{4}$$

به همین صورت $\langle x_2\rangle$ را می‌توانیم به دست آوریم که همان مقدارِ $\langle x_1\rangle$ است. در این صورت مکانِ متوسطِ نسبیِ دو ذره $\langle X\rangle$ صفر است. در واقع $x_1 - x_2$ هم می‌تواند مثبت و هم می‌تواند منفی باشد و به طورِ متوسط مقدارِ آن صفر است. برایِ آن که ببینیم فاصله‌یِ نسبیِ دو ذره چه‌قدر است بیایید وردایی X، یعنی $(\Delta X)^2$ را به دست آوریم. اگر با محاسبه‌یِ مشابهی $\langle x_1^2\rangle$ و $\langle x_2^2\rangle$ را به دست آوریم، نتیجه می‌شود

$$\left\langle x_1^2\right\rangle = \left\langle x_2^2\right\rangle = \frac{1}{2}\Big(\,\left\langle x_a^2\right\rangle + \left\langle x_b^2\right\rangle\,\Big) \tag{5}$$

که

$$\left\langle x_a^2 \right\rangle := \langle u_a(x)|\, x^2\, |u_a(x)\rangle \qquad \left\langle x_b^2 \right\rangle := \langle u_b(x)|\, x^2\, |u_b(x)\rangle. \tag{6}$$

و $\langle x_1\, x_2\rangle$ نیز عبارت است از

$$\langle x_1\, x_2\rangle = \langle x_a\rangle \cdot \langle x_b\rangle \pm \left|\langle x\rangle_{ab}\right|^2, \tag{7}$$

که

$$\langle x\rangle_{ab} := \langle u_a|\, x\, |u_b\rangle. \tag{8}$$

با جمع و جور کردنِ این جملات وردایيِ X به دست می‌آید،

$$(\Delta X_{s,a})^2 = \left\langle (x_a - x_b)^2 \right\rangle \mp 2\, \left|\langle x\rangle_{ab}\right|^2. \tag{9}$$

برايِ حالتِ متقارن فاصله‌يِ متوسطِ دو ذره کم‌تر و برايِ حالتِ پادمتقارن فاصله‌يِ متوسطِ دو ذره بیش‌تر است. برايِ حالتی که دو ذره یک‌سان نیستند این مقدار

$$(\Delta X)^2 = \left\langle (x_a - x_b)^2 \right\rangle \tag{10}$$

که متوسطِ وردایی برايِ دو حالتِ متقارن و پادمتقارن است. دو فرمیون، مثلاً دو الکترون، اگر حالتِ اسپینيِ پادمتقارنی داشته باشند حلاتِ فضايي‌شان باید متقارن باشد؛ یعنی این دو الکترون نسبت به حالتِ دو ذره‌يِ کلاسیک و یا دو بوزونی که در حالتِ فضايي پادمتقارن هستند به هم نزدیک‌ترند. دو ذره را در حالت‌هايِ پایه و برانگیخته‌يِ اول بگیرید. برايِ جعبه‌ای به عرضِ $2a$، وردایيِ X در حالتی که دو ذره در حالتِ متقارنِ فضایی، پادمتقارنِ فضایی و وقتی که دو ذره غیرِیک‌سان‌اند عبارت است از

$$(\Delta X_s)^2 \approx 0.15\ a^2, \qquad (\Delta X_a)^2 \approx 0.67\ a^2, \qquad (\Delta X)^2 \approx 0.41\ a^2. \tag{11}$$

قدردانی: از خانمِ هانیه‌يِ کُمایی‌مقدم برايِ طرحِ سئوالی که منجر به نوشتن این یادداشت شد تشکر می‌کنم.