در باره ی ـ آموزش ـ ریاضیات

ولادیمیر آرنُلد [1]

توضیح: این متن، گسترش‌یافته ی ـ سخن‌رانی ای است که ولادیمیر آرنُلد در تاریخ ـ 7 ـ مارس ـ 1997 در باره ی ـ آموزش ـ ریاضیات در پاله دِکوورت[2] ـ پاریس کرده.[1] آرنولد یک ریاضی‌پیشه است، و رو ی ـ سخن اش در این نوشته با ریاضی‌پیشه‌ها است. امّا نخستین و آخرین بندها ی ـ این سخن‌رانی گزاره‌ها یی هستند که، چه درست باشند چه نادرست، باعث شده اند ویراستاران ـ گاما این اثر را «خواندنی» بیابند. امیدواریم چاپ این اثر باعث بحث‌ها ی ـ مفید ی بشود.

ریاضیات بخش ی از فیزیک است. فیزیک علم ی تجربی، و بخش ی از علوم ـ طبیعی است. ریاضیات بخش ی از فیزیک است که آزمایش‌ها ی ـ آن ارزان است.

اتحاد ـ یاکوبی (که می‌گوید ارتفاع‌ها ی ـ مثلّث هم‌رس اند) یک واقعیّت ـ تجربی است، درست مثل ـ این واقعیّت که زمین گرد است (یعنی همان‌ریخت است با یک گوی). امّا این واقعیّت را با خرج ـ کم‌تر ی می‌توان کشف کرد.

در اواسط ـ قرن ـ بیستم کوشیدند فیزیک و ریاضیات را جدا کنند. نتیجه فاجعه‌آمیز بود. نسل‌ها یی از ریاضی‌پیشه‌ها، بی آن که چیز ی در باره ی ـ نصف ـ دانش ـ شان بدانند، و در بی‌خبری ی ـ محض از سایر ـ دانش‌ها بار آمدند. ابتدا کوشیدند شبه‌ریاضیات ـ اسکولاستیک ـ زشت ـ شان را به دانش‌جوها بیاموزند، بعد به دانش‌آموزها (و این گفته ی ـ هاردی[4] را فراموش کردند که ریاضیات ـ زشت، زیر ـ [نور ـ] خورشید باقی نمی‌ماند).

چون ریاضیات ـ اسکولاستیک که از فیزیک بریده باشد، نه به درد ـ آموزش می‌خورد نه کاربرد ی در علوم ـ دیگر دارد، نتیجه این شد که همه از ریاضی‌پیشه‌ها متنفر شدند ــ تنفر ی هم از جانب ـ دانش‌آموزها ی ـ بدبخت (که بعضی‌ها شان در این اثنا به وزارت رسیدند) و هم از جانب ـ کاربرها.

این بنا ی ـ زشت، که آن را ریاضی‌پیشه‌ها ی ـ کم‌سواد ـ لبریز از عقده ی ـ حقارت ی ساخته بودند که نمی‌توانستند خود را با فیزیک اُخت کنند؛ آدم را یاد ـ بنا ی ـ دقیق ـ اصلِ‌موضوعی ی ـ عددها ی ـ فرد می‌اندازد. واضح است که می‌توان نظریّه ای در باب ـ عددها ی ـ فرد ساخت، و کار ی کرد که شاگردها دقّت و سازگاری ی ـ درونی اش را تحسین کنند (ساختار ی که در آن، مثلاً، مجموع ـ هر تعداد ـ فرد

[1] این ترجمه از رو ی ـ ترجمه ی ـ انگلیسی ی ـ گُریونُف[3] است. احتمالاً متن ـ اصلی روسی (یا شاید هم فرانسه) بوده. ترجمه ی ـ احمد شریعتی.

از عددها یِ فرد، و حاصلِ‌ضرب ِ هر تعداد ِ دل‌خواه از عددها یِ فرد، فرد است). از این دیدگاه ِ عشیره‌ای، می‌توان گفت عددها یِ زوج موجودات ی ثانویه اند، یا می‌توان پس از مدّت ی، با افزودن ِ چند شیء ِ "ایده‌آل" آن‌ها را معرّفی کرد (تا [نظریّه] با نیازها یِ فیزیک و دنیا یِ واقعی بخواند).

متأسفانه چنین ساختار ِ ریاضی یِ زشت ِ تحریف‌شده ای، مانند ِ آن چه هم‌اینک گفتیم، چند دهه در آموزش ِ ریاضیات غالب بوده. این انحراف، که از فرانسه شروع شد، به سرعت گسترش یافت تا مبانی یِ ریاضیات را، ابتدا به دانش‌جوها، و بعد به دانش‌آموزها یِ همه یِ سطوح یاد بدهد (ابتدا در فرانسه، بعد در کشورها یِ دیگر، از جمله روسیه).

یک دانش‌آموز ِ ابتدایی یِ فرانسه، در جواب ِ این سؤال که "$3 + 2$ می‌شود چند" می‌گفت: "$2 + 3$، زیرا جمع جابه‌جایی‌پذیر است." نمی‌دانست جمع مساوی یِ چیست، و حتّا نمی‌توانست بفهمد که سؤال چیست!

دانش‌آموز ِ دیگر ی (که از دید ِ من کاملاً عاقل است) ریاضیات را این طور تعریف می‌کند: "یک مربع هست، امّا همین هم نیاز به اثبات دارد".

قضاوت ِ من، بر مبنا یِ تجربه ای که در فرانسه داشته ام، این است که دانش‌جوها یِ دانش‌گاه‌ها هم به اندازه یِ این دانش‌آموز ضعیف اند (حتّا دانش‌جوها یِ اِکُل نُرمال سوپِرییُر[5]) ــ و من به حال ِ این بچه‌باهوش‌ها یِ دگرگون‌شده تأسّف می‌خورم).

مثلاً، این دانش‌جوها هرگز ِ یک هذلولی‌گون ندیده اند، و ریاضی‌پیشه‌ها یی که در اکُل نُرمال تحصیل می‌کنند در برابر ِ این سؤال که که سطح ی که با معادله یِ $xy = z^2$ داده می‌شود چیست، بهت‌زده می‌شوند. کشیدن ِ خم ی که با معادله‌ها یِ پارامتری داده می‌شود (مثلاً $x = t^3 - 3t$،

$(y = t^4 - 2t^2)$ برا یِ دانش‌جوها (و احتمالاً حتّا بیش‌ترِ استادها یِ ریاضی) یِ فرانسه کاملاً ناممکن است.

توانایی یِ حلِ چنین مسئله‌ها یی (به هم‌راهِ آگاهی از جدولِ زمان‌ها) از نخستین کتاب‌درسی ای که لُ پیتال[6] در باره یِ حسابان نوشت ("حسابان برا یِ فهمِ خط‌ها یِ خمیده"[7])، و تقریباً تا کتاب‌درسی یِ گورسا[6] یک بخشِ مهم از مهارت‌ها یِ لازم برا یِ هر ریاضی‌پیشه ای بوده.

متعصّب‌ها یِ ناقص‌عقلِ "ریاضیاتِ مجرّد" تمامِ هندسه را از آموزش حذف کردند (هندسه ای که تماسِ ریاضی با فیزیک و واقعیّت بیش‌تر از طریقِ آن است). اخیراً کتاب‌خانه‌ها یِ دانش‌جویی یِ دانش‌گاه‌ها یِ پاریس 6 و پاریس 7 (Jussieu)، کتاب‌درسی‌ها یِ گورسا[8]، اِرمیت[9]، و پیکار[10] را به عنوانِ قدیمی، و در نتیجه مضر دور ریختند. (کتاب‌ها با مداخله یِ من نجات یافتند.)

در اِکُل نُرمال، دانش‌جوها یی که (با ریاضی‌پیشه‌ها یی محترم) درس‌ها یی در هندسه یِ دیفرانسیل و هندسه یِ جبری گرفته بودند، نه با سطحِ‌ریمانِ خمِ بیضوی یِ $y^2 = x^3 + ax + b$ آشنا بودند، نه راست َ ش با رده‌بندی یِ توپولوژیکِ رویه‌ها؛ (نه حتّا اشاره ای به انتگرال‌ها یِ بیضوی یِ نوعِ اوّل و ویژه‌گی یِ گروه داشتنِ یک خمِ بیضوی، یعنی قضیّه یِ جمعِ اُیلِر[11] ـ آبِل[12] شده بود). به آن‌ها فقط ساختارها یِ هاج[13] و واریته‌ها یِ یاکوبی[14] یاد داده شده بود!

چه‌گونه چنین چیز ی در فرانسه ای رو ی می‌دهد که لاگرانژ[15]، لاپلاس[16]، کوشی[17]، پوانکاره[18]، لُرِی[19]، و تُم[20]را به جهان داده؟ به نظرِ من توضیح ی که پِترُفسکی[21] داده توضیحِ معقول ی است. پِترُفسکی این را در 1966 به من یاد داد: ریاضی‌پیشه‌ها یِ درجه یک باند راه نمی‌اندازند، امّا ضعیف‌ها برا یِ بقا نیاز دارند که باند راه بیندازند. ضعیف‌ها در بسیار ی زمینه‌ها می‌توانند متّحد شوند ([ریسمانِ اتّحاد] می‌تواند اَبَرتجرّد باشد، یا یهودستیزی، یا "مسئله‌ها یِ کاربردی و صنعتی")؛ امّا اصل همواره حلِ یک مشکلِ اجتماعی است: بقا در جوارِ اطرافیان ی فرهیخته‌تر.

راستی، این تذکّرِ لویی پاستور[22] را هم بگویم: هرگز هیچ "علمِ کاربردی" ای نبوده، تنها کاربردها یِ علم هست (و کاربردها یی بسیار مفید).

آن روزها گفته یِ پِترُفسکی را با شک می‌نگریستم، امّا امروز دارم بیش‌تر و بیش‌تر متقاعد می‌شوم که چه قدر درست می‌گفت. بخشِ مهمّ ی از فعّالیّتِ اَبَرتجرّد از صنعتِ گستاخانه یِ سرقتِ کشفیّات از کاشفین و انتسابِ سیستماتیکِ آن‌ها به تعمیم‌دهنده‌ها یِ دنباله‌رو است.

برا یِ آن که جلو یِ نقلِ غلط از خود ام را بگیریم، این را باید بگویم که، به علّت ی نامعلوم، دست‌آوردها یِ من هرگز به این شکل مصادره نشد، در حال ی که هم دست‌آوردها یِ معلمین ام (کُلمُگُرُف[23]، پِترُفسکی، پُنتریاگین[24]، رُخلین[25]) چنین شد، هم شاگردها یم. استاد مایکِل بِری[26] یک بار این دو اصل را صورت‌بندی کرد:

اصلِ آرنُلد. اگر بر مفهوم ی اسمِ شخص ی هست، این اسم اسمِ کاشف اش نیست.

اصلِ بِری. اصلِ آرنُلد خود اش هم مشمولِ اصلِ آرنُلد است.

اما بیایید به آموزشِ ریاضی در فرانسه بر گردیم.

وقت ی در دانش‌کده ی ِ مکانیک و ریاضیات ِ دانش‌گاه ِ ایالتی ی ِ مسکو دانش‌جو ی ِ سال ِ اوّل بودم، ل. الف. تومارکین[27]، که یک توپولوژیست ِ نظریه‌یِ‌مجموعه‌ای بود، به ما درس ِ حسابان می‌داد، و آگاهانه حسابان ِ کلاسیک ِ قدیمی ی ِ به سبک ِ فرانسوی و با روایت ِ گورسا را به ما می‌گفت. این را درس داد که انتگرال‌ها ی ِ تابع‌ها ی ِ گویا رو ی ِ خم‌ها ی ِ جبری را وقت ی می‌توان گرفت که سطح ِ ریمان ِ متناظر ِ شان کره باشد، و در حالت ِ کلّی، اگر جِنس ِ سطح بیش از یک باشد نمی‌توان آن را گرفت، و این که برا ی ِ کره بودن [ِ این سطح ِ ریمان] کافی است رو ی ِ خم ی که درجه ی ِ معیّن ی دارد تعداد ِ به‌اندازه‌یِ‌کافی بزرگ ی از نقطه‌ها ی ِ دوگانه باشد (که باعث می‌شود خم unicursal باشد: یعنی بتوان در صفحه ی ِ افکنشی، با یک حرکت ِ قلم نقطه‌ها ی ِ حقیقی اش را کشید).

این چیزها چنان تصوّر ی در آدم بر می‌انگیزند که (حتّا بدون ِ اثبات) دید ی بهتر و صحیح‌تر از ریاضیات ِ جدید می‌دهند، بیش از تمام ِ جلدها ی ِ دوره ی ِ بورباکی[28]. در واقع، این جا وجود ِ ارتباط ی جالب بین ِ چیزها یی کاملاً متفاوت را می‌یابیم: در یک طرف [رابطه ای بین ِ] وجود ِ یک عبارت ِ صریح برا ی ِ انتگرال‌ها و توپولوژی ی ِ سطوح ِ ریمان ِ متناظر، و در طرف ِ دیگر [رابطه ای] بین ِ نقطه‌ها ی ِ دوگانه و جِنس ِ سطحِ‌ریمان ِ متناظر که به صورت ِ unicursality ی ِ ناحیه ی ِ حقیقی هم خودنمایی می‌کند.

یاکوبی، به عنوان ِ خیره‌کننده‌ترین خاصیّت ِ ریاضی، متذکّر می‌شود که در این جا یک تابع هست که هم نمایش ِ یک عدد ِ صحیح به صورت ِ جمع ِ چهار مربع ِ کامل را کنترل می‌کند، هم حرکت ِ واقعی ی ِ آونگ را.

کشف ِ این رابطه‌ها را که بین ِ اشیاء ِ متفاوت ِ ریاضی است، می‌توان با کشف ِ رابطه بین ِ الکتریسیته و مغناطیس در فیزیک، یا کشف ِ رابطه بین ِ ساحل ِ شرقی ی ِ قاره ی ِ آمریکا با ساحل ِ غربی ی ِ قاره ی ِ آفریقا در زمین‌شناخت قیاس کرد.

در اهمیّت ِ برانگیزاننده ی ِ این کشفیّات برا ی ِ آموزش مشکل بتوان غلو کرد. این‌ها هستند که به ما می‌آموزند در جهان به دنبال ِ چنان هم‌آهنگی‌ها ی ِ جالب ی بگردیم.

واهندسیدن ِ آموزش ِ ریاضی و جدایی از فیزیک این گره‌ها را بدتر کرد. برا ی ِ مثال، نه دانش‌جوها نه هندسه‌یِ‌جبری‌پیشه‌ها ی ِ مدرن، کلاً چیز ی در مورد ِ این کشف ِ یاکوبی نمی‌دانند که: انتگرال ِ بیضوی ی ِ نوع ِ اوّل تحوّل ِ زمانی بر یک مسیر ِ بیضوی در فضا ی ِ فاز ِ سیستم ِ همیلتونی ی ِ نظیر را می‌دهد.

با تکرار ِ چیزها یی که در مورد ِ الکترون و اتم می‌گویند، می‌توان گفت که هیپوچرخ‌زاد به همان اندازه ی ِ یک حلقه ی ِ چندجمله‌ای تغییرناپذیر است. امّا آموزش ِ ایده‌آل‌ها به دانش‌جوها یی که هرگز هیپوچرخ‌زاد ی ندیده اند، همان اندازه بی‌هوده است که آموزش ِ جمع ِ کسرها به بچه‌ها یی که هرگز (دستِ‌کم ذهنی) کیک یا سیب ی را به قسمت‌ها ی ِ مساوی نبریده اند. عجیب نیست که [چنین] کودکان ی ترجیح می‌دهند صورت‌ها را با صورت‌ها و مخرج‌ها را با مخرج‌ها جمع کنند.

از یک ی از دوستان ِ فرانسوی ام شنیدم که گرایش به تعمیم‌ها ی ِ اَبَرتجرّدی خصلّت ِ ملّی ی ِ فرانسوی‌ها است. نمی‌توانم کاملاً با این که این مسئله ممکن است ارثی باشد مخالفت کنم، امّا مایل ام تأکید کنم که مثال ِ کیک و سیب را از پوانکاره گرفته ام.

فرایند ِ ساختن ِ یک نظریّه ی ِ ریاضی دقیقاً همان ی است که در دیگر ِ علوم ِ طبیعی هست. نخست اشیاء ی را در نظر می‌گیریم و مشاهده‌ها یی در مورد ِ گونه‌ها ی ِ خاص ی از آن‌ها می‌کنیم. بعد می‌کوشیم حدها ی ِ کاربرد ِ مشاهده‌ها مان را بیابیم، دنبال ِ مثال‌ها ی ِ نقض ی بگردیم که مانع می‌شوند تعمیم را زیادی جلو ببریم (مثال: تعداد ِ اِفرازها ی ِ عددها ی ِ فرد ِ متوالی ی ِ 1، 3، 5، 9 به تعداد ِ فرد ی از جمع‌ده‌ها دنبال ی ِ 1، 2، 4، 8، 16 است، امّا بعد می‌شود 29).

نتیجه این که کشفیّات ِ تجربی مان را به روشن‌ترین طریق ِ ممکن صورت‌بندی می‌کنیم (مثلاً حدس ِ فِرما[29] یا حدس ِ پوانکاره). پس از این، دوره ی ِ سخت ِ چک کردن ِ این است که نتیجه‌گیری‌ها مان چه قدر قابلِ‌اعتماد اند.

در این مرحله یک فنّ ِ خاص در ریاضیات درست شده. کاربرد ِ این فن به دنیا ی ِ واقعی بعض ی وقت‌ها مفید است، امّا ضمناً ممکن است منجر به خودفریبی شود. اسم ِ این فن مدل‌سازی است. هنگام ِ ساختن ِ مدل، این ایده‌آل‌سازی را می‌کنیم: فرض می‌کنیم بعض ی چیزها ی ِ خاص، که آن‌ها را "اصل" می‌نامیم، چیزها یی که [درستی شان را] فقط با احتمال ی خاص یا دقّت ی خاص می‌دانیم، "مطلقاً" درست اند. معنی ی ِ این مطلق بودن این است که خود را مجاز می‌دانیم از این "واقعیّت‌ها" بنا بر قواعد ِ منطق ِ صوری، استفاده کنیم و چیزها یی به نام ِ "قضیّه" از آن‌ها استخراج کنیم.

واضح است که در هیچ فعّالیّت ِ روزمرّه ای، ممکن نیست به چنین نتیجه‌گیری‌ها یی کاملاً تکیه کرد. علّت اش، دستِ‌کم، این است که پارامترها ی ِ پدیده ی ِ مورد ِ نظر هرگز با دقّت ِ کامل دانسته نیستند، و تغییر ِ کوچک ی در پارامتر (مثلاً در وضعیّت ِ آغازین ِ یک فرایند) می‌تواند نتیجه را کاملاً

تغییر دهد. مثلاً، به این دلیل است که پیش‌بینی ی ِ درازمدّت ِ هوا ممکن نیست، و نخواهد بود، هر چه قدر هم که دست‌گاه‌ها ی ِ ثبّات و کامپیوترها مان پیش‌رفت کند.

دقیقاً به همین منوال، ممکن است تغییر ِ کوچک ی در اصول (که به درستی ی ِ آن‌ها نمی‌توانیم کاملاً مطمئن باشیم) منجر به این شود که به نتیجه‌گیری‌ها یی برسیم کاملاً متفاوت از آن چه پیش‌تر از قضایا ی ِ منتج از اصل‌ها می‌گرفتیم. هر چه زنجیره ی ِ استنتاج‌ها ("اثبات‌ها") طولانی‌تر و خیال‌بافانه‌تر باشد، نتیجه‌ها ی ِ نهایی کم‌استحکام‌تر است.

مدل‌ها ی ِ پیچیده به ندرت مفید اند (مگر برا ی ِ کسان ی که دارند رساله ی ِ دکتری شان را می‌نویسند).

فن ِ ریاضی ی ِ مدل‌سازی عبارت است از چشم‌پوشی از این مشکل و این که در باره ی ِ مدل ِ استنتاجی تان چنان صحبت کنید که انگار عین ِ واقعیّت است. این واقعیّت که این مسیر، که به وضوح از دیدگاه ِ علوم ِ طبیعی نادرست است، معمولاً به نتیجه‌ها ی ِ مفید ی در فیزیک منجر می‌شود "مؤثّر بودن ِ ناباورانه ی ِ ریاضیات در علوم ِ طبیعی" (یا "اصل ِ ویگنِر"[30]) نام دارد.

این جا می‌توانیم تذکّر ی از گِلفاند[31] را بیاوریم: پدیده ی ِ دیگر ی هم هست که در ناباورانه بودن قابل ِ قیاس با اصل ِ مؤثّر بودن ِ ناباورانه ی ِ ریاضیات در فیزیک است که ویگنِر نام برده — این پدیده مؤثّر بودن ِ ناباورانه ی ِ ریاضیات در علوم ِ زیستی است.

برا ی ِ یک فیزیک‌پیشه "مسمومیّت ِ ظریف ِ آموزش ِ ریاضی" (در اصطلاح ِ فِلیکس کلاین[32]) دقیقاً عبارت از این است که مدل ِ مطلق شده از واقعیّت جدا است و دیگر با واقعیّت مقایسه نمی‌شود. این یک مثال ِ ساده است: ریاضیات به ما یاد می‌دهد که حل ِ معادله ی ِ مالتوس، $dx/dt = x$، به نحو ی یک‌تا از وضعیّت ِ آغازین تعیین می‌شود (که یعنی خم‌ها ی ِ انتگرال ِ مختلف در صفحه ی ِ (t, x) هم را نمی‌بُرند). این نتیجه ی ِ مدل ِ ریاضی به واقعیّت چندان نزدیک نیست. آزمایش ِ کامپیوتری نشان می‌دهد که این خم‌ها ی ِ انتگرال در نیم‌محور ِ منفی ی ِ t نقطه ی ِ مشترک ی دارند. در واقع، مثلاً خم‌ها ی ِ مربوط به $x(0) = 0$ و $x(0) = 1$ عملاً در $t = -10$ و $t = -100$ یک ی هستند و شما یک اتم هم نمی‌توانید بین ِ آن‌ها بگذارید. ویژه‌گی‌ها ی ِ فضا در چنان فاصله‌ها ی ِ نزدیک ی را هندسه ی ِ اقلیدسی توصیف نمی‌کند. به وضوح، کاربرد ِ قضیّه ی ِ یگانه‌گی در این وضعیّت از دقّت ِ مدل فراتر می‌رود. این را باید در کاربردها ی ِ عملی ی ِ مدل لحاظ کرد، وگرنه با مشکل ِ جدّی روبه‌رو می‌شویم.

امّا می‌خواهم تأکید کنم که همین قضیّه ی ِ یگانه‌گی است که توضیح می‌دهد چرا مرحله‌ها ی ِ آخرین ِ بستن ِ کشتی به اسکله با دست انجام می‌شود: هنگام ِ فرمان دادن، اگر سرعت ِ نزدیک شدن [به اسکله] به صورت ِ تابع ِ هموار ی (خطّی) از فاصله تعریف شود، بستن ِ کشتی به اسکله نیازمند زمان ِ بی‌نهایت است. یک راه ِ دیگر برخورد دادن ِ کشتی با اسکله است (که با اجسام ِ ناکش‌سان ِ مناسب ی میرا می‌شود). راستی، این مشکل می‌بایست در فرود ِ نخستین ابزار ِ پایین‌رو در ماه و مریخ، و نیز در الحاق ِ ایست‌گاه‌ها ی ِ فضایی، مهم بوده باشد — در این جا قضیّه ی ِ یگانه‌گی بر ضد ِ ما

است.

متأسفانه در کتاب‌درسی‌ها ی ِ مدرن، حتّا در بهترها شان، نه چنین مثال‌ها یی هست، نه بحث ی از خطر ِ قضیّه‌ها ی ِ وسواس‌گونه. در من حتّا این احساس هست که ریاضی‌پیشه‌ها ی ِ اسکولاستیک (که آگاهی ی ِ کم ی از فیزیک دارند) بر این باور اند که ریاضیات ِ اصلِ‌موضوعی با مدل‌سازی ای که در علوم ِ طبیعی هست و هم‌واره باعث می‌شود که نتیجه‌گیری‌ها ی ِ بعدی را با آزمایش کنترل کنند، تفاوت ی بنیادی دارد.

حتّا اگر خصلت ِ نسبی ی ِ اصل‌ها ی ِ نخستین را کنار بگذاریم، نباید خطاها ی ِ منطقی ی ِ ناگریز در استدلال‌ها ی ِ طولانی را فراموش کنیم (خطاها یی مثلاً به شکل ِ نادرست کار کردن ِ کامپیوتر در نتیجه ی ِ یک پرتو ی ِ کیهانی یا یک نوسان ِ کوانتمی). هر ریاضی‌پیشه ی ِ فعّال ی می‌داند که اگر خود را چک نکند (بهتر از همه هم با مثال)، آن وقت پس از مثلاً ده صفحه نصف ِ علامت‌ها در فرمول‌ها غلط خواهند بود، و دوها از مخرج ِ کسرها به صورت خواهند آمد.

مثل ِ هر علم ِ تجربی ی ِ دیگر ی، فن ِ جنگیدن با چنین خطاها یی همان کنترل ِ خارجی با آزمایش یا مشاهده است، و باید از همان آغاز به تمام ِ سال‌بالایی‌ها ی ِ دبیرستان‌ها آموخته شود.

کوشش برا ی ِ آفریدن ِ ریاضیات ِ "خالص" ِ اصلِ‌موضوعی و استنتاجی منجر به این شده که فرایند ی که در فیزیک به کار می‌رود (مشاهده ــ مدل ــ بررسی ی ِ مدل ــ نتیجه‌گیری ــ آزمودن با مشاهده‌ها) نفی شود، و به جا ی ِ آن فرایند ِ: تعریف ــ قضیّه ــ اثبات بیاید. ممکن نیست بتوان تعریف ی را که انگیزه ای برا ی ِ آن نیست فهمید، امّا این جلو ی ِ جانی‌ها ی ِ اصلِ‌موضوع‌ساز ِ جبری را نمی‌گیرد. مثلاً این‌ها فوراً ضرب ِ عددها ی ِ طبیعی را با قانون‌ها ی ِ دراز ِ ضرب تعریف می‌کنند. با این کار جابه‌جایی‌پذیری ی ِ ضرب را مشکل می‌توان ثابت کرد امّا هنوز می‌توان آن را به صورت ِ قضیّه ای از اصول ِ موضوع استخراج کرد. آن وقت می‌توان دانش‌جوها ی ِ بدبخت را وا داشت این قضیّه و اثبات ِ آن را یاد بگیرند (با این هدف که هم جای‌گاه ِ این علم و هم جای‌گاه ِ معلّم‌ها ی ِ آن را ارتقاء بدهند). واضح است که چنین تعریف‌ها یی و چنین اثبات‌ها یی تنها می‌تواند آموزش و کار ِ عملی را خراب کند.

تنها با شمردن و باز شمردن ِ سربازها در ستون‌ها و خط‌ها، یا با محاسبه ی ِ مساحت ِ مستطیل به دو طریق می‌توان جابه‌جایی‌پذیری ی ِ ضرب را فهمید. هر کوشش ی برا ی ِ فهمیدن ِ جابه‌جایی‌پذیری ی ِ ضرب در ریاضیات، بدون ِ این مداخله ی ِ فیزیک و واقعیّت، قبیله‌گرایی و ایده‌آلیسم ی است که تصویر ِ ریاضی‌پیشه به عنوان ِ یک انسان ِ مفید ِ فعّال را در چشم ِ همه ی ِ آدم‌ها ی ِ باشعور خراب می‌کند.

(در پاسخ به علاقه ی ِ دانش‌جوها) چند راز ِ مهم ِ دیگر را هم باز می‌کنم.

دترمینان ِ یک ماتریس حجم ِ (جهت‌مند ِ) متوازی‌السّطوح ی است که یال‌ها یش ستون‌ها ی ِ آن ماتریس اند. اگر این راز به دانش‌جوها گفته شود (راز ی که در آموزش ِ جبری ی ِ خالص‌شده، به دقّت مخفی می‌شود)، آن وقت تمام ِ نظریّه ی ِ دترمینان‌ها می‌شود فصل ی واضح از نظریّه ی ِ

فرم‌ها ی ِ چندخطّی. اگر دترمینان به هر نحو ِ دیگر ی تعریف شود، آن وقت هر شخص ِ عاقل ی تا ابد از دترمینان، یاکوبی و قضیّه ی ِ تابع ِ ضمنی متنفر می‌شود.

گروه چیست؟ جبرپیشه‌ها می‌آموزند که ظاهراً مجموعه ای است با دو عمل که یک عالمه اصل ِ فرّار را بر می‌آورد. این تعریف یک اعتراض ِ طبیعی را بر می‌انگیزد: آدم ِ عاقل چه نیاز ی به چنین جفت ی از عمل‌ها دارد؟ دانش‌جو (که احتمال دارد در آینده وزیر ِ علوم بشود) نتیجه می‌گیرد "لعنت بر این ریاضیات".

اگر نه از گروه، بل که از مفهوم ِ تبدیل، که از نظر ِ تاریخی هم پیش از گروه مطرح شده، شروع کنیم نتیجه ی ِ کاملاً متفاوت ی می‌گیریم. (تبدیل یعنی یک نگاشت ِ یک‌به‌یک از یک مجموعه به خود اش.) مجموعه ای از تبدیل‌ها ی ِ یک مجموعه را گروه می‌نامیم اگر حاصل ِ هر دو تبدیل ِ پیاپی ای و وارون ِ هر تبدیل ی یک ی از آن تبدیل‌ها باشد.

این تمام ِ تعریف ی است که لازم است. این به اصطلاح "اصل‌ها" در واقع فقط ویژه‌گی‌ها ی ِ (واضح ِ) گروه‌تبدیل‌ها اند. چیزها یی که اصل‌موضوع‌سازها "گروه‌ها ی ِ مجرّد" می‌نامند عبارت اند از گروه‌ها یی از تبدیل‌ها ی ِ مجموعه‌ها ی ِ مختلف تقسیم بر هم‌ریختی (که یعنی تقسیم بر نگاشت‌ها ی ِ یک‌به‌یک ی که عمل‌ها ی ِ گروه را تغییر نمی‌دهند). همان طور که کِیلی[33] ثابت کرده، گروه‌ها ی ِ "مجرّدتر" ی در دنیا نیست. پس چرا جبرپیشه‌ها دانش‌جوها را با تعریف ِ مجرّد عذاب می‌دهند؟

راستی، در دهه ی ِ 1960 من به دبیرستانی‌ها ی ِ مسکو نظریّه ی ِ گروه یاد دادم. با پرهیز از تمام ِ اصلِ‌موضوعیّات و فاصله نگرفتن از فیزیک تا حد ِ ممکن، در نیم سال به قضیّه ی ِ آبِل در ناحل‌پذیری ی ِ معادله‌ها ی ِ کلّی ی ِ درجه ی ِ پنجم بر حسب ِ رادیکال‌ها رسیدم (و در این بین به دانش‌آموزها اعداد ِ مختلط، سطوح ِ ریمان، گروه‌ها ی ِ بنیادی و گروه‌ها ی ِ منودرومی ی ِ تابع‌ها ی ِ جبری را هم یاد دادم). این درس بعداً توسط ِ آلِکسیف[34] که یک ی از مستمعین بود در کتاب ِ قضیّه ی ِ آبِل در مسئله‌ها[35] چاپ شد.

خمینه ی ِ هموار چیست؟ در یک ی از کتاب‌ها ی ِ اخیر ِ آمریکایی خواندم که خود ِ پوانکاره (که خود اش آن را معرفی کرده) با این مفهوم آشنا نبوده و این تعریف ِ مدرن در اواخر ِ دهه ی ِ 1920 توسط ِ فِبلِن[36] ارائه شده: خمینه فضا ی ِ توپولوژیک ی است که یک عالمه اصلِ‌موضوع را بر می‌آورد.

دانش‌جوها به چه گناه ی باید راه ِ شان را از میان ِ این پیچ‌وخم‌ها باز کنند. در واقع، در کتاب ِ *Analysis Situs* ِ پوانکاره تعریف ِ بسیار روشن ی از خمینه ی ِ هموار هست که بسیار بیش‌تر از این تعریف ِ "مجرّد" به درد می‌خورد.

یک زیرخمینه ی ِ k بعدی ی ِ فضا ی ِ اقلیدسی ی ِ $\mathbb{R}^N$، یعنی زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^N$ که در همسایه‌گی ی ِ هر نقطه اش نمودار ِ یک نگاشت ِ هموار از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^{N-k}$ باشد (در این جا $\mathbb{R}^k$ و $\mathbb{R}^{N-k}$ زیرفضاها ی ِ مختصاتی اند).

بین ـِ خمینه‌ها یِ هموار، نگاشت‌ها یِ هموار به نحو ی طبیعی تعریف می‌شوند. وابرریختی‌ها نگاشت‌ها یی هستند که هم خود ـِ شان هم وارون ـِ شان هموار است.

خمینه یِ هموار ـِ "مجرّد" یعنی زیرخمینه یِ فضا یِ اقلیدسی تقسیم بر وابرریختی. (بنا بر قضیّه یِ ویتنی[37]) خمینه‌ها یِ "مجرّدتر" ی نیست. چرا با تعریف ـِ مجرّد دانش‌جوها را عذاب بدهیم؟ بهتر نیست قضیّه یِ رده‌بندی یِ صریح ـِ خمینه‌ها یِ دوبعدی یِ بسته، (یعنی رویه‌ها) را برا یشان ثابت کنیم؟

این قضیّه فی‌المثل می‌گوید هر سطح ـِ بسته یِ جهت‌پذیر ـِ هم‌بند ی کره ای است با چند دسته. و این قضیّه یِ جالب است که احساس ـِ درست ی از این که ریاضیات ـِ مدرن چیست به آدم می‌دهد، نه تعمیم‌ها یِ اَبَرمجرّد ـِ زیرخمینه‌ها یِ طبیعی یِ فضا یِ اقلیدسی، تعمیم ی که راست اش هیچ چیز ـِ تازه ای ندارد و اصلِ‌موضوع‌سازها آن را به عنوان ـِ دست‌آورد نمایش می‌دهند.

قضیّه یِ رده‌بندی یِ رویه‌ها یک دست‌آورد ـِ سطحِ‌بالا یِ ریاضیات است، چیز ی قابلِ‌قیاس با کشف ـِ آمریکا یا پرتوها یِ ایکس. یک کشف ـِ ناب ـِ علومِ‌طبیعی یِ ریاضی است، و حتّا به سختی می‌توان گفت که خود ـِ موضوع بیش‌تر به فیزیک مربوط است یا ریاضیات. در اهمیّت، هم اهمیّت ـِ کاربرد هم اهمیّت ـِ پیش‌برد ـِ Weltanschauung ـِ درست،[2] بسیار فراتر از "دست‌آوردها" یِ ریاضی یِ چیزها یی مثل ـِ اثبات ـِ قضیّه یِ آخر ـِ فِرما یا اثبات ـِ این که هر عدد ـِ درست ـِ به‌قدرِکافی بزرگ ی را می‌توان به صورت ـِ جمع ـِ سه عدد ـِ اوّل نوشت است.

گاه ی وقت‌ها ریاضی‌پیشه‌ها یِ مدرن، به خاطر ـِ تبلیغات چنین دست‌آوردها یِ ورزش‌کارانه ای را به عنوان ـِ آخرین حرف‌ها یِ دانش ـِ شان بیان می‌کنند. به لحاظ ـِ فهم، این نه تنها به قدردانی یِ جامعه از ریاضیات منجر نمی‌شود، بل که بر عکس، باعث ـِ یک بی‌اعتمادی یِ سالم به لزوم ـِ صرف ـِ انرژی رو یِ چنین ممارست‌ها یِ (صخره‌نوردی‌گونه ای) برا یِ حل ـِ چنین پرسش‌ها یِ غریب ی که هیچ کس نه به آن‌ها نیاز دارد نه آن‌ها را می‌خواهد می‌شود.

قضیّه یِ رده‌بندی یِ رویه‌ها را باید وارد ـِ ریاضیات ـِ دبیرستان کرد (و احتمالاً با اثبات)، امّا به دلایل ی حتّا وارد ـِ درس‌ها یِ ریاضی یِ دانش‌گاه هم نشده. (راستی، در چند دهه یِ گذشته، در فرانسه تقریباً تمام ـِ هندسه را از درس‌ها یِ دانش‌گاه حذف کرده اند.)

برا یِ فرانسه، بازگشت ـِ از خصلت ـِ اسکولاستیک و ارائه یِ بخش ـِ مهمّ ی از علوم ـِ طبیعی در تمام ـِ سطوح ـِ آموزش ـِ ریاضی مسئله یِ داغ ـِ مهم ی است. من از این که تقریباً هیچ یک از کتاب‌ها یی که رهیافت ی روش‌مند دارند برا یِ دانش‌جوها یِ این‌جا شناخته نیست گیج شدم (و گویا این‌ها اصلاً به فرانسه ترجمه نشده اند)؛ کتاب‌ها یی مثل ـِ عددها و شکل‌ها، نوشته یِ رادِماخِر[38]، و تُپلیتس[39]، هندسه و تصوّر، نوشته یِ هیلبِرت[40] و کُن ـ وُسِن[41]، ریاضیات چیست، نوشته یِ کورانت[42] و رابینز[43]، چه طور حلّ اش کنیم و ریاضیات و استدلال ـِ اقناعی، نوشته یِ پُلیا[44]،

---

[2] Weltanschauung به معنی یِ ایده‌ئولوژی یا جهان‌بینی است. امّا نویسنده (یا مترجم ـِ اوّل که متن را به انگلیسی ترجمه کرده) مخصوصاً واژه یِ آلمانی را به کار برده، که من هم به همین صورت آن را نگه داشته ام. ش

گسترش ِ ریاضیات در قرن ِ نوزدهم، نوشته ی ِ فِلیکس کلاین.

من خوب یاد اَم می‌آید که در دوران ِ دبیرستان ام درس ِ حسابان ِ اِرمیت (که ترجمه ی ِ روسی اش وجود داشت!) چه تأثیر ِ قوی ای بر من گذاشت.

سطوح ِ ریمان در، فکر می‌کنم، یک ی از نخستین درس‌ها ی ِ آن بود (و البتّه تمام ِ آنالیز، همان طور که باید، مختلط بود). مجانب‌ها ی ِ انتگرال‌ها به روش ِ دگرگونش ِ مسیرها رو ی ِ سطح‌ها ی ِ ریمان تحت ِ حرکت ِ نقطه‌ها ی ِ شاخه‌ای بررسی می‌شد. (امروز این روش نظریّه ی ِ پیکار ـ لِفشِتس[45] نام دارد. راستی، پیکار داماد ِ اِرمیت بود ـ توانایی ی ِ ریاضی معمولاً به دامادها می‌رسد: سلسله ی ِ آدامار[46] ـ پُل لِوی[47] ـ لُران شوارتس[48] فریش[49] یک مثال ِ معروف ِ دیگر ِ آکادمی ی ِ علوم ِ پاریس[50] است).

درس ِ "قدیمی" ی ِ صد سال پیش ِ اِرمیت (که احتمالاً از کتاب‌خانه‌ها ی ِ دانش‌جویی ی ِ فرانسه دور ریخته شده اند) خیل ی مدرن‌تر بوده تا بیش‌تر ِ درس‌نامه‌ها ی ِ کسل‌کننده ای که امروزه با آن‌ها دانش‌جوها را زجر می‌دهند.

اگر ریاضی‌پیشه‌ها سر ِ عقل نیایند، مشتری‌ها یی که به یک ریاضیات ِ مدرن، به بهترین معنی ی ِ کلمه ی ِ مدرن، و به مصونیت از وراجی‌ها ی ِ اصلِ‌موضوعی (که مشخّصه ی ِ هر شخص ِ عاقل ی است) نیاز دارند، سرانجام به خدمت ِ اسکولاستیک‌ها ی ِ کم‌سواد در مدارس و دانش‌گاه‌ها خاتمه خواهند داد.

آن وقت، معلم ِ ریاضی ای که دستِ‌کم به بعض ی از جلدها ی ِ دوره ی ِ لانداؤ[51] و لیفشیتس[52] چنگ نینداخته باشد بازمانده ای می‌شود، مثل ِ آن‌ها یی که امروز فرق ِ مجموعه‌ها ی ِ باز و بسته را نمی‌دانند.

نام‌ها

1) Vladimir I. Arnold, 2) Palais Découverte, 3) A. V. Goryuno, 4) Hardy, 5) École Normal Supérieur (ENS), 6) l'Hospital, 7) Calculus for understanding of curved lines, 8) Goursat, 9) Hermite, 10) Picard, 11) Euler, 12) Abel , 13) Hodge, 14) Jacobi, 15) Lagrange, 16) Laplace, 17) Cauchy, 18) Poincaré, 19) Leray, 20) Thom, 21) I. G. Petrovskii, 22) L. Pasteur, 23) Kolmogorov, 24) , Pontryagin, 25) Rokhlin, 26) M. Berry, 27) L. A. Tumarkin, 28) Bourbaki, 29) Fermat, 30) Wigner, 31) I. M. Gel'fand, 32) Felix Klein, 33) Cayley, 34) V. Alekseev, 35) *Ablel Theorem in Problems*, 36) Veblen, 37) Whitney, 38) Rademacher, 39) T/"oplitx, 40) Hilbert, 41) Cohn-Vossen, 42) Courant, 43) Robbins, 44) Polya, 45) Lefschetz, 46) Hadamard, 47) P. Levy, 48) L. Schwarz, 49) U. Frish, 50) Paris Academy of Sciences, 51) Landau, 52) Lifshitz