مقدمه‌ای بر معادله‌هایِ تفاضلی

امیر آقامحمدی

چکیده— در این مقاله ابتدا معادله‌هایِ تفاضلی معرفی می‌شود و پس از آن با حلِ این گونه معادله‌ها آشنا می‌شویم.

۱ مقدمه

در دوره‌یِ رسمی‌یِ آموزشِ فیزیک دانش‌جوها با معادله‌هایِ دیفرانسیل آشنا می‌شوند. یک درسِ با همین عنوان در دوره‌یِ کارشناسی وجود دارد. در درس‌هایِ مختلف نیز به طور پراکنده با معادله‌هایِ دیفرانسیلی مثلِ معادله‌یِ نیوتن، معادله‌یِ شرودینگر در یک‌بُعد، و گاهی با معادله‌هایِ دیفرانسیلِ پاره‌ای مثلِ معادله‌یِ شرودینگر در دو یا سه‌بُعد، معادله‌یِ لاپلاس، معادله‌یِ موج، و $\cdots$ آشنا می‌شوند. اما معادله‌هایِ تفاضلی به طورِ رسمی در هیچ درسی موردِ بحث قرار نمی‌گیرد. در این مقاله ابتدا این نوع معادله‌ها معرفی می‌شوند. سپس معادله‌هایِ تفاضلی‌یِ خطی‌یِ رتبه یک در حالتِ کلی حل می‌شوند. پس از آن معادله‌هایِ تفاضلی‌یِ خطی‌یِ رتبه‌یِ N با ضرایبِ ثابت نیز حل می‌شوند. در آخر چند مثال از مسائلِ فیزیک که معادله‌هایِ تفاضلی در آن‌ها ظاهر می‌شود، معرفی و حل می‌شود.

معادله‌یِ دیفرانسیلِ زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1. \tag{1}$$

در این معادله t متغیری پیوسته است. این معادله را به شکلِ زیر نیز می‌توان نوشت،

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 1. \tag{2}$$

اگر t متغیری گسسته باشد و تنها بتواند اعداد صحیح اختیار کند، ممکن است معادله‌ای شبیهِ معادله‌یِ زیر داشته باشیم،

$$x_{t+1} - x_t = 1. \tag{3}$$

جوابِ معادله‌ي ديفرانسيلِ (1) را با داشتنِ یک مقدارِ اولیه مثلاً $x(0)$ به سادگی می‌توانیم به دست آوریم،

$$x(t) = t + x(0). \tag{4}$$

معادله‌ي تفاضلی‌ي (3) را نیز با داشتنِ مثلاً x_0 می‌توانیم حل کنیم،

$$x_t = t + x_0. \tag{5}$$

توجه دارید که در (4) t متغیری پیوسته و در (5) t متغیری گسسته است. در این مثالِ خاص جوابِ معادله‌ي ديفرانسيلِ (1) و جوابِ معادله‌ي تفاضلی‌ي (3) شبیهِ هم است، ولی در حالتِ کلی این‌طور نیست. البته توجه داریم که در معادله‌ي (1) t اعدادِ حقیقی و در معادله‌ي تفاضلی‌ي (3) t اعدادِ صحیح را اختیار می‌کند. یک معادله‌ي تفاضلی برايِ x_n که n اعدادِ صحیح اختیار می‌کند در نظر بگیرید، مثلاً

$$x_{N+n} + p_{N-1}(n)x_{N+n-1} + \cdots + p_0(n)x_n = q(n). \tag{6}$$

رتبه‌ي یک معادله‌ي تفاضلی برابر است با اختلافِ بیش‌ترین و کم‌ترین شاخصِ n برايِ متغیرِ x_n که در معادله ظاهر می‌شود. رتبه‌ي معادله‌ي (6) برابر است با N. معادله‌ي (3) یک معادله‌ي تفاضلی‌ي رتبه یک است.

همان طور که معادله‌هايِ ديفرانسيل با ضرايبِ ثابت حلِ ساده‌تری دارند، حلِّ معادله‌هايِ تفاضلی با ضرايبِ ثابت نیز ساده‌تر است. حلِّ معادله‌هايِ تفاضلی‌ي غیرِخطی نیز مشابهِ حلِّ معادله‌هايِ ديفرانسيلِ غیرِخطی علی‌الاصول پیچیده‌تر است.

۲ معادله‌هايِ تفاضلی

۱.۲ معادله‌هايِ تفاضلی‌ي رتبه یک با ضرايبِ ثابت

مثال_1) معادله‌ي تفاضلی‌ي هم‌گنِ زیر را در نظر بگیرید.

$$x_{n+1} = p\, x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{7}$$

p یک ثابت است. برايِ به دست آوردنِ جوابِ کلیِ این معادله باید یکی از x_k ها، مثلاً x_0 را داشت.

$$x_1 = p\, x_0$$

$$\begin{aligned} x_2 &= p\ x_1 = p^2\ x_0 \\ x_3 &= p\ x_2 = p^3\ x_0 \\ &\cdots \\ x_n &= p\ x_{n-1} = p^n\ x_0. \end{aligned} \tag{8}$$

همان‌طور که جوابِ عمومیِ معادله‌هایِ دیفرانسیل با ضرایبِ ثابت، را به شکلِ $x(t) = C\mathrm{e}^{pt}$ (یا در واقع $((\mathrm{e}^p)^t$) می‌گیریم، جوابِ عمومیِ معادله‌هایِ تفاضلی با ضرایبِ ثابت، را نیز $x_n = CZ^n$ می‌گیریم[1]. در این‌جا C یک ثابت است که با استفاده از شرطِ مرزی تعیین می‌شود. با جاگذاریِ این‌نهاده برایِ جواب در (5)، مقدارِ Z نیز به دست می‌آید.

$$CZ^{n+1} = p\ CZ^n \quad \Rightarrow \quad Z = p. \tag{9}$$

با داشتنِ مقدارِ اولیه، $C = x_0$ می‌شود. به این ترتیب $x_n = x_0 p^n$ است.

مثال_2) حالا بیاییم به معادله‌یِ (7) یک جمله اضافه کنیم که معادله‌یِ تفاضلی غیرِهم‌گن شود.

$$x_{n+1} = p\ x_n + \beta. \tag{10}$$

باز هم همان کاری که در حلِ معادله‌یِ دیفرانسیلِ خطی‌یِ غیرِ هم‌گن می‌کردیم، انجام می‌دهیم. یعنی ابتدا جوابِ عمومیِ معادله‌یِ هم‌گن و جوابی خاص برایِ معادله‌یِ تفاضلی غیرِهم‌گن را به دست می‌آوریم. جمعِ جوابِ عمومی و جوابِ خاص که در شرطِ مرزی صدق کند، جواب است. جوابِ بخشِ هم‌گن را که قبلاً به دست آوردیم. به ازایِ $p \neq 1$ جوابِ خاص را می‌توانیم $x_n = D$، که D مقداری ثابت است، بگیریم. با جاگذاریِ این مقدار در معادله‌یِ (10)، D به دست می‌آید.

$$D = pD + \beta \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\beta}{1-p}. \tag{11}$$

جواب کلی‌یِ معادله‌یِ (10) جمعِ جواب‌هایِ عمومیِ هم‌گن و جوابِ خاص است. برایِ به دست آوردنِ ضریبِ ثابتِ جوابِ هم‌گن جوابِ از شرطِ اولیه استفاده می‌کنیم.

$$x_n = Cp^n + \frac{\beta}{1-p} \quad \Rightarrow \quad x_n = x_0 p^n + \frac{\beta(1-p^n)}{1-p}. \tag{12}$$

البته با محاسبه‌یِ مستقیم و حلِ معادله‌یِ (10) به عنوانِ یک معادله‌یِ بازگشتی نیز می‌شد همین جواب را به دست آورد. جوابِ خاصی که برایِ $p \neq 1$ به دست آوردیم، برایِ $p = 1$ به درد نمی‌خورد. به ازایِ $p = 1$ معادله‌یِ (10) به شکلِ $x_{n+1} - x_n = \beta$ که یک تفاضلِ کامل (شبیهِ مشتق در حالتِ

[1] ضرایب در معادله‌یِ (7) مستقل از n هستند و اگر این معادله را به شکلِ عمل‌گریِ $\mathcal{F}x_n = 0$ بنویسیم، واضح است که عمل‌گرِ $\mathcal{F}$ با عمل‌گرِ انتقال، $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}x_n = x_{n+1}$) جابه‌جایی است، پس می‌توانیم ویژه‌تابعِ مشترک برایِ آن‌ها بیابیم. CZ^n ویژه‌تابعِ عمل‌گرِ انتقال است.

پیوسته) است، در می‌آید. جوابِ این معادله (مشابهِ حالتِ پیوسته) $x_n = x_0 + \beta n$ است. دقت کنید اگر حدِّ $p \to 1$ جوابِ (12) را نیز حساب کنیم به همین جواب می‌رسیم.

۲.۲ معادله‌هایِ تفاضلی‌یِ رتبه یک با ضرایبِ غیرِثابت

معادله‌یِ تفاضلی‌یِ هم‌گنِ زیر را در نظر بگیرید.

$$x_{n+1} = (n+1)x_n, \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{13}$$

جوابِ این معادله را به صورتِ بازگشتی می‌توان به دست آورد. در این صورت داریم

$$x_n = x_0 n!. \tag{14}$$

ساده‌ترین تعمیمِ این معادله معادله‌یِ تفاضلی‌یِ هم‌گنِ زیر است.

$$x_{n+1} = p(n)x_n, \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{15}$$

که این معادله را نیز به صورتِ بازگشتی می‌توان حل کرد. در این صورت جوابِ این معادله می‌شود

$$x_n = x_0 \prod_{j=0}^{n-1} p(j). \tag{16}$$

کلی‌ترین معادله‌یِ تفاضلی‌یِ خطی‌یِ غیرِهم‌گنِ عبارت است از

$$x_{n+1} = p(n)x_n + q(n). \tag{17}$$

با یک تغییرِ متغیر می‌توان این معادله را به یک تفاضلِ کاملِ رتبه‌یِ یک تبدیل کرد. برایِ این کار معادله‌یِ (17) را در $\prod_{j=0}^{n-1} p^{-1}(j)$ ضرب می‌کنیم. در این صورت داریم،

$$\frac{x_{n+1}}{\prod_{j=0}^{n} p(j)} = \frac{x_n}{\prod_{j=0}^{n-1} p(j)} + \frac{q(n)}{\prod_{j=0}^{n} p(j)} \tag{18}$$

که با تعریفِ

$$y_n := \frac{x_n}{\prod_{j=0}^{n-1} p(j)}, \quad Q(n) = \frac{q(n)}{\prod_{j=0}^{n} p(j)}, \tag{19}$$

تبدیل می‌شود به

$$y_{n+1} = y_n + Q(n). \tag{20}$$

جوابِ این معادله را به صورتِ بازگشتی می‌توان به دست آورد.

$$y_n = y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} Q(j). \tag{21}$$

ازاین‌جا x_n را به دست می‌آوریم.

$$x_n = [\prod_{s=0}^{n-1} p(s)] \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{q(k)}{\prod_{j=0}^{k} p(j)} + x_0 \right]. \tag{22}$$

معادله‌هاي تفاضلي‌ِ غيرِخطی علی‌الاصول به راحتی قابلِ حل نيستند و روشِ استانداردی براي حلِ آن‌ها وجود ندارد. البته در مواردی ممکن است با يک تغييرِ متغير مسئله را خطی کرد. مثلاً در مثالِ

$$x_{n+1} = x_n^2, \tag{23}$$

با تغييرِ متغيرِ $y_n := \ln x_n$، معادله‌ای که براي y_n به دست می‌آيد خطی است.

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad \Rightarrow \quad y_n = 2^n y_0. \tag{24}$$

که از اين‌جا $x_n = x_0^{(2^n)}$. در معادله‌يِ غيرِخطی‌یِ

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \tag{25}$$

تغييرِ متغيرِ $x_n =: \cos y_n$ معادله‌يِ (25) را تبديل به معادله‌ای خطی براي y_n می‌کند. براي $|x_n| \leq 1$، y_n ها حقيقی و براي $|x_n| \geq 1$، موهومی هستند. البته همان‌طور که ذکر شد در حالتِ کلی روشی براي حلِ معادله‌هاي غيرِخطی وجود ندارد.

۳.۲ معادله‌يِ تفاضلی‌یِ رتبه‌يِ N با ضرايبِ ثابت

کلی‌ترين معادله‌يِ تفاضلی‌یِ خطی‌یِ از رتبه‌يِ N به صورتِ زير است.

$$x_{N+n} + p_{N-1}(n)x_{N+n-1} + \cdots + p_0(n)x_n = q(n). \tag{26}$$

فرض کنيد تمامِ ضرايبِ p_i، و q مستقل از n باشند، در اين‌صورت

$$x_{N+n} + p_{N-1}x_{N+n-1} + \cdots + p_0 x_n = q, \tag{27}$$

کلی‌ترين معادله‌يِ تفاضلی‌یِ خطی‌یِ از رتبه‌يِ N با ضرايبِ ثابت است. براي حلِّ اين معادله ابتدا جوابِ معادله‌يِ هم‌گن را به دست می‌آوريم. سپس با اضافه کردنِ جوابی خاص به آن جوابِ کلی به دست می‌آيد. با استفاده از شرط‌هاي اوليه ضرايبِ ثابتی که در جوابِ کلی وجود دارند به دست می‌آيد. براي آن‌که جوابِ معادله‌يِ تفاضلی به طورِ يک‌تا تعيين شود بايد به اندازه‌يِ رتبه‌يِ معادله‌يِ تفاضلی ثابتِ اوليه يا مرزی داشته باشيم.

نهاده‌يِ $x_n = CZ^n$ را به عنوانِ جوابِ بخشِ هم‌گن در نظر می‌گيريم. با جاگذاريِ اين جواب در معادله‌يِ (27) به معادله‌يِ زير براي Z می‌رسيم.

$$Z^N + p_{N-1}Z^{N-1} + \cdots + p_0 = 0. \tag{28}$$

این معادله N جواب براي Z می‌دهد. چون این معادله خطی است، جوابِ معادله‌يِ هم‌گن ترکیبی خطی از این جواب‌هاست.

$$x_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n + \cdots C_N Z_N^n. \tag{29}$$

اگر دو تا از جواب‌ها مثلاً Z_1 و Z_2 یکی باشند، به جايِ $C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n$ جواب به صورتِ $(D_1 + D_2 n) Z_1^n$ است. و یا اگر ریشه چندگانه از رتبه‌يِ k باشد جواب به صورتِ $(D_1 + D_2 n + \cdots + D_k n^{k-1}) Z_1^n$ است.

یک جوابِ خاصِ براي معادله‌يِ (27)، $x_n^{(p)} = D$ است، که ثابتِ D با جاگذاريِ این جواب در معادله‌يِ (27) به دست می آید.

$$x_n^{(p)} = \frac{q}{1 + p_{N-1} + \cdots + p_0}. \tag{30}$$

این جواب در صورتی قابلِ قبول است که

$$1 + p_{N-1} + \cdots + p_0 \neq 0. \tag{31}$$

در صورتی که جمعِ ضرایب صفر باشند، جوابِ خاصِ معادله‌يِ (27) را به صورت $x_n^{(p)} = D_1 n$ می گیریم. در این صورت

$$D_1 \left[(N + n) + p_{N-1}(N + n - 1) + \cdots + p_0 n\right] = q,$$

$$\Rightarrow \quad x_n^{(p)} = \frac{q}{N + p_{N-1}(N-1) \cdots + p_1} n. \tag{32}$$

باز هم در صورتی این جواب قابلِ قبول است که مخرجِ کسر در جوابِ بالا غیرِصفر باشد. در صورتی که این مقدار هم صفر شد جوابِ خاص را به صورتِ $x_n^{(p)} = D_2 n^2$ می‌گیریم. در صورتی که این جواب هم قابلِ قبول نبود به همین صورت ادامه می‌دهیم. به این ترتیب حتماً یک جواب می‌توان به دست آورد. (چرا؟)

۳ تابعِ مولّد

یک راه که گاهی با استفاده از آن می‌توان معادله‌هايِ تفاضلی را حل کرد استفاده از تابعِ مولّد است. در این روش تابعی به نامِ تابعِ مولّد تعریف می‌شود. تابعِ مولّد بیش‌تر براي مواردی مفید است که معادله با ضرایبِ ثابت باشد. در این صورت معادله‌يِ حاکم بر تابعِ مولّد جبری می‌شود.

مثال_3) معادله‌يِ تفاضلی‌يِ زیر با شرطِ اولیه‌يِ $x_0 = \alpha$ و $x_1 = \beta$ را در نظر بگیرید.

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \tag{33}$$

تابعِ مولّدِ $G(Z)$ را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم.

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n. \tag{34}$$

معادله‌یِ (33) را در Z^n ضرب و رویِ n جمع می‌بندیم.

$$a\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2}Z^n + b\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}Z^n + c\sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n = 0. \tag{35}$$

این معادله را بر حسبِ $G(Z)$ می‌توانیم بنویسیم.

$$aZ^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2}Z^{n+2} + bZ^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}Z^{n+1} + c\sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n = 0,$$

$$aZ^{-2}\sum_{n=2}^{\infty} x_n Z^n + bZ^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} x_n Z^n + c\sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n = 0,$$

$$aZ^{-2}(G(Z) - Zx_1 - x_0) + bZ^{-1}(G(Z) - x_0) + c\ G(Z) = 0. \tag{36}$$

از این‌جا $G(Z)$ به دست می‌آید.

$$G(Z) = \frac{a(\alpha + \beta Z) + \alpha b Z}{cZ^2 + bZ + a}. \tag{37}$$

اگر $G(Z)$ را حولِ $Z = 0$ بسطِ تیلور دهیم ضرایبِ بسط x_n ها هستند.

گاهی با استفاده از تابعِ مولّد می‌توانیم معادله‌یِ تفاضلی با ضرایبِ غیرِثابت را هم حل کنیم. در این موارد به یک معادله‌یِ دیفرانسیل برای $G(Z)$ می‌رسیم.

مثال_4) معادله‌یِ تفاضلی‌یِ زیر با شرطِ $x_0 = 1$ را در نظر بگیرید.

$$(n+1)x_{n+1} + nx_n + 2x_n = 0. \tag{38}$$

تابعِ مولّد را به صورتِ زیر می‌گیریم،

$$G(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n Z^n. \tag{39}$$

معادله‌یِ (38) را در Z^n ضرب و رویِ n جمع می‌بندیم. با این کار به معادله‌یِ دیفرانسیلی برایِ $G(Z)$ می‌رسیم.

$$\frac{\mathrm{d}G(Z)}{\mathrm{d}Z} + Z\frac{\mathrm{d}G(Z)}{\mathrm{d}Z} + 2G(Z) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}G(Z)}{\mathrm{d}Z} = -\frac{2}{1+Z}G(Z). \tag{40}$$

توجه داریم که

$$\frac{\mathrm{d}G(Z)}{\mathrm{d}Z}=\sum_{n=0}^{\infty}nx_nZ^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x_{n+1}Z^n. \tag{41}$$

شرطِ اولیه‌یِ $x_0=1$ منجر به شرطِ اولیه‌ی $G(0)=1$ می‌شود. از این معادله به سادگی $G(Z)$ به دست می‌آید.

$$G(Z)=\frac{G(0)}{(1+Z)^2}=\frac{1}{(1+Z)^2}. \tag{42}$$

اگر تابعِ مولّدِ $G(Z)$ را بسطِ تیلور دهیم ضرایبِ بسط x_n ها هستند.

$$G(Z)=\frac{1}{(1+Z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)Z^n, \quad\Rightarrow\quad x_n=(-1)^n(n+1). \tag{43}$$

۴ چند مثال

مثالِ5) بیایید چند جمله‌ایِ $I_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{k=n}k$ را محاسبه کنیم.

به سادگی می‌توانیم معادله‌یِ تفاضلی‌ای که I_n در آن صدق می‌کند را به دست آوریم.

$$I_{n+1}^{(1)}-I_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{n+1}k-\sum_{k=0}^{n}k=n+1. \tag{44}$$

جمعِ ضرایبِ I_l ها در سمتِ چپِ (44) صفر است و سمتِ چپ یک تفاضلِ کاملِ رتبه‌یک است. سمتِ راست نسبت به n خطی است، پس $I_n^{(1)}=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ را به عنوان جواب می‌گیریم. شرطِ $I_0^{(1)}=0$، نتیجه می‌دهد، $\gamma=0$. اگر جوابی که حدس زده‌ایم را در معادله‌یِ (44) جاگذاری کنیم، ضرایبِ α و β به دست می‌آیند.

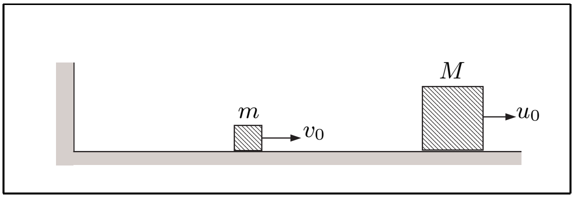
$$\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)-\alpha n^2-\beta n=n+1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\beta=\frac{1}{2}. \tag{45}$$

که از این‌جا نتیجه می‌شود $I_n^{(1)}=n(n+1)/2$.

مثالِ6) بیایید چند جمله‌ایِ $I_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{n}k^2$ را محاسبه کنیم. در این‌صورت $I_n^{(2)}$ در معادله‌یِ تفاضلی‌یِ زیر صدق می‌کند.

$$I_{n+1}^{(2)}-I_n^{(2)}=(n+1)^2. \tag{46}$$

حدسِ $I_n^{(2)}=\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\delta$ را به عنوان جواب می‌گیریم. شرطِ $I_0^{(2)}=0$، نتیجه می‌دهد، $\delta=0$. با جاگذاریِ این حدس به عنوانِ جواب در معادله‌یِ (46)، ضرایبِ α و β و γ به دست می‌آیند. جوابی که به این ترتیب به دست می‌آید عبارت است از



$$I_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{47}$$

چند جمله‌ايِ $I_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{n} k^3$ را نيز به همين ترتيب مي‌توانيم به دست آوريم.

$$I_n^{(3)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{48}$$

مثال_7) فردی به اندازه‌يِ C_0 از بانک وام مي‌گيرد. بهره‌يِ وام را α و تعدادِ اقساط را N مي‌گيريم. مي‌خواهيم ببينيم او در هر قسط چه مبلغی (مثلاً q) بايد پرداخت کند. پس از يک قسط او به اندازه‌يِ $C_1 = rC_0 - q$، $(r := 1 + \alpha)$ بدهکار است و پس از n قسط به اندازه‌يِ C_n بدهکار است.

$$C_n = rC_{n-1} - q. \tag{49}$$

جوابِ بخشِ هم‌گن Ar^n و جوابِ خاص $q/(r-1)$ است.

$$C_n = Ar^n + \frac{q}{r-1}. \tag{50}$$

با استفاده از شرطِ اوليه‌يِ C_0، نتيجه مي‌شود

$$C_n = C_0 r^n - \frac{q(r^n - 1)}{r-1}. \tag{51}$$

برايِ آن که مقدارِ قسط q را به دست آوريم بايد از شرطِ مرزيِ $C_N = 0$ استفاده کنيم،

$$q = \frac{C_0(r-1)r^N}{r^N - 1} = \frac{C_0\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N - 1}. \tag{52}$$

مثال_8) ذره‌ای به جرمِ m با سرعتِ v_0 به سمتِ ذره‌يِ ديگری به جرمِ M که با سرعتِ u_0 در حرکت است پرتاب مي‌شود $(u_0 < v_0)$. برخوردِ بينِ دو ذره را کش‌سان بگيريد. جرمِ m پس از برخورد با M بر مي‌گردد و با ديوار برخورد مي‌کند. برخوردِ m با ديوار را نيز کش‌سان مي‌گيريم. مي‌خواهيم سرعتِ نهايیِ جرم‌هايِ m و M و هم‌چنين تعدادِ برخوردِ آن‌ها با هم را به دست آوريم. چون برخوردها کش‌سان

هستند انرژی پایسته است و چون در برخوردِ دو جرم، نیرویِ خارجی نداریم، تکانه‌یِ کل پایسته است. در برخورد با دیوار فقط جهتِ تکانه‌یِ ذره عوض می‌شود.

اندازه‌یِ سرعت جرمِ m قبل از $k+1$ اُمین برخوردش را v_k و سرعت جرمِ M قبل از $k+1$ اُمین برخورد را u_k می‌گیریم. بقایِ تکانه و انرژیِ جنبشی می‌دهد،

$$mv_k + Mu_k = -mv_{k+1} + Mu_{k+1}$$

$$\frac{mv_k^2}{2} + \frac{Mu_k^2}{2} = \frac{mv_{k+1}^2}{2} + \frac{Mu_{k+1}^2}{2}. \tag{53}$$

با استفاده از این روابط می‌توانیم v_{k+1} و u_{k+1} را بر حسبِ v_k و u_k به دست آوریم.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{2m}{M+m}v_k + \frac{M-m}{M+m}u_k \\ v_{k+1} &= \frac{M-m}{M+m}v_k - \frac{2M}{M+m}u_k. \end{aligned} \tag{54}$$

برایِ حلِ این معادله‌ها کافی است که حدس‌هایِ $v_k = CZ^k$ و $u_k = BZ^k$ را به عنوانِ جواب در (54) جاگذاری کنیم.

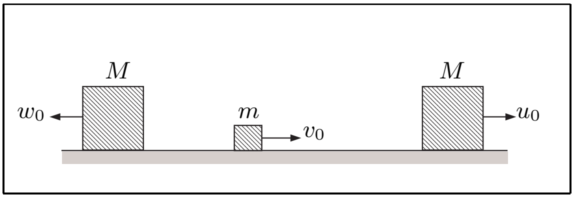
$$\begin{aligned} BZ &= \frac{2m}{M+m}C + \frac{M-m}{M+m}B \\ CZ &= \frac{M-m}{M+m}C - \frac{2M}{M+m}B \\ \Rightarrow \qquad & \frac{B}{C} = \frac{2m/(M+m)}{Z-(M-m)/(M+m)} = \frac{Z-(M-m)/(M+m)}{-2M/(M+m)}. \end{aligned} \tag{55}$$

با حلِ این معادله Z و B/C به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{e}^{\pm i\theta}, \quad \cos\theta := \frac{M-m}{M+m} \\ \frac{B}{C} &= \mp i\sqrt{\frac{m}{M}}. \end{aligned} \tag{56}$$

v_k و u_k عبارت‌اَند از

$$v_k = C\mathrm{e}^{ik\theta} + C^*\mathrm{e}^{-ik\theta}$$



$$u_k \quad = \quad \sqrt{\frac{m}{M}}\left(-iC\mathrm{e}^{ik\theta} + iC^*\mathrm{e}^{-ik\theta}\right). \tag{57}$$

در این‌جا حقیقی بودنِ سرعت‌ها منجر به این می‌شود که C و C^* مزدوجِ مختلطِ هم باشند.

یک راهِ دیگر برایِ به دست آوردنِ همین نتیجه تعریفِ

$$S_k := v_k + i\sqrt{\frac{M}{m}}u_k, \tag{58}$$

است. با استفاده از (54) به راحتی می‌توان نشان داد

$$S_{k+1} = \mathrm{e}^{i\theta}S_k = \cdots = \mathrm{e}^{ik\theta}S_0, \tag{59}$$

که θ همان تعریفِ (56) را دارد. فرض کنید $m/M = 0.01$ و $u_0 = 0$. می‌خواهیم تعدادِ برخوردِ بینِ دو جرم را به دست آوریم. با استفاده از پارامترهایِ داده‌شده $\theta = 11.4^\circ$. شرطِ آن‌که دیگر برخوردی صورت نگیرد آن است که،

$$v_k \leq u_k, \quad \Rightarrow \quad \cot(k\theta) \leq \sqrt{m/M} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad k\theta \geq 84^\circ \tag{60}$$

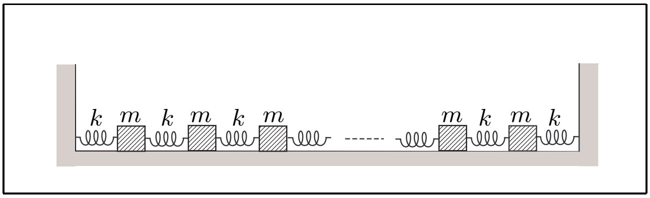
از این جا تعدادِ برخورد $k = 7$ به دست می‌آید.

مثالِ 9) همان مثالِ قبل را در نظر بگیرید ولی با این تفاوت که به جایِ دیوار ذره‌یِ دیگری با جرمِ M قرار دارد که با سرعتِ اولیه‌یِ w_0 به سمتِ چپ می‌رود. کماکان برخوردها را کش‌سان بگیرید.

اندازه‌یِ سرعت جرمِ m قبل از $k+1$ اُمین برخوردش را v_k و سرعت دو جرمِ M قبل از $k+1$ اُمین برخورد را u_k و w_{k+1} می‌گیریم. با استفاده از پایستگی‌یِ انرژی و تکانه در هر یک از برخوردها به روابطِ زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} u_{k+1} \quad &= \quad \frac{2m}{M+m}v_{2k} + \frac{M-m}{M+m}u_k \\ v_{2k+1} \quad &= \quad \frac{M-m}{M+m}v_{2k} - \frac{2M}{M+m}u_k. \end{aligned} \tag{61}$$

$$w_{k+1} \quad = \quad \frac{2m}{M+m}v_{2k+1} + \frac{M-m}{M+m}w_k$$



$$v_{2k+2} = \frac{M-m}{M+m}v_{2k+1} - \frac{2M}{M+m}w_k. \quad (62)$$

در این‌جا یک دسته معادله‌ی تفاضلیِ جفت شده داریم. این معادله‌ها نیز به همان روشِ قبلی و با جاگذاریِ $v_k = CZ^k$ و $u_k = BZ^{2k}$ و $w_k = DZ^{2k+1}$ می‌توانیم حل کنیم. با حلِ آن معادله‌ها Z و B/C و D/C به دست می‌آیند.

$$Z = \mathrm{e}^{\pm i\phi}, \quad \cos\phi := \frac{M}{M+m}$$
$$\frac{D}{C} = \frac{B}{C} = \frac{1}{2M}[-m \pm i\sqrt{m(m+2M)}]. \quad (63)$$

v_k، u_k و w_k عبارت‌اَند از

$$v_k = C\mathrm{e}^{ik\phi} + C^*\mathrm{e}^{-ik\phi}$$

$$u_k = B\mathrm{e}^{2ik\phi} + B^*\mathrm{e}^{-2ik\phi}$$

$$w_k = D\mathrm{e}^{i(2k+1)\phi} + D^*\mathrm{e}^{-i(2k+1)\phi}. \quad (64)$$

با دانستنِ سرعت‌هایِ اولیه، v_k، u_k و w_k به دست می‌ایند.

مثالِ 10) N جرمِ مشابهِ m توسطِ $N+1$ فنرِ مشابه با ضریبِ سختیِ k به هم و به دیوار وصل شده‌اند. می‌خواهیم بسامدهایِ طبیعیِ این سیستم را به دست آوریم. جابه‌جایی ذره‌یِ k اُم از محلِّ تعادلش را x_k می‌گیریم. در این صورت معادله‌یِ حرکت جرم‌ها عبارت است از

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - 2x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_3 + x_1 - 2x_2)$$
$$\vdots$$

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$$
$$\vdots$$
$$m\ddot{x}_N = k(x_{N-1} - 2x_N) \tag{65}$$

این دسته معادله را می‌توان در یک معادله هم‌راه با دو شرطِ مرزی خلاصه کرد.

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n), \qquad x_0 = x_{N+1} = 0. \tag{66}$$

این معادله‌ها دو متغیره هستند. این معادله نسبت به متغیرِ زمان که پیوسته است معادله‌ي دیفرانسیل و نسبت به شاخصِ n که شماره‌يِ ذره و گسسته است، یک معادله‌يِ تفاضلی است. ابتدا با انتخابِ $x_n = C_n \mathrm{e}^{i\omega t}$ معادله را یک متغیره می‌کنیم[2] و به معادله‌يِ تفاضلی‌يِ زیر می‌رسیم.

$$-m\omega^2 C_n = k(C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n), \qquad C_0 = C_{N+1} = 0. \tag{67}$$

برايِ حلِ این معادله حدسِ $C_n = CZ^n$ را جاگذاری می‌کنیم و از آن‌جا Z را به دست می‌آوریم.

$$Z^2 + (\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2)Z + 1 = 0, \tag{68}$$

در این‌جا $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. واضح است که حاصلِ‌ضربِ دو جوابِ معادله‌يِ بالا $Z_1 Z_2 = 1$. در صورتی که $\omega \geq 2\omega_0$ باشد، جواب‌هايِ Z حقیقی و معکوسِ هم، یعنی اندازه‌يِ یکی بزرگ‌تر و اندازه‌يِ دیگری کوچک‌تر از یک هستند. در صورتی که $\omega < 2\omega_0$ باشد، جواب‌هايِ Z فاز هستند. در هر صورت دو جوابِ معکوسِ هم و جوابِ کلی ترکیبِ خطی‌يِ این دو جواب است.

$$C_n = D_1 Z^n + D_2 Z^{-n}. \tag{69}$$

Z را جوابی می‌گیریم که اندازه‌اش از یک بزرگ‌تر نیست.

اگر $N \to \infty$ و $\omega \geq 2\omega_0$ باشد، ضریبِ D_2 باید صفر شود وگرنه C_n بی‌نهایت می‌شود. معنيِ این حرف آن است که امواجِ با فرکانس‌هايِ بزرگ‌تر از $2\omega_0$ در شبکه پخش نمی‌شود.

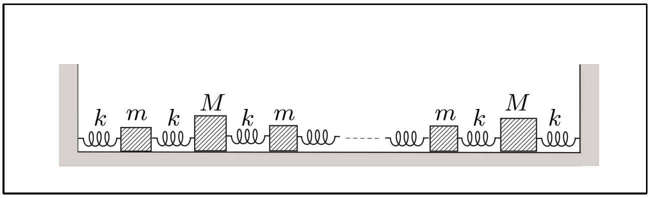
برايِ تعدادِ محدودی ذره $C_0 = C_{N+1} = 0$، که نتیجه می‌دهد، $D_2 = -D_1$ و

$$Z^{N+1} - Z^{-(N+1)} = 0, \quad \Rightarrow \quad Z^{2(N+1)} = 1 \tag{70}$$

این رابطه را برايِ Zِ حقیقی و یا عددی مختلط بااندازه‌يِ بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک نمی‌توان برقرار کرد.با گرفتنِ Z به صورتِ یک فاز $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ نتیجه می‌شود،

$$\theta = \frac{s\pi}{N+1}, \qquad s = 0, 1, 2, \cdots \tag{71}$$

[2] ضرایب در معادله‌يِ (66) مستقل از زمان هستند و اگر این معادله را به شکلِ عمل‌گريِ $\mathcal{F}x_n = 0$ بنویسیم، واضح است که عمل‌گرِ $\mathcal{F}$ با عمل‌گرِ تحولِ زمان، $\partial/\partial t$، جابه‌جایی است، پس می‌توانیم ویژه‌تابعِ مشترک برايِ آن‌ها بیابیم. $C_n \mathrm{e}^{i\omega t}$ ویژه‌تابعِ عمل‌گرِ تحولِ زمان است.



با در نظر گرفتنِ این که x_n حقیقی است کلی‌ترین جواب برایِ x_n عبارت است از

$$x_n = D(\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta})\mathrm{e}^{i\omega t} + D^*(\mathrm{e}^{-in\theta} - \mathrm{e}^{in\theta})\mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{72}$$

یا

$$x_n = (E\cos\omega t + F\sin\omega t)\sin n\theta. \tag{73}$$

با جاگذاریِ $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ در معادله‌یِ (68) بسامدهایِ طبیعیِ سیستم که N تا هستند به دست می‌آید.

$$\omega_s = 2\omega_0 \sin\left[\frac{s\pi}{2(N+1)}\right], \qquad s = 1, 2, \cdots, N. \tag{74}$$

حالت‌هایِ $s = 0$ و $s = N+1$ منجر به جوابِ $x_n = 0$ می‌شوند که قابلِ قبول نیست. حالت‌هایِ $s > N+1$ بسامدِ جدیدی نمی‌دهند.

مثال ـ11) N جرمِ مشابهِ m و N جرمِ مشابهِ M به صورت یک در میان توسطِ $2N+1$ فنرِ مشابه با ضریبِ سختیِ k به هم و به دیوار وصل شده‌اند. می‌خواهیم بسامدهایِ طبیعیِ این سیستم را به دست آوریم.

با نوشتنِ قانونِ نیوتن معادله‌یِ حرکتِ جرم‌ها را در دو معادله با دو شرطِ مرزیِ زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{2n} &= k(x_{2n} + x_{2n-2} - 2x_{2n-1}) \\ m\ddot{x}_{2n-1} &= k(x_{2n} + x_{2n-2} - 2x_{2n-1}), \qquad x_0 = x_{2N+1} = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

با جاگذاری حدس‌هایِ $x_{2n-1} = A_{2n-1}\mathrm{e}^{i\omega t}$ و $x_{2n} = B_{2n}\mathrm{e}^{i\omega t}$ در معادله‌هایِ بالا به معادله‌هایِ تفاضلیِ جفت‌شده‌ای می‌رسیم.

$$-M\omega^2 B_{2n} = k(A_{2n+1} + A_{2n-1} - 2B_{2n}),$$

$$-m\omega^2 A_{2n-1} = k(B_{2n} + B_{2n-2} - 2A_{2n-1}), \qquad B_0 = A_{2N+1} = 0. \tag{76}$$

از رابطه‌یِ اول B_{2n} را به دست می‌آوریم

$$B_{2n} = \frac{k}{2k - M\omega^2}(A_{2n+1} + A_{2n-1}), \tag{77}$$

و در دیگری جاگذاری می‌کنیم.

$$\left[\frac{(2k - m\omega^2)(2k - M\omega^2)}{k^2} - 2\right] A_{2n-1} = A_{2n+1} + A_{2n-3}. \tag{78}$$

در این‌جا ما به یک معادله‌یِ تفاضلی برایِ A_n می‌رسیم. البته واضح است چون تنها A_n با شاخص‌های فردِ در معادله‌ها وارد شد، از این روابط تنها A_n با شاخص‌های فرد به دست می‌آید. برایِ حلِ این معادله‌یِ تفاضلی جواب را به صورتِ $A_{2n-1} = AZ^{2n-1}$ می‌گیریم. B_{2n} نیز با جاگذاریِ A_{2n-1} و A_{2n+1} در معادله‌یِ (77) به دست می‌آید

$$B_{2n} = BZ^{2n}, \quad B := \frac{2k - m\omega^2}{k(Z + Z^{-1})}A. \tag{79}$$

با جاگذاریِ $A_{2n-1} = AZ^{2n-1}$ در معادله‌یِ (78) معادله‌یِ زیر برایِ Z به دست می‌آید.

$$\frac{(2k - m\omega^2)(2k - M\omega^2)}{k^2} - 2 = Z^2 + Z^{-2}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega^4 mM - 2k\omega^2(m + M) - k^2(Z - Z^{-1})^2 = 0. \tag{80}$$

مثلِ مثالِ قبل جواب‌هایِ Z معکوسِ هم هستند. جوابِ کلی‌یِ A_{2n-1} و B_{2n} به صورتِ زیر هستند،

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= AZ^{2n-1} + A'Z^{-2n+1} \\ x_{2n} &= BZ^{2n} + B'Z^{-2n}. \end{aligned} \tag{81}$$

A و B (و همین‌طور A' و B') مطابقِ (79) به هم مربوط‌اَند. با استفاده از شرطِ مرزی‌یِ $B_0 = 0$، $B = B'$ می‌شود. شرطِ مرزی‌یِ $A_{2N+1} = 0$ مقدارِ Z را معین می‌کند.

$$Z^{2N+1} - Z^{-(2N+1)} = 0, \quad \Rightarrow \quad Z^{2(2N+1)} = 1 \tag{82}$$

این رابطه را برایِ Zِ حقیقی نمی‌توان برقرار کرد. با گرفتنِ $Z = \mathrm{e}^{i\theta}$ نتیجه می‌شود،

$$\theta = \frac{s\pi}{2N+1}, \qquad s = 0, 1, 2, \cdots \tag{83}$$

با جاگذاریِ این مقدار برایِ Z در (78)، $2N$ بسامدهایِ طبیعیِ سیستم به دست می‌آید.

$$(\omega_s^{\pm})^2 = \frac{k}{\mu}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}\sin^2\theta_s}\right], s = 1, 2, \cdots, N. \tag{84}$$

در این رابطه $\mu := mM/(m+M)$. فرض کنیم $M > m$. واضح است که $\sqrt{2k/\mu} \geq \omega_s^+$ و بنا بر این $B/A \leq 0$. یعنی این بسامدها مربوط به وقتی است که حرکتِ جرم‌هایِ مجاور غیرِهم‌فاز است. از طرفِ دیگر $\sqrt{2k/\mu} \leq \omega_s^-$ و بنا بر این $B/A \geq 0$. یعنی این بسامدها مربوط به وقتی است که حرکتِ جرم‌هایِ مجاور هم‌فاز است. خوب است همین مسئله برایِ وقتی که تعدادِ ذرات فرد است، یعنی مثلاً تعدادِ m ها یکی بیش‌تر از M ها است، بررسی کنید. حالتِ جالبِ دیگر این است که یکی از دیوارها حرکت هم‌آهنگ داشته باشد. در این صورت نوسان‌گرهایِ واداشته داریم.

مثالِ 12) حالا بیایید مسئله‌یِ ول‌گشتِ متقارن را بررسی کنیم. در هر قدم ول‌گرد به یک اندازه و با احتمالِ $1/2$ به سمتِ چپ و یا راست می‌رود. احتمالِ آن که در قدمِ n اُم در مکانِ s باشد را $P_{n,s}$ می‌گیریم. برایِ آن که در قدمِ $(n+1)$ اُم در مکانِ s باشد، باید در قدمِ n اُم در مکانِ $(s-1)$ یا $(s+1)$ باشد.

$$P_{n+1,s} = \frac{1}{2}\left[P_{n,s-1} + P_{n,s+1}\right]. \qquad (85)$$

این معادله را معادله‌یِ مادر می‌نامند. با تعریفِ تابعِ مولّد

$$G_n(Z) := \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} P_{n,s} Z^s \qquad (86)$$

و استفاده از معادله‌یِ مادر، معادله‌ای برایِ تابعِ مولّد به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(Z) &= \frac{1}{2}\left[ZG_n(Z) + Z^{-1}G_n(Z)\right], \\ &\Rightarrow \quad \frac{G_{n+1}(Z)}{G_n(Z)} = \frac{Z+Z^{-1}}{2} \\ &\Rightarrow \quad G_n(Z) = \left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}\right)^n G_0(Z). \end{aligned} \qquad (87)$$

مکانِ اولیه‌یِ ول‌گرد را مبدأ ِمختصات می‌گیریم. در این صورت $P_{0,s} = \delta_{s,0}$، که از این‌جا

$$G_0(Z) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} P_{0,s} Z^s = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \delta_{s,0} Z^s = 1 \qquad (88)$$

بنا بر این تابعِ مولّد می‌شود

$$\begin{aligned} G_n(Z) &= \left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}\right)^n = (\frac{1}{2})^n (Z+Z^{-1})^n \\ &= \sum_{m=0}^{m=n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{Z^{n-2m}}{2^n} \end{aligned} \qquad (89)$$

با تغییرِ متغیرِ $s := n - 2m$ و مقایسه‌یِ این جواب با تعریفِ تابعِ مولّد، $P_{n,s}$ به دست می‌آید.

$$P_{n,s} = \begin{cases} \frac{n!}{[(n-s)/2]![(n+s)/2]!}\frac{1}{2^n}, & n+s = \text{زوج} \\ \\ 0, & n+s = \text{فرد} \end{cases} \tag{90}$$

تابعِ‌مولّد خواصِ دیگری نیز دارد. بقایِ احتمال نتیجه می‌دهد

$$G_n(1) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} P_{n,s} = 1. \tag{91}$$

مکانِ متوسطِ ول‌گرد در قدمِ n اُم را بر حسبِ تابعِ‌مولّد می‌توانیم بنویسیم.

$$\frac{\mathrm{d}G_n(Z)}{\mathrm{d}Z}\bigg|_{Z=1} = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} sP_{n,s} = \bar{s}. \tag{92}$$

برایِ این مثالِ خاص یعنی مسئله‌یِ ول‌گشتِ متقارن $\bar{s} = 0$. $\bar{s^2}$ و Δs را نیز بر حسبِ مشتق‌هایِ $G_n(Z)$ می‌شود نوشت.

قدردانی— لازم می‌دانم از محمدِ خرمی، امیرحسینِ فتح‌اللهی، و احمدِ شریعتی برایِ پیش‌نهادهایِ مفیدی که در موردِ این مقاله داشتند تشکر کنم.

۵ مراجع

در کتاب‌هایِ زیر معادله‌هایِ تفاضلی مطالعه شده است.

[1] Bender, Carl. M., Orszag, Steven. A.; Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers; McGraw Hill.

[2] Kulenovic M.R.S., Merino O.; Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica; Chapman & Hall.