پتانسیلِ اسکالرِ یک حلقه‌ی جریان

محمود بهمن‌آبادی

در این مقاله‌ی آموزشی پتانسیلِ اسکالرِ یک حلقه‌ی جریان را محاسبه می‌کنیم. از روی آن می‌توان میدانِ مغناطیسیِ ناشی از یک حلقه‌ی جریان را در تمام فضا به دست آورد.

1 مقدمه

یک قضیه‌یِ ریاضی می‌گوید که اگر $\nabla \times \mathbf{H}$ در ناحیه‌ی V صفر باشد، تابعِ ψ ای وجود دارد که $\mathbf{H} = -\nabla\psi$. به ψ پتانسیلِ اسکالر می‌گوییم. اما شرطِ مهمِ این قضیه این است که ناحیه‌ی V هم‌بندِ ساده باشد، یعنی چنان باشد که هر خمِ بسته‌ای را بتوان با ثابت نگه داشتن یک نقطه‌اش به صفر منقبض کرد، بی آن که پاره شود، یا از ناحیه خارج شود. اگر این شرط برقرار نباشد، یعنی اگر V هم‌بندِ ساده نباشد، ممکن است چنان ψ ای که رویِ تمامِ V تعریف شده باشد وجود نداشته باشد. یک مثال ساده از این وضعیّت، پتانسیلِ اسکالرِ یک سیمِ طویلِ حاملِ جریان است. در این حالت

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\,\pi}\frac{I}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = -\nabla\left(-\frac{I}{2\,\pi}\,\varphi\right), \tag{1}$$

که در این جا φ زاویه‌ی سمتی، و $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ بردارِ یکه در جهتِ φ است. باید دقت کرد که φ را نمی‌توان روی تمامِ فضا تعریف کرد. ببینیم چرا: مقدارِ φ را برای نقاطِ رویِ محورِ x صفر تعریف می‌کنیم و در جهتِ مثلثاتی رویِ دایره‌ای به شعاعِ مثلاً a حولِ مبداء حرکت می‌کنیم. φ زیاد می‌شود، تا دوباره به محورِ x برسیم، در این جا مقدارِ φ می‌شود $2\,\pi$ که با مقدارِ آغازینش فرق دارد! بنا بر این φ یک «تابع» به معنیِ ریاضی نیست (زیرا تابع باید به هر نقطه یک و تنها یک عدد نسبت بدهد). بعضی‌ها به چنین چیزهایی می‌گویند «تابعِ چندمقدار». در حالتِ کلی هم اگر V هم‌بندِ ساده نباشد، پتانسیلِ اسکالر را نمی‌توان رویِ تمامِ V تعریف کرد. در این مقاله‌ی آموزشی پتانسیلِ اسکالرِ یک حلقه‌یِ جریان را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در این مورد هم پتانسیل را نمی‌توان رویِ تمامِ فضا تعریف کرد.

2 محاسبه‌ی پتانسیل اسکالر

حلقه‌ای به شعاعِ a در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید. از این حلقه جریانِ I می‌گذرد (مثبت، پادساعت‌گرد). چون ناحیه‌های $r < a$ و $r > a$ هم‌بندِ ساده اند، می‌توانیم دو تابعِ تک‌مقدارِ $\psi_<$ و $\psi_>$ برایِ این دو ناحیه تعریف کنیم. این دو تابع در معادله‌ی لاپلاس [a] صدق می‌کنند. چون جریان تقارنِ سمتی دارد، این دو تابع به شکلِ زیر اند:

$$\psi = \begin{cases} \psi_< = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, r^n\, P_n(\cos\theta) & r < a \\[2ex] \psi_> = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}}\, P_n(\cos\theta) & r > a \end{cases} \tag{2}$$

می‌توان نشان داد که در تمامِ نقاطِ کره‌یِ $r = a$ باید داشته باشیم

$$-\,\mu_0\, \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla\psi_< \Big|_{r=a} = -\mu_0\, \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla\psi_> \Big|_{r=a}. \tag{3}$$

اثبات چنین است: در $z \neq 0$ این معادله نتیجه‌یِ پیوسته بودنِ $\mathbf{B}$ (یا $\mathbf{H}$) است؛ در $z = 0$ این معادله نتیجه‌یِ این است که $\mathbf{B}$ در صفحه‌یِ $z = 0$ فقط مؤلفه‌یِ z دارد، یعنی $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{B}\Big|_{z=0} = 0$. بنا بر این

$$\frac{\partial\psi_<}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{\partial\psi_>}{\partial r}\Big|_{r=a}. \tag{4}$$

از این جا به سادگی نتیجه می‌شود

$$n\, A_n a^{n-1} = -(n+1)\, B_n\, \frac{1}{a^{n+2}}\,\cdot \tag{5}$$

پس

$$\psi = \begin{cases} \psi_< = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, r^n\, P_n(\cos\theta) & r < a \\[2ex] \psi_> = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, \frac{n}{n+1}\, \frac{a^{2\,n+1}}{r^{n+1}}\, P_n(\cos\theta) & r > a \end{cases} \tag{6}$$

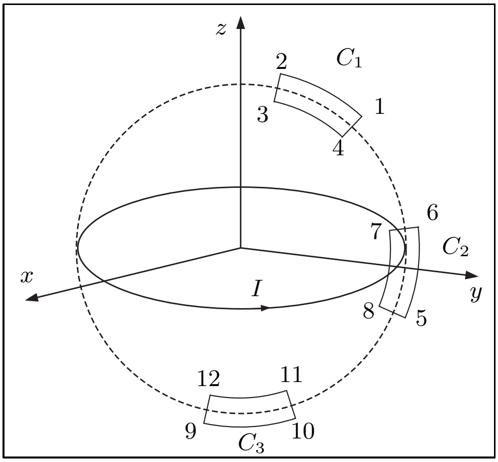
به نظر می‌رسد پتانسیلِ ψ رویِ کره‌یِ $r = a$ ناپیوسته است:

$$\delta\psi(\theta) := \psi_>(a,\theta) - \psi_<(a,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,n+1}{n+1}\, A_n\, a^n\, P_n(\cos\theta) \tag{7}$$

$$= A_0 + \frac{3}{2}\, A_1\, a\, P_1(\cos\theta) + \frac{5}{3}\, A_2\, a^2\, P_2(\cos\theta) + \frac{7}{4}\, A_3\, a^3\, P_3(\cos\theta)$$

$$+\frac{9}{5}\, A_4\, a^4\, P_4(\cos\theta) + \frac{11}{6}\, A_5\, a^5\, P_5(\cos\theta) + \cdots$$

و این ناپیوستگی، $\delta\psi$، به θ بستگی دارد.



می‌توان نشان داد که ناپیوستگیِ ψ رویِ نیم‌کره‌یِ بازِ بالایی، $z > 0$ و $r = a$، باید ثابت باشد. به بیانِ دیگر، اگر چهار نقطه‌ی 1 و 2 و 3 و 4 را مطابقِ شکل در نظر بگیریم، و h (فاصله‌یِ دو نقطه‌یِ مجاور در دو طرفِ کره‌یِ $r = a$) بسیار کوچک باشد، داریم

$$\psi_>(1) - \psi_<(4) = \psi_>(2) - \psi_<(3). \tag{8}$$

اثباتِ این مطلب با استفاده از رابطه‌یِ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ است. می‌دانیم که $\mathbf{J}$ جز رویِ حلقه، همه جا صفر است. اکنون مسیری مانند C_1 در شکل در نظر بگیرید. می‌دانیم $\oint_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$، و می‌دانیم که در $r > a$ داریم $\mathbf{H} = -\nabla\psi_>$ و در $r < a$ داریم $\mathbf{H} = -\nabla\psi_<$. برایِ مسیرهایِ $1 \to 2$ و $3 \to 4$، هر چه که باشند، به شرطِ آن که نیم‌کره‌ی $r = a$ را قطع نکنند، داریم

$$\int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \psi_>(1) - \psi_>(2), \qquad \int_3^4 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \psi_<(3) - \psi_<(4). \tag{9}$$

از طرفی

$$\lim_{h\to 0} \int_2^3 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{h\to 0} \int_4^1 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{10}$$

بنا بر این

$$\oint_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \big[\psi_>(1) - \psi_>(2)\big] + \big[\psi_<(3) - \psi_<(4)\big] = 0. \tag{11}$$

و از این جا به راحتی معادله‌یِ 8 نتیجه می‌شود. اگر همین استدلال را برایِ مسیرِ C_3 در شکل تکرار کنیم، می‌بینیم قضیّه‌ی مشابهی هم در موردِ نیم‌کره‌یِ بازِ پایینی درست است.

اکنون مسیرِ C_2 را در شکل در نظر بگیریم. برایِ این مسیر داریم $\oint_{C_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -I$، و باز هم داریم

$$\lim_{h\to 0}\int_6^7 \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \lim_{h\to 0}\int_8^5 \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{12}$$

در این جا هم مسیرهایِ $7 \leftarrow 8$ و $5 \leftarrow 6$ مهم نیست که چه شکلی دارند، کافی است کره را قطع نکنند. بنا بر این داریم

$$\oint_{C_2} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \big[\psi_<(7) - \psi_<(8)\big] + \big[\psi_>(5) - \psi_>(6)\big] = -I. \tag{13}$$

از این جا خواهیم داشت

$$\psi_>(6) - \psi_<(7) = \psi_>(5) - \psi_<(8) + I. \tag{14}$$

معنیِ این رابطه این است که ناپیوستگیِ ψ رویِ نیم‌کره‌یِ بالایی نمی‌تواند برابر باشد با ناپیوستگی ψ رویِ نیم‌کره‌یِ پایینی، و به این ترتیب

$$\delta\psi = \begin{cases} \delta\psi_\uparrow & 0 \le \theta < \pi/2 \\ \delta\psi_\downarrow & \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases} \tag{15}$$

که در این جا $\delta\psi_\uparrow$ و $\delta\psi_\downarrow$ دو مقدارِ ثابت اند و داریم

$$\delta\psi_\uparrow = \delta\psi_\downarrow + I. \tag{16}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\delta\psi = \delta\psi_\downarrow + I\,\Theta(\cos\theta), \tag{17}$$

که در این جا Θ تابعِ پله‌ایِ واحد است:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases} \tag{18}$$

در محدوده‌یِ $-1 \le x \le 1$ می‌توان این تابع را بر حسبِ توابعِ لُژاندر [b]، $P_n(x)$ ها، بسط داد [1، ص 99 و 100]

$$\Theta(x) \;=\; \sum_{n\,\mathrm{odd}}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \frac{(2\,n+1)\,(n-2)!!}{2\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!}\, P_n(x) \tag{19}$$

$$=\; \frac{3}{2}\,P_1(x) - \frac{7}{8}\,P_3(x) + \frac{11}{16}\,P_5(x) - \cdots \tag{20}$$

اگر این بسط را در 17 بگذاریم می‌بینیم

$$\delta\psi = \delta\psi_\downarrow + I\left(\frac{3}{2}\,P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\,P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\,P_5(\cos\theta) - \cdots\right) \tag{21}$$

اکنون اگر این معادله را با 7 مقایسه کنیم می‌بینیم

$$A_0 = \delta\psi_\downarrow, \quad A_1 = \frac{I}{a}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{I}{2\,a^3}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = \frac{3\,I}{8\,a^5}. \tag{22}$$

یعنی به جز A_0، ضریبِ P_{2n} ها صفر است، و $A_{(2n+1)}$ ها همگی به دست می‌آیند.

مقدارِ $\delta\psi_\downarrow$ را نمی‌توان تعیین کرد، و البته مقدارِ این عدد تأثیری در میدانِ مغناطیسی ندارد، زیرا $P_0(\cos\theta) = 1$ ثابت است و $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ است. می‌توان $\delta\psi_\downarrow$ را صفر گرفت، اما در این صورت از 16 پیدا است که $\delta\psi_\uparrow$ دیگر صفر نیست. یعنی در هر حال نمی‌توان پتانسیلِ ψ را طوری تعریف کرد که روی تمام فضا پیوسته باشد.

خوب است پتانسیلِ اسکالرِ یک حلقه‌ي جریان را با پتانسیلِ اسکالرِ یک حلقه‌ي باردار مقایسه کنیم. می‌توان نشان داد که پتانسیلِ یک حلقه‌ي باردار چنین است [2]:

$$\frac{q}{4\,\pi\epsilon_0}\begin{cases} \dfrac{1}{r} - \dfrac{a^2}{2\,r^3}P_2(\cos\theta) + \dfrac{3\,a^4}{8\,r^5}P_4(\cos\theta) + \cdots & r < a \\ \dfrac{1}{a} - \dfrac{r^2}{2\,a^3}P_2(\cos\theta) + \dfrac{3\,r^4}{8\,a^5}P_4(\cos\theta) + \cdots & r < a \end{cases} \tag{23}$$

این پتانسیل رویِ تمامِ فضا پیوسته است. تفاوتِ این مسئله با مشابهِ مغناطیسی‌اش در این است که در مسئله‌ي مغناطیسی $\nabla \times \mathbf{H}$ رویِ ناحیه‌ای که هم‌بندِ ساده نیست صفر است، و $\nabla \cdot \mathbf{B}$ در تمامِ فضا صفر است؛ اما در مسئله‌ي الکتریکی $\nabla \times \mathbf{E}$ در تمامِ فضا صفر است و $\nabla \cdot \mathbf{E}$ رویِ ناحیه‌ای که هم‌بندِ ساده نیست صفر است.

سپاس‌گزاری

نویسنده از احمد شریعتی به خاطر تصحیحات و ویرایش مطلب تشکر می‌کند.

مراجع

[1] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3$^{\text{ed}}$ edition, Wiley, 1999

[2] G. Arfken: *Mathematical methods for physicists*, 3$^{\text{ed}}$ edition, Academic Press, 1985, p. 658

نام‌هاي خاص

a) Laplace, b) Legendre