حقله‌ یِ جریان، حلقه‌ یِ بار، و میدان‌هایِ آن‌ها

عبدالله مرتضی‌علی

در این مقاله با استفاده از پتانسیلِ اسکالرِ مغناطیسی و پتانسیلِ اسکالرِ الکتریکی، که توابعی هماهنگ اند، میدانِ مغناطیسیِ یک حلقه‌یِ جریان، و میدان الکتریکیِ یک حلقه‌یِ باردار را حساب می‌کنیم. مزیتِ استفاده از پتانسیلِ اسکالرِ مغناطیسی، در مقایسه با پتانسیلِ برداری، سادگی محاسبات است.

1 مقدمه

اگر تابعِ هم‌آهنگِ ψ تقارن استوانه‌ای داشته باشد، و بتوان به طریقی آن را رویِ محورِ z به عنوان تابعی از z به دست آورد، می‌توان $\psi(r,\theta)$ را برای نقاط خارج از محور هم به دست آورد. در این نوشته، دو مسئله‌ی ساده را به این روش حل می‌کنیم. اوّل مسئله‌ی میدانِ مغناطیسیِ ناشی از یک حلقه‌یِ نازکِ جریان را، بعد مسئله‌یِ میدانِ الکتریکیِ ناشی از یک حلقه‌ی باردار را.

با آن که روشِ کار کاملاً استاندارد است، خوب است در این جا آن را مرور کنیم. اگر تابع هم‌آهنگِ ψ در ناحیه‌ای حولِ محورِ z تقارنِ سمتی داشته باشد، یعنی اگر به زاویه‌یِ سمتیِ φ بستگی نداشته باشد، آن وقت در آن ناحیه بسطی به شکل زیر دارد

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\, r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)\, P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

رویِ محورِ z، برای $z>0$، داریم $\theta=0$ و $r=z$؛ و برای $z<0$ داریم $\theta=\pi$ و $r=-z$. پس رویِ محورِ z داریم: $(P_n(1)=1)$

$$\psi(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n\, z^n + B_n\, z^{-(n+1)} \right) & z > 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n\, P_n(-1)\,(-1)^n\, z^n + B_n\, P_{n+1}(-1)\,(-1)^{n+1}\, z^{-(n+1)} \right) & z < 0. \end{cases} \tag{2}$$

اگر ψ رویِ محور z معلوم باشد، $\psi(z)$، می‌توان بسطِ آن را به دست آورد، و از آن جا با مقایسه با فرمول‌های بالا A_n ها و B_n ها را به دست آورد. تابعِ $\psi(r,\theta)$ از (1) به دست می‌آید.

2 میدانِ مغناطیسیِ یک حلقه‌یِ جریان

حلقه‌ای بسیار نازک به شعاع a در نظر بگیریم که حاملِ جریان I است. می‌خواهیم میدانِ مغناطیسی را در تمام فضا به دست بیاوریم. توجه می‌کنیم که جز در رویِ حلقه $\nabla\times\mathbf{H}$ صفر است. پس تابع ψ وجود دارد که $\mathbf{H}=-\nabla\psi$. از طرفی، در خلاء $\mathbf{B}=\mu_0\,\mathbf{H}$، و $\nabla\cdot\mathbf{B}$ هم همه‌جا صفر است. از این جا نتیجه می‌شود که در خلاء، یعنی جز در روی حلقه ψ یک تابعِ هماهنگ است $(\nabla^2\psi=0)$. این را می‌دانیم که اگر حلقه‌یِ جریانِ نازکی داشته باشیم، و اگر P نقطه‌ای در فضا باشد، پتانسیلِ اسکالرِ مغناطیسی، ψ، در آن ناحیه برابر است با

$$\psi = -I\,\frac{\Omega}{4\,\pi} \tag{3}$$

که در این جا Ω زاویه‌یِ فضایی‌ای است که از نقطه‌یِ P حلقه را می‌بیند، و

$$\Omega = \int \frac{d\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}}{r^3}, \tag{4}$$

و در این فرمولِ اخیر، انتگرال رویِ سطحِ جهت‌پذیری است که حلقه مرزِ آن است [1، ص 179]. برایِ حلقه‌ای به شعاعِ a در صفحه‌یِ $z=0$، اگر P نقطه‌ای رویِ محورِ z باشد، Ω، و از آن جا ψ را به سادگی می‌توان به دست آورد. خواهیم داشت

$$\psi(z) = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right). \tag{5}$$

این معادله را با استفاده از بسطِ

$$\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\,h^{2n} \tag{6}$$

برایِ دو حالتِ $z>a$ و $0\le z<a$ بسط می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{I}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2n!!)^2}\,\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}\right] & a < z \\ \frac{I}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2n!!)^2}\,\left(\frac{z}{a}\right)^{2n+1}\right] & 0 \leq z < a \end{cases} \tag{7}$$

از مقایسه‌ی این فرمول با (2) ضرایب A_n و B_n پیدا می‌شوند. در این محاسبه باید توجه کرد که A_n ها برای $z > a$، و B_n ها برای $z < a$ باید صفر باشند تا سری واگرا نشود. ضمناً B_{2n} ها براي $z > a$، و A_{2n} ها براي $z < a$ صفر اند. با محاسبه‌ای سرراست خواهیم داشت:

$$\psi(r,\theta) = \begin{cases} \frac{I}{2} - \frac{I}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{[(2n)!!]^2}\,\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\,P_{2n+1}(\cos\theta) & r < a \\ -\frac{I}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,[2(n+1)]!}{[(2n+2)!!]^2}\,\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+2}\,P_{2n+1}(\cos\theta) & r > a \end{cases} \tag{8}$$

با مشتق گیری از ψ میدان مغناطیسی حلقه به دست می‌آید.

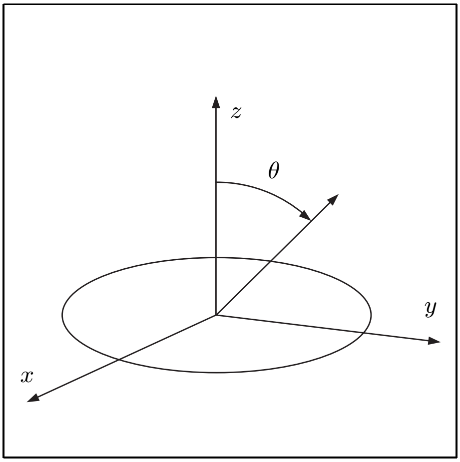
$$B_r(r,\theta) = \frac{\mu_0\,I\,a}{2\,r}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n+1)!!}{2^n\,n!}\,\frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}}\,P_{2n+1}(\cos\theta) \tag{9}$$

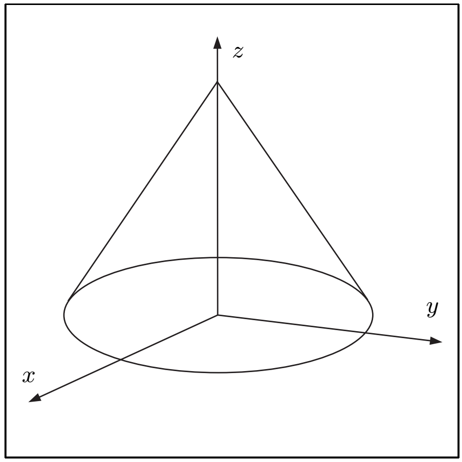
$$B_\theta(r,\theta) = \frac{\mu_0\,I}{4}\,\sin\theta\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n+1)!!}{2^n\,(n+1)!} \begin{cases} \frac{r^{2n}}{a^{2n+1}}\,\left(-\frac{2n+2}{2n+1}\right)\,P'_{2n+1}(\cos\theta) & r < a \\ \frac{a^{2n+2}}{r^{2n+3}}\,P'_{2n+1}(\cos\theta) & r > a \end{cases} \tag{10}$$

در این جا $P'_n(x)$ یعنی مشتقِ $P_n(x)$ نسبت به x . این معادله‌ها دقیقاً همان‌هایی هستند که به روش متداول، از پتانسیلِ برداری، یا از انتگرال‌گیری از قانون بیو ـ ساوار به دست می‌آید [2، ص 184].

3 میدانِ الکتریکيِ یک حلقه‌ی باردار

اینک حلقه‌ای به شعاع a در نظر بگیریم که با چگالیِ خطیِ یک‌نواخت λ باردار شده است. در تمام فضا $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، پس φ ای هست که $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ است. از طرفی جز رويِ حلقه $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ است، که نتیجه می‌دهد $\nabla^2\varphi$ جز روی حلقه صفر است. پس در تمامِ فضا، به جز روی حلقه φ یک تابع





هم‌آهنگ است. تقارنِ سمتیِ φ هم واضح است. پس کافی است φ را رویِ محورِ z به دست آوریم. این کار یک انتگرال‌گیریِ ساده است:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\, a\, d\theta}{\sqrt{a^2+z^2}} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{a}\right)^2}} & z<a \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\dfrac{a}{z}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{z}\right)^2}} & z>a \end{cases} \tag{11}$$

این را می‌توان با استفاده از (6) بسط داد. نتیجه می‌شود

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n} & z<a \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n+1} & z>a \end{cases} \tag{12}$$

از مقایسه‌یِ این فرمول‌ها با (1) پتانسیل در تمامِ فضا به دست می‌آید:

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta) & r<a \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\,\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta) & r>a \end{cases} \tag{13}$$

با مشتق‌گیری از این پتانسیل، میدان در تمامِ فضا به دست می‌آید:

$$E_r(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\,\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\, P_{2n}(\cos\theta) \times \begin{cases} -2\,n\,\dfrac{r^{2n-1}}{a^{2n}} & r < a \\[2ex] (2\,n+1)\,\dfrac{a^{2n+1}}{r^{2n+2}} & r > a \end{cases} \tag{14}$$

$$E_\theta(r,\theta) = \frac{\lambda\,\sin\theta}{2\,\varepsilon_0\,r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\, P'_{2n}(\cos\theta) \times \begin{cases} \left(\dfrac{r}{a}\right)^{2n} & r < a \\[2ex] \left(\dfrac{a}{r}\right)^{2n+1} & r > a \end{cases} \tag{15}$$

مرجع‌ها

1. J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy: *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3[ed] edition, Addison-Wesley, 1979

2. J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3[ed] edition, Wiely, 1999.