محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از پیمانه کولن

فریناز روشنی

مقدمه

برای محاسبه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، معمولاً ساده‌تر است که اول پتانسیل‌های برداری و اسکالر حساب شوند. اما پتانسیل‌های برداری و اسکالر آزادی پیمانه‌ای دارند و برای تعیین آنها اول باید پیمانه را تثبیت کرد و بعد از روی معادلات تحولی پتانسیل‌ها را تعیین کرد. در کتاب های درسی، از دو نوع پیمانه (پیمانه‌ی کولن و پیمانه‌ی لرنتس) صحبت می شود [1]. ویژگی پیمانه‌ی لرنتس این است که در این پیمانه پتانسیل‌های برداری و اسکالر نسبت به بار و جریان تأخیری اند، به این معنی که اثر بار و جریان در این پتانسیل‌ها با سرعت نور منتشر می‌شود. اما در پیمانه‌ی کولن پتانسیل اسکالر، نسبت به بار آنی است، یعنی اثر بار در پتانسیل اسکالر آناً منتشر می‌شود. از اینجا این تصور پیش می آید که میدان الکتریکی هم ممکن است در این پیمانه آناً منتشر شود. اگر چنین باشد، به یک پاردکس می‌رسیم، چون میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مشاهده‌پذیر اند و رفتارشان نباید به پیمانه‌ی انتخاب‌شده بستگی داشته باشد. می‌خواهیم با یک مثال نشان دهیم چنین نیست و میدان الکتریکی در پیمانه‌ی کولن هم تأخیری است.

در این نوشته اول مروری بر نحوه به‌دست آوردن پتانسیل‌های برداری و اسکالر از روی معادلات ماکسول خواهد شد. سرانجام میدان الکتریکی حاصل از یک چشمهٔ معین را در پیمانه کولن حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم این میدان چنان که انتظار می‌رود تأخیری است.

پتانسیل‌های برداری و اسکالر

معادلات ماکسول (در دستگاه گاؤسی) به این شکل اند.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho && (3) \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} && (4) \end{aligned}$$

با توجه به معادله‌ی (1) می‌توانیم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را به صورت زیر بنویسیم.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

با استفاده از معادله‌ی (2) و با در نظر گرفتن معادله‌ی (5)

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{6}$$

نتیجه می‌شود که می‌توان میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{7}$$

نوشت. به میدانهای $\mathbf{A}$ و ϕ پتانسیل‌های برداری و اسکالر می‌گویند. حال معادلات (5) و (7) را در دو معادله‌ی دیگر ماکسول می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} && (8) \end{aligned}$$

به این ترتیب معادلات ماکسول به دو معادله کاهش می‌یابند. برای پتانسیل‌های اسکالر و برداری آزادی وجود دارد. یعنی اگر پتانسیل برداری و اسکالر را به صورت زیر عوض کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi \longrightarrow \phi' &= \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} && (9) \end{aligned}$$

میدان‌های (5) و (7) که میدان‌های واقعی اند عوض نمی‌شوند. به این آزادی در انتخاب پتانسیل‌های اسکالر و برداری، آزادی پیمانه‌ای می‌گویند. به سادگی دیده می‌شود اگر $\mathbf{A}$ و ϕ جواب معادلات (8) باشند، $\mathbf{A}'$ و ϕ' با تبدیل بالا هم جواب این معادلات اند. پس معادلات (8) جواب یکتا ندارند. برای حل این معادلات باید شرطی روی $\mathbf{A}$ و ϕ بگذاریم. می‌گوییم باید اول پیمانه را تثبیت کنیم.

اگر شرط بین $\mathbf{A}$ و ϕ را

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{10}$$

بگیریم، می‌گوییم پیمانه‌ی کولن را انتخاب کرده ایم. در این پیمانه معادلات (8) به صورت زیر در می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= -4\pi\rho \\
\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

از معادلات (11) دیده می شود که معادله‌ی پتانسیل اسکالر آنی (غیرتأخیری) است. یعنی مقدار پتانسیل اسکالر در زمان t از مقدار چشمه در همان زمان t تعیین می‌شود. پس در مورد این پتانسیل اسکالر، اطلاعات چشمه آناً (با سرعت بی‌نهایت) منتشر می‌شوند. اما برای میدان‌های واقعی فیزیکی، اطلاعات با سرعت نور منتشر می‌شوند و مثلاً برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی در زمان t و مکان $\mathbf{x}$، باید اثرات چشمه در زمان t' و مکان $\mathbf{x}'$ را در نظر بگیریم، که $t' = t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)$.

نکته‌ی مهم (که هدف اصلی این مقاله است) این است که پتانسیل‌های اسکالر و برداری میدان‌هایی مجازی اند و محاسبه‌ی آن‌ها (که انتخاب پیمانه را ضروری می‌کند) فقط برای ساده‌تر کردن محاسبه‌ی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است. حتی وقتی پیمانه‌ی کولن انتخاب شود که در آن پتانسیل اسکالر غیرتأخیری است، اگر از روی همین پتانسیل اسکالر و پتانسیل برداری میدان الکتریکی حساب شود، این میدان تأخیری است (چنان که باید باشد) و ربطی به انتخاب پیمانه هم ندارد.

محاسبه‌ی میدان الکتریکی برای یک چشمه

توزیع بار

$$
\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t) \tag{12}
$$

را در نظر بگیرید. به سادگی می‌شود میدان الکتریکی حاصل از فقط همین توزیع بار غیرتأخیری است. کافی است توجه کنیم که

$$
\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)\right] \tag{13}
$$

عبارت درون کروشه کروی‌متقارن است. میدان الکتریکی حاصل از آن را می‌شود با استفاده از قضیه‌ی گاؤس به دست آورد. در این صورت میدان الکتریکی متناظر با (12) می‌شود

$$
\mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\delta(t)}{r^2}\right] \tag{14}
$$

که به‌وضوح غیرتأخیری است. این نتیجه به پیمانه هم بستگی ندارد. اینجا مشکل آن است که توزیع بار (12) به‌تنهایی چشمه‌ی خوبی نیست. این چشمه معادله‌ی پیوستگی بار

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{15}
$$

را بر نمی‌آورد. پس اگر توزیع باری به شکل (12) داریم، حتماً یک جریان هم لازم داریم. به سادگی دیده می‌شود

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x},t) &= \delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t) &= -\hat{\mathbf{z}}\,\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta'(t) \end{aligned} \tag{16}$$

معادله‌ی پیوستگی را بر می‌آورد. می‌خواهیم با استفاده از پیمانه‌ی کولن، میدان الکتریکی این چشمه را حساب کنیم.

با توجه به معادله‌ی (11)، پتانسیل اسکالر می شود

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{x}',t)\,\mathrm{d}^3x'}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3x'}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid}\,\frac{\partial}{\partial z'}[\delta(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z')] \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\mathrm{d}^3x'}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid}\,\delta(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z') \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\delta(t)}{r}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

برای محاسبه پتانسیل برداری باید معادله دوم (11) را حل کنیم. برای این کار چشمه‌های میدان را به دو قسمت تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_1}{\partial t^2} &= -\hat{\mathbf{z}}\,\frac{4\pi}{c}[-\delta(x)\;\delta(y)\;\delta(z)\;\delta'(t)] \\ \nabla^2\mathbf{A}_2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_2}{\partial t^2} &= \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta(t)}{r} \end{aligned} \tag{18}$$

که در نهایت $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$، و از مؤلفه‌های $\mathbf{A}_1$ فقط A_{1z} غیرصفر است. داریم

$$\begin{aligned} A_{1\,z} &= -\frac{1}{c}\int \delta\left(t'-t+\frac{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid}{c}\right)\,\frac{\delta(\mathbf{x}')\;\delta'(t')}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid}\;dt'\;d^3x' \\ &= \frac{c\,\delta'(r-ct)}{r} \end{aligned} \tag{19}$$

هم‌چنین،

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= -\frac{1}{4\pi c}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\delta\left(t'-t+\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{x}' \mid}\,\frac{\delta(t')}{r'}\;\mathrm{d}t'\;\mathrm{d}^3x' \\ &= -\frac{1}{4\pi c}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\delta\left(t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{r'\;(c\,t)}\;\mathrm{d}^3x' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi c}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\delta(t-u')}{(c^2\,t)\,\left|\mathbf{u}'+\frac{\mathbf{x}}{c}\right|}\;c^3\,\mathrm{d}^3u' \\
&= -\frac{c}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\delta(t-u')}{(c\,t)\max\left(u',\frac{r}{c}\right)}\;4\pi\,u'^2\,\mathrm{d}u' \\
&= -c\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t^2}{ct}\left[\frac{\theta(\frac{r}{c}-t)}{\frac{r}{c}}+\frac{\theta(t-\frac{r}{c})}{t}\right]\right\}\theta(t) \\
&= -\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c\,t}{r}\;\theta(r-ct)+\theta(ct-r)\right]\theta(t) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی، داریم

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial t} \\
&= \hat{\mathbf{z}}\,\frac{c}{r}\delta''(r-ct) \qquad (21) \\
\mathbf{E}_2 &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}_2}{\partial t} \\
&= c\,\nabla\frac{\partial}{\partial z}\,\left[\frac{\partial}{\partial(ct)}\right]^2\left\{\left[\frac{c\,t}{r}\;\theta(r-ct)+\theta(ct-r)\right]\theta(t)\right\} \\
&= -c\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(r-ct)}{r}+c\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(c\,t)}{r} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

سهم مربوط به پتانسیل اسکالر می‌شود

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_3 &= -\nabla\phi \\
&= -\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\delta(t)\right] \qquad (23)
\end{aligned}
$$

این همان $\mathbf{E}_0$ در (14) است. به این ترتیب میدان الکتریکی کل بدست می آید:

$$
\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = -c\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta(r-ct)}{r}+\hat{\mathbf{z}}\frac{c}{r}\delta''(r-ct) \qquad (24)
$$

چنان که انتظار می‌رفت، بستگی زمانی این میدان الکتریکی آنی نیست.

مرجع

[1] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2^{ed} edition, Wiley, 1975, ch. 6.