موج در ریسمانی که از وزنِ آن نتوان صرفنظر کرد

صدیقه بصیرجعفری

در این مقاله می‌خواهیم معادلۀ موجِ ریسمان را در سه حالت زیر بدست آوریم:
۱) ریسمانی که از وزنِ آن صرفنظر شده و بصورت مستقیم بین دو نقطه ثابت شده است.
۲) ریسمانی که بصورت مستقیم در امتداد عمودی بین دو نقطه ثابت شده است.
۳) ریسمانی که بین دو نقطۀ هم ارتفاع آویزان شده است.

۱ مقدمه

معادلۀ موج عرضی در تار مرتعش را در اکثر کتابهای صوت که به این مبحث پرداخته‌اند، می‌توان بصورت $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ یافت که در آن $v = \sqrt{\frac{T_0}{\epsilon_0}}$ سرعت انتشار موج عرضی در تار است. T_0، نیروی کششِ تار و ϵ_0، چگالیِ جِرمیِ تار در حالتِ تعادل است. چنین معادله‌ای با چندین فرضِ ساده کنندۀ مسأ له بدست آمده است که عبارتند از:

۱) از وزن تار صرفنظر شده است.

۲) تار در حالت تعادل به شکل خط مستقیم بین دو نقطۀ هم ارتفاع، محکم‌شده است[1].

۳) تار فقط در یک صفحه در حال ارتعاش است[2].

۴) دامنۀ ارتعاش، کوچک است.

۵) کششِ تار در طیِ ارتعاش چندان تغییر نمی‌کند. در واقع این تغییر در مقایسه با مقدارِ متوسطِ کششِ تار (یعنی مقدار کشش در غیابِ موج) خیلی کوچک است [۱].

---

[1] به شکلِ خط مستقیم بودنِ تار، مستلزمِ صرفنظر از وزن آن است.

[2] البته به دلیلِ اصلِ برهم‌نهی، این فرض از کلیّتِ مسأله نمی‌کاهد چون پس از آن که معلوم شد تار، وجه‌های نوسانِ عرضی دارد می‌توان با برهم‌نهیِ دو وجه عرضیِ عمود بر هم، حالتِ کلیِ مسأله را نیز حل کرد.

دراینجا می‌خواهیم ابتدا معادلهٔ موجِ ریسمانی را که از وزنش صرفنظر کرده‌ایم و در حالت تعادل به شکل خط مستقیم بین دو نقطهٔ هم ارتفاع محکم شده است، بدست آوریم. آنگاه معادلهٔ موجِ ریسمانی را که این بار از وزنش صرفنظر نشده و در حالت تعادل بطور قائم بین دو نقطه ثابت شده باشد، بدست آوریم. و در نهایت معادلهٔ موج همین ریسمان را در حالتی که بین دو نقطهٔ هم ارتفاع آویزان است، محاسبه کنیم. در حقیقت مسأ لهٔ واقعی‌ای که در نوسانات ریسمانهای آویزان (نظیرِ بندهای رخت، زنجیرها، خطوط تلفن و خطوط انتقال برق) با آن روبرو هستیم، همین موردِ آخر است که در آن ریسمانی که جرمِ واحد طولِ ثابت دارد وقتی که بینِ دو نقطهٔ هم‌ارتفاع آویزان شده باشد به شکلِ $z = a\left[\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right]$ در می‌آید که به آن، « خَمِ زنجیری » گویند. معادله‌ای که در اینجا برای این خَم نوشتیم در حالتی است که محور x را « هادیِ خمِ زنجیری » در نظر بگیریم و مبدأ مختصات در نقطهٔ می‌نیممِ هادی باشد. که در آن، ثابت a نسبتِ کششِ افقی به وزنِ واحدِ طولِ ریسمان است و آن را « پارامترِ هادی » می‌نامیم، که a از جنسِ طول است[۲].

۲ ریسمانِ بدونِ وزنی که بطور مستقیم، دو سر بسته است

ریسمانِ بدونِ وزنی را در نظر بگیرید که در امتداد محورِ x روی یک خط مستقیم بین دو نقطه بسته شده است. از توصیفِ لاگرانژی استفاده می‌کنیم. در این توصیف برای بررسیِ حرکتِ ریسمان، نقاط آنرا برچسب می‌گذاریم و حرکتِ آن نقاط را دنبال می‌کنیم و بنابراین مختصهٔ نقاط ریسمان عوض نمی‌شود. در این مسأله نقاط رویِ ریسمان را با σ برچسب می‌گذاریم. دستگاهِ مختصاتی را نیز کنارِ ریسمان در فضای سه بعدی در نظر می‌گیریم که مستقل از ریسمان است و محور x اش در امتدادِ طولِ ریسمان، یعنی در جهت محورِ σ قرار دارد. لذا در اینجا $x(\sigma) = \sigma$ است. می‌خواهیم حرکتِ عنصری از ریسمان به طولِ dx را بررسی کنیم. جرمِ واحد طولِ این عنصر ϵ_0 است و بردارِ مکانش $\mathbf{R}_0 = (\sigma, 0, 0)$. وقتی ریسمان را به نوسان در آوریم، بردارِ مکانِ آن در توصیفِ لاگرانژی خواهد شد:

$$\mathbf{R} = (\sigma + \xi, \eta, \zeta). \tag{1}$$

در نتیجه

$$\delta\mathbf{R} = \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right| d\sigma. \tag{2}$$

لذا تغییرِ طولِ عنصر dx از ریسمان در نتیجهٔ نوسان برابر است با:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right| d\sigma - dx, \tag{3}$$

که اگر تغییر طول نسبیِ این عنصر را محاسبه کنیم، برابر است با:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right| \frac{d\sigma}{dx} - 1 = \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right| - 1. \tag{4}$$

وقتی که هنوز ریسمان را به نوسان در نیاورده بودیم، طولِ عنصری از ریسمان را که بررسی می‌کردیم dx و جرمِ واحد طولش ϵ_0 بود حالا که در اثر نوسان، طول آن عنصر به $d\sigma \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right|$ تغییر پیدا کرده جرمِ واحد طولش نیز عوض می‌شود و فرضاً ϵ خواهد شد که رابطهٔ ϵ با ϵ_0 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\epsilon_0 \, dx = \epsilon \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right| d\sigma \,, \tag{5}$$

$$\epsilon_0 = \epsilon \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right| \frac{d\sigma}{dx} \,, \tag{6}$$

$$\epsilon_0 = \epsilon \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right| \,, \tag{7}$$

در نتیجه

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right|} \,. \tag{8}$$

نیروی کششِ وارد بر ریسمان در حالتِ تعادل، در طول آن تغییری نمی‌کند یعنی به x بستگی ندارد و عبارتست از:

$$T_0 := Q\, A\, \frac{\triangle l}{l_0} \,, \tag{9}$$

که در این رابطه، Q مُدولِ یانگ، A سطح مقطعِ ریسمان، $\triangle l$ تغییر طول عنصر و l_0 طول عنصر در حال تعادل است. هنگام نوسان، علاوه بر تغییر جهت، اندازهٔ این نیرو نیز در طول ریسمان تغییر می‌کند. همانطور که دیدیم وقتی ریسمان را به نوسان در آوریم، تغییر طول نسبیِ عنصر dx از ریسمان خواهد شد: $\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right| - 1$ و بنابراین نیروی کششِ ریسمان در حین نوسان را بصورتِ

$$T = T_0 + Q\, A \left(\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right| - 1\right) \,, \tag{10}$$

می‌نویسیم و در این شرط صدق می‌کند که در حالت تعادل، $\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\right| = 1$ و بنابراین $T = T_0$ خواهد شد.

بردار یکهٔ مماس بر ریسمان را با عبارت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{s}} := \frac{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}}{\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right|} \,. \tag{11}$$

قانون دوم نیوتن را در توصیف لاگرانژی برای عنصر $d\sigma$ از ریسمان می‌نویسیم:

$$\epsilon_0 \, d\sigma \, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(T \, \hat{\mathbf{s}} \right) d\sigma \; , \tag{12}$$

$$\epsilon_0 \, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{s}} \, \frac{\partial T}{\partial \sigma} + T \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} \; , \tag{13}$$

با جایگذاریِ T در این رابطه داریم:

$$\epsilon_0 \, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{s}} \, \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} + \hat{\mathbf{s}} \frac{Q \, A}{\epsilon_0} \, \frac{\partial}{\partial \sigma} \, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right| + \left(\frac{T_0}{\epsilon_0} - \frac{Q \, A}{\epsilon_0} \right) \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} + \frac{Q \, A}{\epsilon_0} \, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right| \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} \; , \tag{14}$$

$\frac{\partial T_0}{\partial \sigma} = 0$ و از تعریفِ $\hat{\mathbf{s}}$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right| \, \hat{\mathbf{s}} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} - \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right| \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} \; , \tag{15}$$

با جایگذاریِ این عبارت و تعاریفِ

$$c_l{}^2 := \frac{QA}{\epsilon_0}, \qquad\qquad c_t{}^2 := \frac{T_0}{\epsilon_0}, \tag{16}$$

در معادلهٔ (14) داریم:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = c_l{}^2 \, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} + \left(c_t{}^2 - c_l{}^2 \right) \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma}. \tag{17}$$

که این معادلهٔ موجِ ریسمانِ بدونِ وزنی است که بین دو نقطه بسته شده است[۱]. مشاهده می‌شود که این معادله با معادلهٔ موجِ عرضیِ تارِ مرتعش $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$ که در آن v همان سرعت موج عرضیِ تار (یعنی c_t) است فرق دارد. این معادله شکل پیچیده ای دارد که هم سرعت موج عرضی و هم سرعت موج طولی در آن ظاهر شده است. برای ملموس تر شدنِ این معادله، سعی می‌کنیم یک نوسان کوچک را در ریسمان در نظر بگیریم و معادلات موج طولی و عرضی را در تقریبهایی از هم جدا کنیم. بنابراین $\mathbf{R} = (\sigma + \xi, \; \eta, \; \zeta)$ را در معادلهٔ موجِ (17) جایگذاری می‌کنیم. با جایگذاری $\mathbf{R}$ در تعریفِ $\hat{\mathbf{s}}$ داریم:

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}, \; \frac{\partial \eta}{\partial \sigma}, \; \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right)^2}} \; . \tag{18}$$

با بسطِ دو جمله‌ایِ مخرجِ کسر و در تقریبی که در آن تنها جملاتِ رتبهٔ اولِ مشتق را نگه داریم، $\hat{\mathbf{s}}$ خواهد شد:

$$\hat{\mathbf{s}} \simeq \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\right) \left[1 - \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\right] . \tag{19}$$

که اگر در محاسبهٔ این حاصلضرب، از جملات رتبهٔ بالاتر صرفنظر کنیم

$$\hat{\mathbf{s}} \simeq \left(1,\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\right) . \tag{20}$$

مشتقِ مرتبهٔ اولِ $\hat{\mathbf{s}}$ نسبت به مکان عبارتست از

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} = \left(0,\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2},\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \sigma^2}\right) . \tag{21}$$

مشتقِ مرتبهٔ اولِ $\mathbf{R}$ نسبت به زمان برابراست با

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t},\ \frac{\partial \eta}{\partial t},\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) . \tag{22}$$

مشتقِ مرتبهٔ دومِ این عبارت نسبت به زمان برابراست با

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) . \tag{23}$$

مشتقِ مرتبهٔ دومِ $\mathbf{R}$ نسبت به مکان عبارتست از

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2},\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2},\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \sigma^2}\right) . \tag{24}$$

با جایگذاریِ روابطِ $\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma}$، $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2}$ و $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2}$ در معادلهٔ موجِ (17) و جدا کردنِ مؤلفه‌های مکانیِ x، y و z به سه معادلهٔ موج می‌رسیم که عبارتند از:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = {c_l}^2 \, \frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2} , \tag{25}$$

که معادلهٔ موجِ طولیِ ریسمان، در جهتِ محور x است. یعنی اگر ریسمان را در امتداد محور x بین دو نقطه بسته باشیم و به سطح مقطع آن در جهت طولِ ریسمان، ضربه ای وارد کنیم (آنرا مثل فنری تصور کنید که در جهت طولش منقبض و منبسط می‌شود) و سبب ارتعاشی طولی در آن شویم این ارتعاش تحتِ چنین معادلهٔ موجی با سرعت c_l در طول ریسمان منتشر می‌شود.

یکی دیگر از معادلات عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = {c_t}^2 \, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2} , \tag{26}$$

که این معادلهٔ موجِ عرضیِ ریسمان، در جهتِ محور y است. یعنی اگر ریسمان را در امتداد محور x بین دو نقطه بسته باشیم و سپس به نقطه ای از ریسمان در جهت y ضربه ای وارد کنیم و آن را مرتعش سازیم موجِ عرضی ای در ریسمان در صفحهٔ xy با سرعت c_t منتشر می‌شود.

و آخرین معادله عبارتست از

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = {c_t}^2\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\sigma^2}\,, \tag{27}$$

که این معادلهٔ موجِ عرضیِ ریسمان، در جهتِ محور z است. یعنی اگر ریسمان را در امتداد محور x بین دو نقطه بسته باشیم و سپس به نقطه ای از ریسمان در جهت z ضربه ای وارد کنیم و آن را مرتعش سازیم موجِ عرضی ای در ریسمان در صفحهٔ xz با سرعت c_t منتشر می‌شود.

به این ترتیب مشاهده می‌شود که از معادلهٔ موجِ پیچیدهٔ (17) که واضح نبود چرا هر دو سرعتِ موجِ عرضی و طولی در آن ظاهر شده، در مرتبه‌هایی از تقریب که بتوان دامنهٔ نوسانها را خیلی کوچک در نظر گرفت می‌توان معادلاتِ ساده و آشنایِ موجِ عرضی و موجِ طولی را جداگانه استخراج کرد ولی در مواردی که دامنهٔ نوسانها، کوچک نباشد این دو معادله بصورتِ جفت شده در معادلهٔ (17) ظاهر می‌شوند.

۳ ریسمانِ وزنداری که بصورت عمودی، دو سر بسته است

حالا می‌خواهیم معادلهٔ موج ریسمانِ وزنداری را که بطور قائم در امتداد محور z بین دو نقطه بسته شده است، بدست آوریم. در این حالت نیز از توصیف لاگرانژی برای بررسیِ حرکت ریسمانِ مرتعش استفاده می‌کنیم. نقاط روی ریسمان را با σ برچسب گذاری می‌کنیم و در اینجا $z(\sigma) = \sigma$. در این بخش، جهتِ محورِ z را، همچون جهتِ برچسب‌گذاری σ، رو به پایین در نظر می‌گیریم. اگر طول آزادِ ریسمانِ قائم در حالتی که آنرا بی وزن در نظر می‌گیریم (مثل حالتیکه ریسمان را روی میز قرار داده ایم و در نتیجه وزن آن بی اهمیت است.)، L_0 باشد و جهت محورِ σ را رو به پایین فرض کنیم، بالاترین نقطهٔ ریسمان را با $\sigma = 0$ و پایینترین نقطه اش را با $\sigma = L_0$ و بقیهٔ نقاط ریسمان را نیز با σ های مختلف برچسب می‌گذاریم. در این حالت جرمِ واحد طولِ ریسمان را ϵ_0 در نظر می‌گیریم. اگر دستگاه مختصاتی را کنارِ این ریسمان در فضای سه بعدی در نظر بگیریم که مستقل از ریسمان است و محور z از این دستگاه مختصات را در جهت محورِ σ فرض کنیم می‌خواهیم حرکت عنصری از ریسمان به طول آزادِ $d\sigma$ (طول آزاد یعنی ریسمان را بی وزن فرض کنیم مثلاً آن را روی میز قرار دهیم و طولش را اندازه بگیریم.) را بررسی کنیم. طول اولیهٔ این عنصر در صورتیکه وزنِ ریسمان را نیز در نظر بگیریم، dz است و اگر مختصات نقاط ریسمان را از روی محور z بخوانیم بدین صورت است که مختصهٔ بالاترین نقطهٔ ریسمان، $z = 0$ است و مختصهٔ پایینترین نقطهٔ آن، $z = L$ است یعنی در حالتیکه ریسمان را روی میز قرار داده بودیم که در نتیجه وزندار بودن یا نبودنش بی اهمیت بود و طولِ آزادش را اندازه گرفته بودیم،

$\sigma = L_0$ بود و وقتیکه ریسمان را بطور قائم آویزان کردیم در نتیجهٔ تأثیرِ وزنش، تغییرِ طول می‌دهد و پایینترین نقطهٔ ریسمان که با برچسبِ $\sigma = L_0$ مشخص کرده بودیم، مختصاتش از روی دستگاه مختصاتِ فضا $z = L$ است و مختصهٔ z تابعی از σ است که البته در اینجا $z(\sigma) = \sigma$. بردار مکانِ عنصرِ dz در توصیف لاگرانژی، $\mathbf{R}_0 = (0, 0, \sigma)$ است و اگر جرمِ حالتِ آزادش $\epsilon_0\, d\sigma$ بوده حالا که ریسمان را آویزان کردیم، جرمش $\epsilon(z)\, dz$ است که البته طبق قانونِ بقای جرم

$$\epsilon(z)\, dz = \epsilon_0\, d\sigma \ , \tag{28}$$

و در نتیجه

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 \, \frac{d\sigma}{dz} \ , \tag{29}$$

که در پایینترین نقطهٔ ریسمان که هیچ کشیدگی ای ندارد یعنی در برچسبِ $\sigma = L_0$ یا مختصهٔ $z = L$، $\frac{d\sigma}{dz} = 1$ است و جرمِ واحد طولِ پایینترین عنصرِ ریسمان، همان ϵ_0 است. بنابراین جرمِ واحد طولِ نقاط مختلفِ ریسمان فرق می‌کند. اگر این ریسمان را به نوسان در آوریم بردار مکانِ عنصرِ dz در توصیفِ لاگرانژی خواهد شد: $\mathbf{R} = (\xi, \eta, \sigma + \zeta)$ و در نتیجه

$$\delta \mathbf{R} = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} \right| \, d\sigma \ . \tag{30}$$

لذا تغییرِ طولِ عنصر dz از ریسمان در نتیجهٔ نوسان برابر است با:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} \right| \, d\sigma - dz \ , \tag{31}$$

که اگر تغییر طول نسبیِ این عنصر را محاسبه کنیم، برابر است با:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} \right| \, \frac{d\sigma}{dz} - 1 = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right| - 1 \ . \tag{32}$$

وقتی که هنوز ریسمان را به نوسان در نیاورده بودیم، طولِ عنصری از ریسمان را که بررسی می‌کردیم dz و جرمِ واحد طولش ϵ بود حالا که در اثر نوسان، طول آن عنصر به $\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} \right| d\sigma$ تغییر پیدا کرده جرمِ واحد طولش نیز عوض می‌شود و فرضاً ε خواهد شد که رابطهٔ ε با ϵ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\epsilon\, dz = \varepsilon \, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} \right| \, d\sigma \ , \tag{33}$$

$$\epsilon = \varepsilon \, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} \right| \, \frac{d\sigma}{dz} \ , \tag{34}$$

$$\epsilon = \varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right| \ , \tag{35}$$

در نتیجه

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right|} \ . \tag{36}$$

نیروی کششِ وارد بر ریسمان در بالاترین نقطه ای که با برچسبِ $\sigma = 0$ می‌شناسیم، عبارتست از:

$$T_0 \left(\sigma = 0 \right) = L_0 \, \epsilon_0 \, g \ . \tag{37}$$

اگر قانونِ دومِ نیوتن را برای نیروهای وارد بر عنصرِ dz که بالاترین نقطه اش با برچسبِ σ و پایینترین نقطه اش با برچسبِ $\sigma + d\sigma$ مشخص می‌شود و جرمش $\epsilon_0 \, d\sigma$ است بنویسیم:

$$g \, \epsilon_0 \, d\sigma + T_0(\sigma + d\sigma) - T_0(\sigma) = 0, \tag{38}$$

$$g \, \epsilon_0 \, d\sigma + \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} \, d\sigma = 0, \tag{39}$$

$$g \, \epsilon_0 = - \, \frac{\partial T_0}{\partial \sigma}, \tag{40}$$

در نتیجه

$$T_0 = - \, g \, \epsilon_0 \sigma + T_0 (\sigma = 0). \tag{41}$$

بنابراین نیروی کششِ ریسمانی که آنرا بطور قائم آویزان کرده ایم و بین دو نقطه بسته ایم در حال تعادل، در طول ریسمان متغیر است و برابر است با:

$$T_0 = - \, g \, \epsilon_0 \sigma + L_0 \, \epsilon_0 \, g, \tag{42}$$

$$T_0 = L_0 \, \epsilon_0 \, g \left(1 - \frac{\sigma}{L_0} \right) . \tag{43}$$

همانطور که دیدیم وقتی ریسمان را به نوسان در آوریم، تغییر طولِ نسبیِ عنصرِ dz از ریسمان خواهد شد: $\left| \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right| - 1$ و بنابراین نیروی کششِ ریسمان در حین نوسان را بصورتِ

$$T = L_0 \, \epsilon_0 \, g \left(1 - \frac{\sigma}{L_0} \right) + Q \, A \left(\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right| - 1 \right) \ , \tag{44}$$

یا به عبارتی بصورتِ

$$T = T_0 + Q \, A \left(\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \right| - 1 \right) \ , \tag{45}$$

می‌نویسیم و در این شرط صدق می‌کند که در حالتِ تعادل، $\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}\right| = 1$ و بنابراین $T = T_0 = L_0\, \epsilon_0\, g \left(1 - \frac{\sigma}{L_0}\right)$ خواهد شد. بردار یکهٔ مماس بر ریسمان را با عبارتِ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right|}\,. \tag{46}$$

اگر شتابِ گرانشِ زمین g باشد و قانون دومِ نیوتن را در توصیفِ لاگرانژی برای عنصر $d\sigma$ از این ریسمان بنویسیم، داریم:

$$\epsilon_0\, d\sigma\, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(T \hat{\mathbf{s}}\right)\, d\sigma + \epsilon_0\, d\sigma\, g\, \hat{\mathbf{z}}\,. \tag{47}$$

$$\epsilon_0\, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{s}}\, \frac{\partial T}{\partial \sigma} + T\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} + \epsilon_0\, g\, \hat{\mathbf{z}}\,. \tag{48}$$

با جایگذاریِ T در این رابطه به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{s}}\, \frac{1}{\epsilon_0}\, \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} + \hat{\mathbf{s}} \frac{Q\, A}{\epsilon_0}\, \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}\right| + \left(\frac{T_0}{\epsilon_0} - \frac{Q\, A}{\epsilon_0}\right)\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} + \frac{Q\, A}{\epsilon_0}\, \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}\right|\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} - g\, \hat{\mathbf{z}}\,, \tag{49}$$

و از تعریفِ $\hat{\mathbf{s}}$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}\right|\, \hat{\mathbf{s}} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} - \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}\right|\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma}\,. \tag{50}$$

با جایگذاریِ این عبارت و تعاریفِ

$${c_l}^2 := \frac{Q A}{\epsilon_0}, \qquad {c_t}^2 := \frac{T_0}{\epsilon_0}, \tag{51}$$

(که ${c_l}^2$، مجذورِ سرعت انتشارِ موج طولی و ${c_t}^2$، مجذور سرعتِ انتشارِ موج عرضی است) در معادلهٔ (49) داریم:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = {c_l}^2\, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} + \left({c_t}^2 - {c_l}^2\right)\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} + g\left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{s}}\right)\,. \tag{52}$$

که این معادلهٔ موجِ ریسمانِ وزندارِ قائمِ دو سر بسته است که باز هم معادلهٔ پیچیده‌ای است که در آن هم سرعتِ موجِ طولی و هم سرعتِ موجِ عرضی ظاهر شده است. برای ملموس تر شدنِ این معادلهٔ به ظاهر پیچیده و استخراجِ معادلهٔ موج طولی و معادلهٔ موج عرضی از آن در تقریبِ نوسانهای بسیار کوچک، $\mathbf{R} = (\xi,\ \eta,\ \sigma + \zeta)$ را در معادلهٔ موجِ (52) جایگذاری کرده و مؤلفه های x، y و z این معادله را جدا می‌کنیم. طبق تعریفِ $\hat{\mathbf{s}}$ داریم:

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + 1\right)^2}}\,. \tag{53}$$

مخرجِ کسر را بسطِ دو جمله‌ای می‌دهیم و با نگه داشتنِ رتبهٔ اولِ مشتق، داریم:

$$\hat{\mathbf{s}} \simeq \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma},\ 1\right)\,. \tag{54}$$

و مشتقِ مکانیِ مرتبهٔ اولِ $\hat{\mathbf{s}}$ عبارتست از

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2},\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2},\ 0\right)\,. \tag{55}$$

مشتقِ مرتبهٔ اولِ $\mathbf{R}$ نسبت به زمان برابراست با

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t},\ \frac{\partial \eta}{\partial t},\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\,. \tag{56}$$

مشتقِ مرتبهٔ دومِ این عبارت نسبت به زمان برابراست با

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\,. \tag{57}$$

مشتقِ مرتبهٔ دومِ $\mathbf{R}$ نسبت به مکان عبارتست از

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2},\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2},\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \sigma^2}\right)\,. \tag{58}$$

با جایگذاریِ روابطِ $\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma}$، $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2}$ و $\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2}$ در معادلهٔ موجِ (52) و جدا کردنِ مؤلفه‌های مکانیِ x، y و z به سه معادلهٔ موج می‌رسیم که عبارتند از:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = {c_t}^2\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2} - g\, \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\,, \tag{59}$$

که معادلهٔ موجِ عرضیِ ریسمان، در جهتِ محور x است. یعنی اگر ریسمان را در امتداد محور z بین دو نقطه بسته باشیم و به آن در جهت x، ضربه ای وارد کنیم سبب ارتعاشی عرضی در آن می‌شویم که این ارتعاش تحتِ چنین معادلهٔ موجی با سرعت c_t در صفحهٔ xz منتشر می‌شود. مشاهده می‌شود که اگر از اثر نیروی وزن صرفنظر کنیم (یعنی $g = 0$) به همان شکلِ سادهٔ معادلهٔ موج عرضی می‌رسیم. یکی دیگر از معادلات عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = {c_t}^2\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \sigma^2} - g\, \frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\,, \tag{60}$$

که معادلهٔ موجِ عرضیِ ریسمان، در جهتِ محور y است. یعنی اگر ریسمان را در امتداد محور z بین دو نقطه بسته باشیم و به آن در جهت y، ضربه ای وارد کنیم سبب ارتعاشی عرضی در آن می‌شویم که این

ارتعاش تحتِ چنین معادلهٔ موجی با سرعت c_t در صفحهٔ yz منتشر می‌شود. در اینجا نیز مشاهده می‌شود که اگر از اثر نیروی وزن صرفنظر کنیم (یعنی $g=0$) به همان شکلِ سادهٔ معادلهٔ موج عرضی می‌رسیم. و آخرین معادله عبارتست از

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = {c_l}^2\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \sigma^2}\,, \tag{61}$$

که این معادلهٔ موجِ عرضیِ ریسمان، در جهتِ محور z است. یعنی اگر ریسمان را در امتداد محور z بین دو نقطه بسته باشیم و سپس به سطح مقطعِ ریسمان در جهت z ضربه ای وارد کنیم و آن را مرتعش سازیم موجِ طولی ای در امتدادِ ریسمان با سرعت c_l منتشر می‌شود.

به این ترتیب توانستیم در مرتبه‌هایی از تقریب که دامنهٔ نوسانها خیلی کوچک است، معادلهٔ موجِ عرضی و معادلهٔ موجِ طولی را از معادلهٔ موجِ به ظاهر پیچیدهٔ (52) استخراج کنیم ولی در مواردی که دامنهٔ نوسانها کوچک نباشد این دو معادله بصورتِ جفت شده در معادلهٔ (52) ظاهر می‌شوند.

۴ ریسمانِ وزندارِ آویزان به شکل خَم زنجیری

حالا می‌خواهیم معادلهٔ موج ریسمانِ وزنداری را که به شکل خَمِ زنجیری بین دو نقطهٔ هم ارتفاع در صفحهٔ xz آویزان است محاسبه کنیم. در این بخش، جهتِ محورِ z را رو به بالا می‌گیریم. در این حالت نیز از توصیف لاگرانژی برای بررسیِ حرکت ریسمانِ مرتعش استفاده می‌کنیم. یعنی در حالتیکه ریسمان را روی میز قرار داده ایم و در نتیجه وزنش بی اهمیت است، نقاط مختلفِ روی ریسمان را با برچسبهای σ مشخص می‌کنیم و حرکات این نقاط را دنبال می‌کنیم. در این حالت جرمِ واحد طولِ ریسمان، ϵ_0 است. x و z تابعی از σ هستند یعنی $x(\sigma)$ و $z(\sigma)$ داریم. حالا این ریسمان را بین دو نقطهٔ هم ارتفاع آویزان می‌کنیم که در این حالت معادلهٔ خَمِ ریسمان، همان معادلهٔ خَمِ زنجیری یا به عبارتی معادلهٔ $z = a\left[\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right) - 1\right]$ است. در حالت تعادل که هنوز ریسمان را مرتعش نساخته ایم، جرمِ واحد طولش به واسطهٔ تأثیر نیروی وزن، در طولِ ریسمان متغیر است. می‌خواهیم حرکت عنصری از ریسمان به طول آزادِ $d\sigma$ (طول آزاد یعنی ریسمان را بدون وزن فرض کنیم.) را بررسی کنیم. طول اولیهٔ این عنصر در صورتیکه ریسمان را بین دو نقطهٔ هم ارتفاع آویزان کنیم به واسطهٔ تأثیر نیروی وزن، ds خواهد شد. بردارِ مکانِ عنصرِ ds در توصیف لاگرانژی، $\mathbf{R}_0 = (x(\sigma), 0, z(\sigma))$ است و اگر جرمِ حالتِ آزادش $\epsilon_0\, d\sigma$ بوده حالا که ریسمان را آویزان کردیم، جرمش $\epsilon(s)\, ds$ است که البته طبق قانون بقای جرم

$$\epsilon(s)\, ds = \epsilon_0\, d\sigma\ , \tag{62}$$

و در نتیجه

$$\epsilon(s) = \epsilon_0 \, \frac{d\sigma}{ds}, \tag{63}$$

بنابراین در حالتی که ریسمان را آویزان می‌کنیم جرمِ واحد طولِ نقاط مختلفش فرق می‌کند. اگر این ریسمان را به نوسان در آوریم بردارِ مکانِ عنصرِ ds در توصیفِ لاگرانژی خواهد شد:

$$\mathbf{R} = (x(\sigma) + \xi, \eta, z(\sigma) + \zeta) \tag{64}$$

و در نتیجه

$$\delta\mathbf{R} = \left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma}\right| \, d\sigma \; . \tag{65}$$

لذا تغییرِ طولِ عنصر ds از ریسمان در نتیجهٔ نوسان برابر است با:

$$\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma}\right| \, d\sigma - ds \; , \tag{66}$$

که اگر تغییر طول نسبیِ این عنصر را محاسبه کنیم، برابر است با:

$$\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma}\right| \, \frac{d\sigma}{ds} - 1 = \left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}\right| - 1 \; . \tag{67}$$

وقتی که هنوز ریسمان را به نوسان در نیاورده بودیم، طولِ عنصری از ریسمان را که بررسی می‌کردیم ds و جرمِ واحد طولش ϵ بود حالا که در اثر نوسان، طول آن عنصر به $\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma}\right| \, d\sigma$ تغییر پیدا کرده جرمِ واحد طولش نیز عوض می‌شود و فرضاً ε خواهد شد که رابطهٔ ε با ϵ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\epsilon \, ds = \varepsilon \, \left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma}\right| \, d\sigma \; , \tag{68}$$

$$\epsilon = \varepsilon \, \left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma}\right| \, \frac{d\sigma}{ds} \; , \tag{69}$$

$$\epsilon = \varepsilon \, \left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}\right| \; , \tag{70}$$

در نتیجه

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial s}\right|} \; . \tag{71}$$

نیروی وزنِ وارد بر عناصرِ این ریسمان، باعث تغییرِ نیروی کشش در طولِ آن در حالتِ تعادل می‌شود. اگر قانون دومِ نیوتن را برای عنصری از ریسمانِ در حالِ تعادل بنویسیم $T_{2x} - T_{1x} = 0$ در نتیجه مؤلفهٔ

افقیِ نیرویِ کشش در طولِ کابل ثابت است ولی $T_{2z} - T_{1z} + \epsilon_0\, ds\, g = 0$ و در نتیجه مؤلفهٔ عمودیِ نیرویِ کشش در طولِ ریسمان ثابت نیست. پس می‌توانیم بگوییم که در حالت تعادل، T_0 به z بستگی دارد و از x مستقل است.(همچنین از y نیز مستقل است چون اصلاً ریسمان در صفحهٔ xz قرار دارد.)

همانطور که دیدیم وقتی ریسمان را به نوسان در آوریم، تغییر طولِ نسبیِ عنصرِ ds از ریسمان خواهد شد: $\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\right| - 1$ و بنابراین نیروی کششِ ریسمان در حین نوسان را بصورتِ

$$T = T_0 + Q\, A \left(\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right| - 1 \right) \ , \tag{72}$$

می‌نویسیم که T_0 نیروی کششِ ریسمان در حالت تعادل است که به واسطهٔ اثر نیروی وزن، در طول ریسمان متغیر است و به σ بستگی دارد. T در این شرط صدق می‌کند که در حالتِ تعادل، $\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\right| = 1$ و بنابراین $T = T_0$ خواهد شد. بردار یکهٔ مماس بر ریسمان را با عبارتِ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}}{\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\right|} \,. \tag{73}$$

اگر شتابِ گرانشِ زمین g باشد و قانون دومِ نیوتن را در توصیفِ لاگرانژی برای عنصر $d\sigma$ از این ریسمان بنویسیم، داریم:

$$\epsilon_0\, d\sigma\, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(T \hat{\mathbf{s}} \right)\, d\sigma - \epsilon_0\, d\sigma\, g\, \hat{\mathbf{z}} \,. \tag{74}$$

$$\epsilon_0\, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{s}}\, \frac{\partial T}{\partial \sigma} + T\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} - \epsilon_0\, g\, \hat{\mathbf{z}} \,. \tag{75}$$

با جایگذاریِ T در این رابطه به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{s}}\, \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} + \hat{\mathbf{s}} \frac{Q\, A}{\epsilon_0}\, \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right| + \left(\frac{T_0}{\epsilon_0} - \frac{Q\, A}{\epsilon_0} \right)\, \frac{d\hat{\mathbf{s}}}{d\sigma} + \frac{Q\, A}{\epsilon_0}\, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right|\, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} - \, g\, \hat{\mathbf{z}} \ , \tag{76}$$

از تعریفِ $\hat{\mathbf{s}}$ داریم:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma}\, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right| + \hat{\mathbf{s}}\, \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right| = \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right) \,. \tag{77}$$

$$\hat{\mathbf{s}}\, \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right| = \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right) - \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma}\, \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \right| \,. \tag{78}$$

با جایگذاریِ این عبارت و تعاریفِ

$$c_l{}^2 := \frac{QA}{\epsilon_0}, \qquad\qquad c_t{}^2 := \frac{T_0}{\epsilon_0}, \tag{79}$$

(که $c_l{}^2$، مجذورِ سرعت انتشارِ موج طولی و $c_t{}^2$، مجذور سرعتِ انتشارِ موج عرضی است) در معادلهٔ (76) داریم:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = c_l{}^2 \, \frac{\partial}{\partial \sigma} \, \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\right) + \left(c_t{}^2 - c_l{}^2\right) \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} - \left(g \, \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\epsilon_0} \, \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} \, \hat{\mathbf{s}}\right) \; . \tag{80}$$

از رابطهٔ (62) داریم

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon(s)} \tag{81}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\epsilon(s)}{\epsilon_0} \, \frac{\partial}{\partial \sigma} \tag{82}$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \, \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}\right) = \frac{\epsilon(s)}{\epsilon_0} \, \frac{\partial}{\partial \sigma} \, \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma}\right) = \frac{\epsilon(s)}{\epsilon_0} \, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} \; . \tag{83}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = c_l{}^2 \, \frac{\epsilon(s)}{\epsilon_0} \, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \sigma^2} + \left(c_t{}^2 - c_l{}^2\right) \, \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \sigma} + \left(g \, \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{\epsilon_0} \, \frac{\partial T_0}{\partial \sigma} \, \hat{\mathbf{s}}\right) \; . \tag{84}$$

که این معادلهٔ موجِ ریسمانِ وزنداری است که به شکل خَمِ زنجیری بینِ دو نقطهٔ هم ارتفاع بسته شده است که باز هم معادلهٔ پیچیده‌ای است و در آن هم سرعتِ موجِ طولی و هم سرعتِ موجِ عرضی ظاهر شده است.

قدردانی

از آقای دکتر احمدِ شریعتی و آقای دکتر محمّدِ خرّمی به خاطر راهنماییهای ارزنده‌شان سپاسگزاری می‌کنم.

مراجع

[1] Philip M. Morse, K. Uno Ingard: *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, 1968, pp. 97–99, 857–858.

[2] George B. Thomas, Ross L. Finney: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, 8th Edition, 1992, pp. 468–471.