محاسبه‌ی دقیق عبور موج الکترومغناطیسی از محیط چپ‌گرد $n = \tanh x$ در فرود عمودی

آناهیتا آبادپور

گروه فیزیک، دانش‌گاه الزهرا

محیطی در نظر می‌گریم که گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی آن به صورت $\epsilon = \mu = \tanh(x)$ باشد. برای چنین محیطی ضریب‌شکست در $x < 0$ منفی و در $x > 0$ مثبت است. موج الکترومغناطیسی‌ای در نظر می‌گیریم که در $x \ll 0$ تخت باشد و در امتداد مثبت x حرکت کند. برای چنین موجی معادله‌های ماکسول را دقیقاً حل می‌کنیم، و می‌بینیم ضریب بازتاب صفر است.

۱ مقدمه

ماده‌ی چپ‌گرد اصطلاحاً یعنی ماده‌ای که هم‌زمان گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی آن منفی باشد. نخستین بار ویکتور وِسِلاگو [a] در مقاله‌ای در سال ۱۹۶۸ نتایج برخورد امواج الکترومغناطیس با چنین موادی را بررسی کرد [۱]. وِسِلاگو در آن زمان پیش‌بینی کرد که اوّلاً چنین موادی می‌توانند وجود داشته باشند، و ثانیاً اگر پیدا شوند خواص جالبی خواهند داشت که مهمترین آنها منفی بودن ضریب شکست شان است. ضریب‌شکست در محیط‌های معمولی (راست‌گرد) به شکل $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ تعریف می‌شود. از این تعریف واضح نیست که چرا وقتی گذردهی و تراوایی هر دو منفی باشند ضریب‌شکست هم منفی می‌شود. این نکته‌ای ظریف است که وِسِلاگو متوجّه آن شده است. این مواد را چپ‌گرد می‌نامند، چون بردار موج در این مواد خلاف جهت حاصل ضرب برداری میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی (بردار پویینتینگ) است. یعنی انتشار صفحه‌های فازثابت در خلاف جهت انتشار انرژی است. نمونه آزمایشگاهی این مواد در سالهای ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ برای طول‌موج‌های حدود $10\,\mathrm{cm}$ (میکروموج) ساخته و آزمایش شد [۲]، و اخیراً هم موادی که در گستره‌ی پرتوهای مرئی چپ‌گرد اند ساخته شده است [۳].

یکی از خواص جالب مواد چپ‌گرد این است که تیغه‌ی متوازی السطوح ساخته شده از ماده‌ی چپ‌گرد مثل عدسی محدّب پرتوهای نور را هم‌گرا (کانونی) می‌کند. این خاصیت باعث می‌شود بتوان در تصویربرداری بر حد پراش غلبه کرد [۴]. یک نکته‌ی مهم دیگر این است که وقتی امواج الکترومغناطیسی به صورت عمودی به چنین محیطی بتابند ضریب بازتاب از سطح جدا کننده دو محیط صفر خواهد بود [۴]، در حالی که برای دو محیط با ضرایب شکست مثبت متفاوت، حتی در حالت فرود عمودی نیز چنین خاصیتی نداریم.

در این نوشته می‌خواهیم معادلات ماکسول را در محیطی که در آن $\epsilon = \mu = \tanh x$ است حل کنیم؛ در چنین محیطی داریم $n = \tanh x$، که یعنی در $x < 0$ محیط چپ‌گرد است.[1] حل معادلات ماکسول در این محیط به دلیل صفر شدن ϵ و μ ساده نیست. همان طور که در ادامه خواهیم دید، مشکل این جا است که در معادلات عباراتی به صورت $\nabla \ln|\epsilon|$ و $\nabla \ln|\mu|$ ظاهر می‌شوند. تابع $\ln|x|$ در حد $x \to 0$ واگرا است.

۲ موج در محیط‌های ناهمگن

در این بخش معادله‌های موج الکترومغناطیسی در محیط‌های ناهمگن را مرور می‌کنیم. ره‌یافتی که انتخاب می‌کنیم ره‌یافتی است که بورن و ولف در کتاب معروف شان انتخاب کرده اند [۵]. اگر بار و جریانی در محیط نباشد، معادله‌های ماکسول ـ در واحدهای cgs ـ به شکل زیر خواهند بود.

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

هنگامی که ϵ و μ تابع مکان باشند معادلات موج متعارف که برای مولفه‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ بدست می‌آیند شکل دیگری خواهند داشت. معادله اول را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} = 0 \tag{5}$$

[1] واضح است که باید بگوییم $\tanh\left(\frac{x}{a}\right)$، که در این جا a پارامتری از جنس طول است. برای ساده‌تر شدن فرمول‌ها a را برابر 1 می‌گیریم. در صورت لزوم، می‌توان فرمول‌ها را با تحلیل ابعادی درست کرد.

با توجه به رابطه(2) و این که $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ است، از (4) کرل می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E}\right) + \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0 \tag{6}$$

که می‌دهد

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E}\right) = \frac{1}{\mu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{E} + \nabla\frac{1}{\mu} \times \left(\nabla \times \mathbf{E}\right) \tag{7}$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{\mu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} - \nabla\frac{1}{\mu} \times \left(\nabla \times \mathbf{E}\right) = 0. \tag{8}$$

رابطه‌ی بالا را در μ ضرب می‌کنیم.

$$\nabla^2\mathbf{E} - \nabla\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} + \frac{\nabla\mu}{\mu} \times \left(\nabla \times \mathbf{E}\right) = 0. \tag{9}$$

از آنجا که $\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E}) = 0$ خواهیم داشت:

$$\epsilon\nabla\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\nabla\epsilon = 0 \tag{10}$$

که می‌دهد

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{-1}{\epsilon}\mathbf{E}\nabla\epsilon = -\mathbf{E}\cdot\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} = -\mathbf{E}\cdot\nabla\ln|\epsilon|\,. \tag{11}$$

حالا با استفاده از (11) رابطه‌ی (9) را بازنویسی می‌کنیم.

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} + \nabla(\mathbf{E}\cdot\nabla\ln|\epsilon|) + (\nabla\ln|\mu|) \times (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \tag{12}$$

به همین ترتیب می‌توان رابطه‌ی مشابهی برای $\mathbf{H}$ به صورت زیر نوشت.

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} + \nabla(\mathbf{H}\cdot\nabla\ln|\mu|) + (\nabla\ln|\epsilon|) \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0. \tag{13}$$

۳ موج مجانباً تخت در محیط $n = \tanh x$

محیطی در نظر بگیریم که در آن μ و ϵ به شکل $\tanh x$ باشند. این محیط برای $x \gg 1$ تقریباً خلاء است. انتظار داریم موج‌هایی در این محیط وجود داشته باشد که در $x \gg 1$ همانند موج تخت در خلاء

باشند. اگر بستگی زمانی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{E}$ را به صورت $\exp(\pm i\omega t)$ بگیریم، آن وقت معادله‌های (12) و (13) به شکل زیر در می آیند.

$$\nabla^2\mathbf{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{E}\,\tanh^2 x+\nabla\Big(\mathbf{E}\cdot\nabla\ln|\tanh x|\Big)+(\nabla\ln|\tanh x|)\times(\nabla\times\mathbf{E})=0,\tag{14}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}+\frac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{H}\,\tanh^2 x+\nabla\Big(\mathbf{H}\cdot\nabla\ln|\tanh(x|)\Big)+\nabla\left(\ln|\tanh x|\right)\times(\nabla\times\mathbf{H})=0\tag{15}$$

دیده می‌شود که به دلیل یکی بودن شکل ϵ و μ، معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به $\mathbf{H}$ و $\mathbf{E}$ کاملاً شبیه هم اند. پس کافی است یکی را حل کنیم. با جدا سازی مولفه‌های x، y و z به سه معادله زیر می‌رسیم:

$$\nabla^2E_x+\frac{\omega^2}{c^2}\,E_x\,\tanh^2 x+\frac{2}{\sinh(2\,x)}\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{4E_x\cosh(2x)}{\sinh^2(2\,x)}=0,\tag{16}$$

$$\nabla^2E_y+\frac{\omega^2}{c^2}\,E_y\,\tanh^2 x+\frac{2}{\sinh(2\,x)}\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{2}{\sinh(2\,x)}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)=0,\tag{17}$$

$$\nabla^2E_z+\frac{\omega^2}{c^2}\,E_z\,\tanh^2 x+\frac{2}{\sinh(2\,x)}\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{2}{\sinh(2\,x)}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=0.\tag{18}$$

اگر راستای انتشار را در جهت x در نظر بگیریم (فرود عمودی)، E_x و H_x صفر خواهند بود، و به دو معادله زیر می‌رسیم.

$$\nabla^2E_y+\frac{\omega^2}{c^2}\,E_y\,\tanh^2 x-\frac{2}{\sinh(2\,x)}\frac{\partial E_y}{\partial x}=0,\tag{19}$$

$$\nabla^2E_z+\frac{\omega^2}{c^2}\,E_z\,\tanh^2 x-\frac{2}{\sinh(2\,x)}\frac{\partial E_z}{\partial x}=0,\tag{20}$$

معادله‌ی مولفه‌های y و z هم یکی در آمدند، پس اولی را به روش جداسازی متغیرها حل می‌کنیم. این یعنی هر تابع را به شکل حاصل‌ضرب $X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ می‌نویسیم. خواهیم داشت

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\tanh^2 x-\frac{2}{X\sinh(2\,x)}\frac{dX}{dx}=0.\tag{21}$$

اگر دو ثابت m^2 و n^2 حاصل از معادلات y و z را برای سادگی مسئله صفر قرار دهیم، به دست می آید:

$$\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{2}{\sinh(2x)}\frac{dX}{dx}+\frac{\omega^2}{c^2}\,X\,\tanh^2 x=0.\tag{22}$$

حالا این عبارت را در $\frac{1}{p_0}\exp\int\frac{p_1(t)}{P_0(t)}\,dt$ ضرب می‌کنیم تا جمله شامل مشتق درجه‌ی اول حذف شود. در این رابطه $p_0(x)$ ضریب جمله درجه دو و $p_1(x)$ ضریب جمله درجه یک هستند. خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left[\exp\left[\int \frac{-2\,dt}{\sinh(2\,t)}\right]\frac{dX}{dx}\right]+\frac{\omega^2}{c^2}\tanh^2 x\,\exp\left[\int \frac{-2\,dt}{\sinh(2\,t)}\right]\,X=0. \tag{23}$$

از آنجا که

$$\int \frac{-2\,dt}{\sinh(2\,t)}=2\,\tanh^{-1}(\exp 2\,x), \tag{24}$$

و می‌دانیم

$$\tanh^{-1} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \tag{25}$$

بنابر این

$$\exp\left[2\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^{2\,x}}{1-e^{2\,x}}\right)\right]=\frac{1+e^{2\,x}}{1-e^{2\,x}}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}}=\coth x. \tag{26}$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left(\coth x\,\frac{dX}{dx}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\,X\,\tanh x=0. \tag{27}$$

این عبارت را در $\coth x$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\coth x\,\frac{d}{dx}\left(\coth x\frac{dX}{dx}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\,X=0. \tag{28}$$

حالا تغییر متغییری به صورت زیر می‌دهیم.

$$s=\cosh x. \tag{29}$$

$\cosh x$ تابع زوجی است. عبارت بالا به این معنی است که برای x های مثبت و برای x های منفی، جداگانه از تغییر متغیر $s=\cosh x$ استفاده می‌کنیم. البته باید جواب و مشتق آن در $x=0$ پیوسته باشند.

معادله دیفرانسیل برای هر دو بخش کوچکتر و بزرگتر از صفر به‌صورت زیر می‌شود:

$$s\frac{d}{ds}\left(s\frac{dX}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}X=0 \tag{30}$$

این معادله جوابها یی به صورت $\sin(\frac{\omega}{c}s)$ و $\cos(\frac{\omega}{c}s)$ دارد بنابراین خواهیم داشت:

$$X=\begin{cases} a_1\exp(i\frac{\omega}{c}\cosh(x)) & x>0\\ a_2\exp(i\frac{\omega}{c}\cosh(x)) & x<0\end{cases} \tag{31}$$

با در نظر گرفتن شرط پیوستگی جواب و مشتق اول آن در $x=0$ بدست می‌آید: $a_1=a_2$. این جواب برای هر دو مولفه y و z، H و E درست است، تنها کافی است ضرایب ثابت را به کمک معادلات ماکسول بدست آوریم. با توجه به شکل تابعیت زمانی و صفر بودن H_x و E_x، معادلات (1) و (2) به شکل زیر در می‌آیند:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{32}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{33}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{35}$$

با توجه به جوابهایی که در بالا بدست آمد استفاده از روابط (32) و (34) ساده‌تر است. اگرچه دو رابطه دیگر نیز به همین جوابها منتهی می‌شوند. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$E_z = \begin{cases} e_1 \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x > 0 \\ e_2 \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x < 0 \end{cases} \tag{36}$$

$$H_z = \begin{cases} h_1 \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x > 0 \\ h_2 \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x < 0 \end{cases} \tag{37}$$

$$E_y = \begin{cases} \frac{h_1}{c} \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x > 0 \\ \frac{h_2}{c} \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x < 0 \end{cases} \tag{38}$$

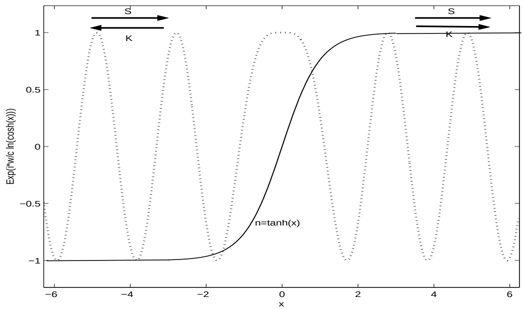
$$H_y = \begin{cases} \frac{-e_1}{c} \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x > 0 \\ \frac{-e_2}{c} \exp(i\frac{\omega}{c} \ln\cosh(x)) & x < 0 \end{cases} \tag{39}$$

تمام این جوابها خاصیت جالب واحدی دارند، همان طور که می‌دانیم تابع $\cosh(x)$ در حد x های با قدر مطلق بسیار بزرگتر از صفر به صورت $\exp(x)$ در می آید، پس روابط بالا برای x های مثبت به صورت موج تخت راست‌رو، و برای x های منفی به صورت موج تخت چپ‌رو در می‌آید. با توجه به رابطه‌ی

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\Big], \tag{40}$$

و صفر بودن مولفه‌های E_x و H_x، $\mathbf{S}$، یعنی بردار پوینتینگ، تنها مولفه‌ی x خواهد داشت:

$$S_x = \frac{1}{2}\left[E_y H_z^* - E_z H_y^*\right]. \tag{41}$$



شکل ۱: نمودار موج در محیطی با ضریب‌شکست $\tanh x$. دقّت کنید که $\mathbf{k}$ و $\mathbf{S}$ در جایی که ضریب‌شکست منفی است، در خلاف جهت هم اند. ضمناً، با دور شدن از $x = 0$، موج به شکل یک موج تخت در می آید.

در نهایت برای هر دو بخش کوچکتر و بزرگتر از صفر خواهیم داشت:

$$S_x = \frac{h_1^2 + e_1^2}{2c}. \tag{42}$$

این رابطه به صراحت نشان می‌دهد که همان مقدار انرژی که وارد شده در همان جهت نیز خارج شده است. یعنی ضریب بازتاب صفر است. در ضمن می‌بینیم که وقتی از مبدا دور می‌شویم جهت انتشار انرژی و بردار موج برای بخش مثبت یکی و در بخش منفی مخالف یکدیگر است.

خوب است به این نکته هم توجه کنیم که در حد $a \to 0$، تابع $\tanh x/a$ به تابع پله‌ای $\operatorname{sgn} x$ میل می‌کند.[2] اگر گذردهی و تراوایی به شکل $\operatorname{sgn} x$ باشند، ضریب شکست نیز به همین شکل است. در این حالت مسئله‌ی بازتاب را می‌توان تنها با اعمال شرط مرزی در $x = 0$ حل کرد، و نتیجه همان است که از حل ما در حالت $a \to 0$ به دست می‌آید.

مراجع

[1] V. G. Veselago: "The Electrodynamics of Substances with Simultanously Negative Values of ϵ and μ", *Soviet Physics Usp.*, vol. 10, p. 509 (1968)

[2] A. Grbic and G. V. Eleftheriades: "Overcoming the Diffraction Limit with a Left-Handed Transmission-Line Lens", *Physical Review Letters* vol. 92, 117403-4 (2004)

[2] $\operatorname{sgn} x$ برای $x > 0$ برابر با 1 است، برای $x = 0$ برابر با 0 است، و برای $x < 0$ برابر با -1 است.

[3] N. Fang *et al.*: "Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens", *Science*, vol. 308, pp. 534–537 (22 Apr 2005)

[4] J. B Pendry: "Negative Refraction Makes a Perfect Lens", *Physical Review Letters*, vol. 85, p. 3699 (2000)

[5] Max Born, Emil Wolf: "Principles of Optics", 7^{th} edition, Cambridge, 2001.

نام‌های خاص

[a] Victor Veselago

... روزهای اولِ حضورم در کُرنل، به عنوانِ یک استادِ تازه‌کار، جالب و گاه سرگرم‌کننده بودند. چند روز پس از رفتنم به آن جا، پروفسور گیبس آمد به دفترم و برایم توضیح داد که معمولاً، این قدر پس از شروعِ ترم دانش‌جو نمی‌گیریم، ولی در بعضی مواردِ نادر، وقتی درخواست دهنده خیلی، خیلی خوب باشد، می‌توانیم او را بگیریم. بعد یک تقاضانامه به من داد و از من خواست نگاهی به آن بیاندازم.

برگشت: «خوب، چه فکر می‌کنید؟»

فکر می‌کنم او درجه یک است، و باید او را بگیریم. فکر می‌کنم اگر این جا باشد شانس آورده ایم.»

درست، ولی شما عکسش را دیده‌اید؟

داد زدم: چه فرقی می‌کنه؟

مطلقاً هیچ چی، آقا! خوشحالم که می‌شنوم چنین چیزی می‌گویید. می‌خواستم ببینم به عنوانِ استادِ جدیدمان چگونه آدمی هستید.

گیبس خوشش آمد از این که من با عصبانیت، بدونِ فکر کردن جوابش را دادم، و فکر نکردم که «او رئیسِ گروه (دانش‌کده) است و من تازه‌کار ام، پس بهتر است مواظبِ حرف زدنم باشم». من سرعتِ فکر کردن به چنان چیزهایی را ندارم. اولین واکنشِ من ناگهانی است، و من اولین چیزی را که به ذهنم می‌رسد به زبان می‌آورم.

from: "Surley You're Joking Mr. Feynman!", p. 169.