ماتریس ِ چگالی [1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-030 (2005/04/12)

نمایش ِ سیستم‌ها یِ کوانتمی با ماتریس ِ چگالی بررسی می‌شود. حالت‌ها یِ خالص و مخلوط، و درجه یِ اختلاط تعریف می‌شود. نشان داده می‌شود تحول ِ زمانی یِ سیستم‌ها یِ کوانتمی درجه یِ اختلاط را تغییر نمی‌دهد، اما با سنجش ِ هر مشاهده‌پذیر درجه یِ اختلاط زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.

0 مقدمه

در بسیار ی از کتاب‌ها یِ درسی یِ کوانتم‌مکانیک، حالت ِ یک سیستم را با یک بردار (یا به‌طور ِ دقیق‌تر با یک زیرفضا یِ یک‌بُعدی) در فضا یِ هیلبِرت [a] مشخص می‌کنند. گاه ی ماتریس ِ چگالی (که مشخص‌کننده یِ حالت ِ سیستم به طور ِ کلی است) معرفی می‌شود، اما در خیل ی از موارد (از جمله در فصل ِ 3 از [1]) این معرفی کوتاه و بر اساس ِ فرمول‌بندی یی است که حالت ِ سیستم را با یک بردار مشخص می‌کند. البته موارد یِ هم هست که مستقیماً ماتریس ِ چگالی معرفی شده، مثل ِ [2]. در این‌جا مستقیماً فرمول‌بندی یِ کوانتم‌مکانیک بر اساس ِ ماتریس ِ چگالی، از رو یِ چند فرض ِ ساده به دست می‌آید. برا یِ ساده‌گی، به‌طور ِ ضمنی فرض شده فضا یِ هیلبِرت [a]ِ سیستم باپایان‌بُعدی است. هر چند خیل ی از نتیجه‌ها یِ حاصل با تصحیح‌ها یا شرط‌ها یی برا یِ فضاها یِ بی‌پایان‌بُعدی هم درست اند.

[1] این مقاله، با اجازه یِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه یِ حقوق ِ آن برا یِ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-030.pdf

1 حالت ِ یک سیستم ِ کوانتمی

می‌گویند حالت ِ یک سیستم ِ کوانتمی مشخص است، اگر مقدار ِ چشم‌داشتی یِ همه یِ مشاهده‌پذیرها یِ فضا یِ هیلبِرت [a]ِ متناظر با آن سیستم ِ کوانتمی مشخص باشد. از این فرض که مقدار ِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها نسبت به مشاهده‌پذیرها خطی است (با ضریب‌ها یِ حقیقی) شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم حالت ِ هر سیستم ِ کوانتمی با یک عمل‌گر ِ اِرمیتی در فضا یِ هیلبِرت [a]ِ متناظر با آن سیستم مشخص می‌شود.

فرض کنید O یک نگاشت ِ خطی است. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Re}(O) := \frac{1}{2}\,(O^\dagger + O),$$

$$\mathrm{Im}(O) := \frac{i}{2}\,(O^\dagger - O). \tag{1}$$

روشن است که $\mathrm{Re}(O)$ و $\mathrm{Im}(O)$ اِرمیتی اند و

$$O = \mathrm{Re}(O) + i\,\mathrm{Im}(O). \tag{2}$$

مقدار ِ چشم‌داشتی یِ O را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\langle O\rangle := \langle \mathrm{Re}(O)\rangle + i\,\langle \mathrm{Im}(O)\rangle. \tag{3}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود با این تعریف، اگر O_1 و O_2 دو نگاشت ِ خطی باشند، آن‌گاه

$$\langle O_1 + O_2\rangle = \langle O_1\rangle + \langle O_2\rangle, \tag{4}$$

و اگر O یک نگاشت ِ خطی و α یک عدد ِ مختلط باشد، آن‌گاه

$$\langle \alpha\, O\rangle = \alpha\,\langle O\rangle. \tag{5}$$

فرض کنید $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ راست‌هنجار ِ فضا یِ هیلبِرت [a] است. تعریف می‌کنیم

$$\rho_{k\,j} := \langle e_j\, e_k^\dagger\rangle, \tag{6}$$

و از آن‌جا نگاشت ِ خطی یِ ρ را با

$$\rho := \rho_{j\,k}\, e^{j\,\dagger}\, e^k \tag{7}$$

تعریف می‌کنیم، که $\{e^i \mid i\}$ پایه ‌ي دوگان ‌ِ $\{e_i \mid i\}$ است:

$$e^k\, e_j = \delta^k_j. \tag{8}$$

عنصرها ‌يِ ماتریسی ‌يِ نگاشت ‌ِ خطی ‌يِ O با

$$O =: O^{j\,k}\, e_j\, e_k^\dagger \tag{9}$$

تعریف می‌شوند. از این رابطه و (6) نتیجه می‌شود

$$\langle O\rangle = O^{j\,k}\, \rho_{k\,j}. \tag{10}$$

اما داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(O\,\rho) &= O^{j\,k}\, \rho_{l\,m}\, \mathrm{tr}(e_j\, e_k^\dagger\, e^{l\,\dagger}\, e^m), \\ &= O^{j\,k}\, \rho_{k\,j}. \end{aligned} \tag{11}$$

از مقایسه ‌يِ این رابطه با (10) معلوم می‌شود

$$\langle O\rangle = \mathrm{tr}(O\,\rho). \tag{12}$$

پس با مشخص‌بودن ‌ِ ρ، مقدار ‌ِ چشم‌داشتی ‌يِ هر مشاهده‌پذیر ی مشخص است، در واقع از (10) یا (12) به دست می‌آید. به این ترتیب، حالت ‌ِ هر سیستم ‌ِ کوانتمی با یک نگاشت ‌ِ خطی در فضا ‌يِ هیلبِرت [a] ‌ِ متناظر با آن سیستم مشخص می‌شود. به این نگاشت ماتریس ‌ِ چگالی می‌گویند. از (12) روشن است که حالت ‌ِ دو سیستم (با یک فضا ‌يِ هیلبِرت [a]) یک‌سان است (مقدار ‌ِ چشم‌داشتی ‌يِ مشاهده‌پذیرها یِشان نظیر به نظیر برابر است)، اگر و تنها اگر ماتریسِ‌چگالی ‌يِ متناظر با این دوسیستم یک‌سان باشد.

مقدار ‌ِ چشم‌داشتی ‌يِ یک نگاشت ‌ِ اِرمیتی (یک مشاهده‌پذیر) حقیقی است. از این‌جا و از (3) نتیجه می‌شود

$$\langle O^\dagger\rangle = \overline{\langle O\rangle}, \tag{13}$$

و با استفاده از (6)،

$$\rho_{k\,j} = \overline{\rho_{j\,k}}, \tag{14}$$

که نشان می‌دهد ماتریس ‌ِ چگالی اِرمیتی است.

مقدار ـِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها یِ مجذوری (یعنی مشاهده‌پذیرها یی به شکل ـِ O^2، که O یک مشاهدپذیر است) نامنفی است. اگر v یک بردار ـِ ناصفر در فضا یِ هیلبِرت باشد، نگاشت ـِ Pr_v با تعریف ـِ

$$\mathrm{Pr}_v := \frac{1}{\langle v, v\rangle}\, v\, v^\dagger \tag{15}$$

از این نوع است. در واقع به‌ساده‌گی دیده می‌شود که

$$\mathrm{Pr}_v\, \mathrm{Pr}_v = \mathrm{Pr}_v, \tag{16}$$

یعنی Pr_v افکنش است، و

$$\mathrm{Pr}_v^\dagger = \mathrm{Pr}_v. \tag{17}$$

چون Pr_v مشاهده‌پذیر ی مجذوری است،

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_v\, \rho) \geq 0. \tag{18}$$

اما داریم

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_v\, \rho) = \frac{\langle v, \rho\, v\rangle}{\langle v, v\rangle}. \tag{19}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود به ازا یِ هر بردار ـِ v،

$$\langle v, \rho\, v\rangle \geq 0. \tag{20}$$

یعنی ماتریس ـِ چگالی مثبت ـِ شبهِ‌معین است.

سرانجام، مقدار ـِ چشم‌داشتی یِ نگاشت ـِ همانی یک است. پس،

$$\mathrm{tr}(\rho) = 1. \tag{21}$$

خلاصه کنیم. با فرض ـِ این که

1 مقدار ـِ چشم‌داشتی نسبت به مشاهده‌پذیرها خطی است (با ضریب‌ها یِ حقیقی)،

2 مقدار ـِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها حقیقی است،

3 مقدار ـِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها یِ مجذوری نامنفی است،

4 مقدار ـِ چشم‌داشتی یِ همانی یک است،

نتیجه می‌شود حالت ـِ هر سیستم با یک ماتریس ـِ چگالی مشخص می‌شود؛ و ماتریس ـِ چگالی یک نگاشت ـِ اِرمیتی یِ مثبت ـِ شبهِ‌معین با رد ـِ یک است.

2 حالت‌ها یِ خالص و حالت‌ها یِ مخلوط

ماتریس ـِ چگالی نگاشت ی اِرمیتی است، پس طیف ـِ کامل دارد. ویژه‌مقدارها یِ این نگاشت را با λ_i ها، و چندگانه‌گی یِ λ_i را با D_i نشان می‌دهیم. از این که ماتریس ـِ چگالی مثبت ـِ شبهِ‌معین و رد ـِ آن یک است، نتیجه می‌شود

$$\forall\, i\ :\ 0 \le \lambda_i \le 1,$$

$$\sum_i D_i\, \lambda_i = 1. \tag{22}$$

می‌گوییم حالت ـِ یک سیستم خالص است، اگر ویژه‌مقدارها یِ ماتریسِ‌چگالی یِ متناظر با آن حالت یک و صفر باشند، و ویژه‌مقدار ـِ یک یگانه باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود که در این حالت

$$\rho = \mathrm{Pr}_v, \tag{23}$$

که v ویژه‌بردار ـِ ρ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک است. بر عکس، روشن است که اگر (23) برقرار باشد، تنهاویژه‌مقدار ـِ ناصفر ـِ ρ یک با چندگانه‌گی یِ یک است، و ویژه‌بردار ـِ متناظر با آن هم v است. اگر حالت ـِ یک سیستم خالص نباشد، می‌گوییم حالت ـِ آن سیستم مخلوط است. البته این تعریف ـِ حالت ـِ خالص و مخلوط، معیار ی کمی از درجه یِ اختلاط نمی‌دهد.

تابع ـِ حقیقی‌مقدار ـِ f را در نظر بگیرید که دامنه اَش یک زیرمجموعه یِ گوژ از یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است. می‌گوییم این تابع کاو است، اگر به ازا یِ هر رشته عددها یِ حقیقی و نامنفی یِ α_i با مجموع ـِ یک، و هر رشته یِ x_i که x_i ها متمایز و عضو ـِ دامنه یِ f اند،

$$f\left(\sum_i \alpha_i\, x_i\right) \ge \sum_i \alpha_i\, f(x_i). \tag{24}$$

می‌گوییم f اکیداً کاو است، اگر شرط ـِ لازم و کافی برا یِ برقراری یِ تساوی در (24) آن باشد که یک ی از α_i ها یک باشد و بقیه صفر باشند.

فرض کنید f یک تابع ـِ اکیداًکاو با دامنه یِ $[0,1]$ است، که

$$f(0) = 0. \tag{25}$$

در این صورت روشن است که

$$(0 \le \lambda \le 1) \Rightarrow f(\lambda) \ge \lambda\, f(1), \tag{26}$$

و تساوی وقت ی و تنها وقت ی برقرار است که λ صفر یا یک باشد.

فرض کنید ρ یک ماتریس ِ چگالی است، λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ (متمایز ِ) آن اند، و D_i چندگانه‌گی یِ λ_i است. داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[f(\rho)] &= \sum_i D_i\, f(\lambda_i),\\ &\geq \sum_i D_i\, \lambda_i\, f(1),\\ &= f(1),\end{aligned} \tag{27}$$

و تساوی وقت ی و تنها وقت ی برقرار است که تنها ویژه‌مقدار ِ ناصفر ِ ρ یک با چندگانه‌گی یِ یک باشد. هم‌چنین، با تعریف ِ

$$D := \sum_i D_i, \tag{28}$$

(D بُعد ِ فضا یِ هیلبِرت [a] است) داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{D}\,\mathrm{tr}[f(\rho)] &= \sum_i \frac{D_i}{D}\, f(\lambda_i),\\ &\leq f\left(\sum_i \frac{D_i}{D}\,\lambda_i\right),\\ &= f\left(\frac{1}{D}\right),\end{aligned} \tag{29}$$

و تساوی زمان ی و فقط زمان ی برقرار است که ρ فقط یک ویژه‌مقدار داشته باشد (که برابر با D^{-1} است).

پس اگر f یک تابع ِ اکیداًکاو با دامنه یِ $[0,1]$ باشد که (25) را بر می‌آوَرد، و ρ ماتریس ِ چگالی یِ متناظر با یک سیستم باشد،

$$\mathrm{tr}[f(\rho)] \geq f(1), \tag{30}$$

و تساوی وقت ی و فقط وقت ی برقرار است که حالت ِ سیستم خالص باشد. هم‌چنین،

$$\mathrm{tr}[f(\rho)] \leq D\, f\left(\frac{1}{D}\right), \tag{31}$$

و تساوی وقت ی و فقط وقت ی برقرار است که ماتریس ِ چگالی متناسب با یک باشد.

متناظر با هر f با ویژه‌گی‌ها یِ بالا می‌شود یک درجه یِ اختلاط ($\mathfrak{s}_f$) تعریف کرد:

$$\mathfrak{s}_f := \mathrm{tr}[f(\rho)] - f(1). \tag{32}$$

هر چه این عدد بزرگ‌تر باشد، حالت ـِ سیستم مخلوط‌تر است. مخلوط‌ترین حالت آن است که ماتریس ـِ چگالی متناسب با یک باشد. حالت ـِ سیستم خالص است اگر و تنها اگر $\mathfrak{s}_f$ صفر باشد. روشن است که این معیار به f بسته‌گی دارد، اما مخلوط‌ترین حالت و حالت‌ها یِ خالص به f بسته‌گی ندارند. به‌طور ـِ کلی،

$$0 \le \mathfrak{s}_f \le D\, f\left(\frac{1}{D}\right) - f(1), \tag{33}$$

که دوحد متناظر اند با حالت‌ها یِ خالص و مخلوط‌ترین حالت. یک انتخاب ـِ معمول برا یِ f تابع ـِ انتروپی (S) است:

$$S(x) := -x\, \ln x. \tag{34}$$

$S(0)$ و $S(1)$ صفر اند، و داریم

$$0 \le \mathfrak{s}_S \le D\, \ln D. \tag{35}$$

اگر حالت ـِ سیستم ی خالص باشد، (23) به ازا یِ یک بردار ـِ ناصفر ـِ v برقرار است. پس نتیجه می‌شود به ازا یِ هر مشاهده‌پذیر ـِ O،

$$\langle O\rangle = \frac{\langle v, O\, v\rangle}{\langle v, v\rangle}. \tag{36}$$

این یعنی حالت ـِ سیستم را می‌شود با بردار ـِ v هم مشخص کرد. در واقع حالت ـِ چنین‌سیستم ی با یک زیرفضا یِ خطی یِ یک‌بُعدی یِ فضا یِ هیلبِرت [a] مشخص می‌شود.

اگر حالت ـِ سیستم مخلوط باشد، داریم

$$\rho = \sum_i \lambda_i\, \frac{v_i\, v_i^\dagger}{\langle v, v\rangle}, \tag{37}$$

که v_i ها ویژه‌بردارها یِ (متعامد ـِ) ماتریس ـِ چگالی یِ سیستم (ρ)، و λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ متناظر اند. به این ترتیب،

$$\langle O\rangle = \sum_i \lambda_i\, \frac{\langle v_i, O\, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}. \tag{38}$$

این مقدارها یِ چشم‌داشتی شبیه ـِ مقدارها یِ چشم‌داشتی یِ سیستم ی اند متشکل از چندین جزئ، که جزئ ـِ i ُم در حالت ـِ خالص ـِ متناظر با بردار ـِ v_i است و کسر ـِ λ_i از سیستم را تشکیل می‌دهد.

بر عکس، اگر سیستم ی از چندین جزئ ساخته شده باشد که جزئ ـ i ُ م در حالت ـ خالص ـ متناظر با بردار ـ v_i باشد و کسر ـ λ_i از سیستم را بسازد، آن‌گاه مقدار ـ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیر ـ O از (38) به دست می‌آید. پس ماتریس ـ چگالی یِ سیستم به شکل ـ (37) است. توجه داریم که در این حالت لازم نیست v_i ها متعامد باشند. همین که λ_i ها حقیقی، نامنفی، و نابزرگ‌تر از یک باشند و مجموع ِشان یک باشد کافی است که ρ در (37) ویژه‌گی‌ها یِ ماتریس ـ چگالی را داشته باشد. البته اگر v_i ها متعامد نباشند، دیگر v_i ها ویژه‌بردارها و λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ ρ نیستند. تعریف ـ ρ به شکل ـ (37) را می‌شد نقطه یِ شروع ـ تعریف ـ ماتریس ـ چگالی یِ یک سیستم گرفت که اجزا یَش در حالت‌ها یِ خالص اند. ضمناً اگر v_i ها متعامد نباشند، نوشتن ـ ρ به شکل ـ (37) یک‌تا نیست.

3 تحول

برا یِ بررسی یِ تحول ـ حالت ـ سیستم، یک راه این است که از (37) (با v_i ها یِ دل‌بخواه) شروع و توجه کنیم که اگر حالت ـ سیستم ی خالص باشد، بردار ـ مشخص‌کننده یِ حالت ـ آن با معادله یِ شْرُدینگِر [b] تحول می‌یابد:

$$v(t_0) \to v(t) = U(t, t_0)\, v(t_0), \tag{39}$$

که $v(t)$ حالت ـ سیستم در زمان ـ t و $U(t, t_0)$ عمل‌گر ـ یکانی یِ تحول از زمان ـ t_0 تا زمان ـ t است. رابطه یِ بالا را می‌شود به شکل ـ دیفرانسیلی نوشت:

$$i\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = H(t)\, v(t), \tag{40}$$

که H همیلتنی یِ سیستم است:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H(t)\, U(t, t_0). \tag{41}$$

از (37) و (39) نتیجه می‌شود

$$\rho(t) = U(t, t_0)\, \rho(t_0)\, U^{\dagger}(t, t_0), \tag{42}$$

یا به شکل ـ دیفرانسیلی،

$$i\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)]. \tag{43}$$

می‌شود هم از این‌جا شروع کرد که در مکانیک ـ کلاسیک، مشتق ـ زمانی یِ کامل ـ چگالی یِ حالت‌ها در فضا یِ فاز صفر است. ترجمه یِ این عبارت در کوانتم‌مکانیک آن است که ماتریس ـ چگالی در

تصویر ـِ هَیزِن‌بِرگ [c] ثابت است:

$$\rho^{\mathrm{H}}(t) = \rho^{\mathrm{H}}(t_0). \tag{44}$$

اما داریم

$$\rho^{\mathrm{H}}(t) := U^\dagger(t,t_0)\,\rho(t)\,U(t,t_0). \tag{45}$$

از ترکیب ـِ (44) و (45) رابطه یِ (42) نتیجه می‌شود.

به ساده‌گی دیده می‌شود تحول ـِ سیستم درجه یِ اختلاط را عوض نمی‌کند:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\{f[\rho(t)]\} &= \mathrm{tr}\{f[U(t,t_0)\,\rho(t_0)\,U^\dagger(t,t_0)]\},\\ &= \mathrm{tr}\{U(t,t_0)\,f[\rho(t_0)]\,U^\dagger(t,t_0)\},\\ &= \mathrm{tr}\{f[\rho(t_0]\}. \end{aligned} \tag{46}$$

4 سنجش

باز هم از شکل ـِ (37) (با v_i ها یِ دل‌بخواه) برا یِ ρ شروع می‌کنیم. در سنجش ـِ مشاهده‌پذیر ـِ O، بخش ی از سیستم که با بردار ـِ v_i مشخص می‌شود با احتمال ـِ

$$P_{a\,i} := \frac{\langle v_i, \mathrm{Pr}_a\, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \tag{47}$$

به حالت ـِ

$$v_{a\,i} := \mathrm{Pr}_a\, v_i \tag{48}$$

می‌رود. در این‌جا

$$O = \sum_a o_a\, \mathrm{Pr}_a, \tag{49}$$

که o_a ها ویژه‌مقدارها یِ متمایز ـِ O اند، و Pr_a افکنش بر ویژه‌فضا یِ O متناظر با ویژه‌مقدار ـِ o_a است. داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}_a^\dagger &= \mathrm{Pr}_a,\\ \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_b &= \delta_{a\,b}\,\mathrm{Pr}_a, \end{aligned}$$

$$\sum_a \mathrm{Pr}_a \;=\; 1. \tag{50}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود پس از سنجش، کسرِ $P_{a\,i}\,\lambda_i$ از سیستم در حالتِ $v_{a\,i}$ است. ماتریسِ چگالی پس از سنجش را با ρ' نشان می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\rho' \;&=\; \sum_{a\,i} P_{a\,i}\,\lambda_i\,\frac{v_{a\,i}\,v_{a\,i}^\dagger}{\langle v_{a,i}, v_{a\,i}\rangle},\\ &=\; \sum_{a,i} \lambda_i\,\frac{\mathrm{Pr}_a\,v_i\,v_i^\dagger\,\mathrm{Pr}_a}{\langle v_i, v_i\rangle},\end{aligned} \tag{51}$$

یا

$$\rho' = \sum_a \mathrm{Pr}_a\,\rho\,\mathrm{Pr}_a. \tag{52}$$

اثرِ سنجش بر درجه یِ اختلاطِ سیستم را بررسی می‌کنیم. فرض کنید λ_j ها ویژه‌مقدارها یِ متمایزِ ρ اند، و بُعدِ ویژه‌فضا یِ ρ متناظر با ویژه‌مقدارِ λ_j برابرِ D_j است. داریم

$$\mathrm{tr}[f(\rho)] = \sum_j D_j\,f(\lambda_j). \tag{53}$$

روشن است که

$$\rho = \sum_j \lambda_j\,\mathrm{Pr}_j, \tag{54}$$

که Pr_j افکنش بر ویژه‌فضا یِ ρ متناظر با ویژه‌مقدارِ λ_j است. این افکنش‌ها این ویژه‌گی‌ها را دارند.

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}_j^\dagger \;&=\; \mathrm{Pr}_j,\\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_k \;&=\; \delta_{j\,k}\,\mathrm{Pr}_j,\\ \mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_j) \;&=\; D_j\\ \sum_j \mathrm{Pr}_j \;&=\; 1.\end{aligned} \tag{55}$$

$\{e'_k \mid k\}$ را یک پایه یِ راست‌هنجار می‌گیریم که اعضا یِ آن ویژه‌بردارِ ρ' اند. فرض کنید f یک تابعِ اکیداً‌کاو است که در $[0,1]$ تعریف شده است. داریم

$$\mathrm{tr}[f(\rho')] \;=\; \sum_k f\left(\langle e'_k, \rho'\,e'_k\rangle\right),$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k} f\left(\sum_{a,j}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle\,\lambda_j\right),\\
&\geq \sum_{k,a,j}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle\, f(\lambda_j),\\
&= \sum_{a,j}\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a)\, f(\lambda_j),\\
&= \sum_{j} D_j\, f(\lambda_j), \qquad (56)
\end{aligned}
$$

و از آن‌جا،

$$
\mathrm{tr}[f(\rho')] \geq \mathrm{tr}[f(\rho)]. \qquad (57)
$$

در (56) از این استفاده شده که

$$
\begin{aligned}
\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle &= \langle \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k, \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle,\\
&\geq 0, \qquad (58)
\end{aligned}
$$

و

$$
\sum_{a,j}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle = 1. \qquad (59)
$$

در رابطه یِ (57)، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$
\forall\ (j,k)\ :\ \sum_{a}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle = 0 \vee 1. \qquad (60)
$$

داریم

$$
\begin{aligned}
\sum_{a}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle &= \sum_{a}\langle \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k, \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle,\\
&\leq \sum_{a}\langle \mathrm{Pr}_a\, e'_k, \mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle,\\
&= \sum_{a}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle e'_k, e'_k \rangle, \\
&= 1, \qquad (61)
\end{aligned}
$$

و تساوی زمان ی و فقط زمان ی برقرار است که

$$\forall\, a \;:\; \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k = \mathrm{Pr}_a\, e'_k. \qquad (62)$$

از سو يِ ديگر،

$$\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle \geq 0, \qquad (63)$$

و تساوی زمان ی و فقط زمان ی برقرار است که

$$\forall\, a \;:\; \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k = 0. \qquad (64)$$

اين يعنی

$$
\begin{aligned}
\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\, a \;:\; \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k = \mathrm{Pr}_a\, e'_k), \\
\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\, a \;:\; \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k = 0). \qquad (65)
\end{aligned}
$$

با جمع‌زدن عبارت‌ها يِ طرف ِ راست رو يِ a،

$$
\begin{aligned}
\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle = 1 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Pr}_j\, e'_k = e'_k, \\
\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Pr}_j\, e'_k = 0. \qquad (66)
\end{aligned}
$$

از (65) و (66) نتيجه می‌شود

$$\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle = 0 \vee 1 \quad \Rightarrow \quad (\forall\, a \;:\; \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k = \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, e'_k). \qquad (67)$$

پس،

$$\left(\forall\, k \;:\; \sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a\, e'_k \rangle = 0 \vee 1\right) \quad \Rightarrow \quad (\forall\, a \;:\; \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a = \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j). \qquad (68)$$

به اين ترتيب، در (57) تساوی برقرار است اگر

$$\forall\ (a, j)\ :\ \mathrm{Pr}_j\, \mathrm{Pr}_a = \mathrm{Pr}_a\, \mathrm{Pr}_j. \qquad (69)$$

روشن است که اگر (69) درست باشد، ρ' و ρ برابر اند و در (57) تساوی برقرار است. ضمناً اگر (69) درست باشد، O و ρ با هم جابه‌جا می‌شوند و بر عکس، اگر O و ρ با هم جابه‌جا شوند، (69) درست است (چون Pr_a تابع ِ O و Pr_j تابع ِ ρ است). نتیجه این که اگر f یک تابع ِ اکیداًکاو باشد که در $[0, 1]$ تعریف شده، آن‌گاه

$$\mathrm{tr}[f(\rho')] = \mathrm{tr}[f(\rho)] \quad \Leftrightarrow \quad \rho' = \rho \quad \Leftrightarrow \quad [O, \rho] = 0. \qquad (70)$$

5 مرجع‌ها

[1] Jun John Sakurai; "Modern quantum mechanics", (Addison-Wesley, 1995)

[2] Leslie E. Ballentine; "Quantum mechanics", (Prentice-Hall, 1990)

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Hilbert

[b] Schrödinger

[c] Heisenberg

فردی را در نظر بگیرید که قدش 2 متر و وزنش 100 کیلوگرم است. اگر این فرد همه‌یِ ابعادش 2 برابر شود، قدش دو برابر یعنی 4 متر و وزنش 8 برابر یعنی 800 کیلو می‌شود. سطحِ پاهایش 4 برابر و فشارِ رویِ پاهایش 2 برابر می‌شود. برایِ همین هم هست که آدم‌هایِ 4 متری نداریم. در واقع این چنین فردی یک استخوانِ سالم هم در پاهایش باقی نمی‌ماند. موجوداتِ بزرگ مشکلِ‌شان را این‌طور حل کرده‌اند که استخوان‌هایِ پاهایِ‌شان در مقایسه با بقیه‌یِ اندام‌ها ضخیم‌تر است. موجوداتِ چهارپا می‌توانند بزرگ‌تر از موجوداتِ دوپا باشند. در واقع موجوداتی که رشدِ اُفقی دارند می‌توانند نسبت به موجوداتِ دوپا قدِ بلندتری داشته باشند. اگر بخشی از بدنِ‌شان در آب باشد باز هم می‌توانند بزرگ‌تر باشند. بزرگ‌ترین پستان‌دار در آب زندگی می‌کند.