حل ـ مسئله ی ـ شماره ی ـ ۱

احمد شریعتی

در شماره ی ـ ۱ ـ گاما مسئله ی ـ زیر مطرح شده بود.

منجّم ی یونانی به نام ـ آریستارخوس [a] در نیمه ی ـ نخست ـ قرن ـ سوّم ـ پیش از میلاد، با استفاده از اطلاعات ـ زیر، تخمین ی از نسبت‌ها ی ـ $R_\oplus/R_{\rm m}$ و $d/R_\oplus$ به دست آورد ــ $R_\oplus$ شعاع ـ زمین، $R_{\rm m}$ شعاع ـ ماه، و d فاصله ی ـ ماه از زمین است.

۱) قطر ـ ظاهری ی ـ ماه و خورشید، هر دو، تقریباً نیم درجه است.

۲) خورشید خیل ی دورتر از ماه است.

۳) ماه‌گرفته‌گی قرار گرفتن ـ ماه در سایه ی ـ زمین است.

۴) در ماه‌گرفته‌گی ی ـ کامل، برا ی ـ حدود ـ یک ساعت، ماه اصلاً دیده نمی‌شود.

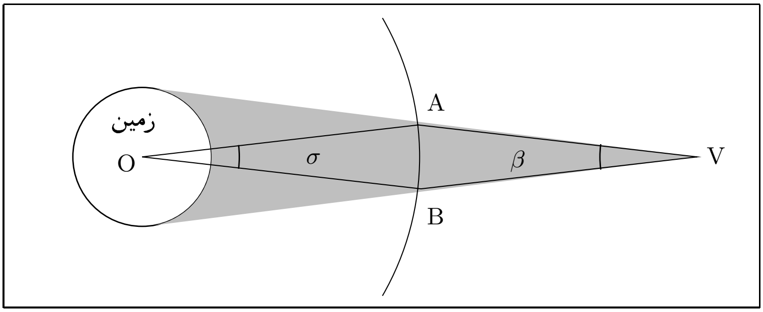
۵) وضعیّت ـ نسبی ی ـ زمین ــ ماه ــ خورشید با دوره ی ـ تناوب ـ تقریباً 30 روز تکرار می‌شود.

با استفاده از اطلاعات ـ بالا، نسبت‌ها ی ـ $R_\oplus/R_{\rm m}$ و $d/R_\oplus$ را تخمین بزنید.

حل: قطر ـ ظاهری ی ـ خورشید و ماه را α می‌نامیم. می‌دانیم $\alpha \simeq 0.5^\circ \simeq 0.009\,{\rm Rad}$، و ضمناً می‌دانیم که این قطر ـ ظاهری در طول ـ روز با دقّت ـ بسیار خوب ی ثابت است. چون در طول ـ روز فاصله ی ـ ناظر (که رو ی ـ زمین است و هم‌راه ـ آن می‌چرخد) تا ماه و خورشید از مرتبه ی ـ شعاع ـ زمین عوض می‌شود، و با این حال قطر ـ زاویه ای ـ ماه و خورشید عوض نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم که فاصله ی ـ ماه تا زمین، و فاصله ی ـ خورشید تا زمین (D) بسیار بزرگ‌تر از شعاع ـ زمین است:

$$D \gg R_\oplus, \qquad d \gg R_\oplus. \tag{1}$$

سایه ی ـ زمین مخروط ی است که زاویه ی ـ رأس ـ آن را β می‌نامیم. (شکل ـ ۱ را ببینید.) β البته کوچک‌تر از α است، امّا بسیار نزدیک به α است. در واقع، اگر L همان باشد که در شکل ـ ۳ نشان داده شده، و $R_\odot$ شعاع ـ خورشید باشد، به راحتی می‌توان دید که $\beta = 2\,R_\oplus/L = 2\,R_\odot/(D+L)$. از این جا با کم ی محاسبه ی ـ جبری می‌توان دید که $L/D = R_\oplus/(R_\odot - R_\oplus)$، و چون $R_\odot \gg R_\oplus$، این تساوی یعنی $L \ll D$، و از این جا نتیجه می‌شود که $\beta \simeq \alpha = 2\,R_\odot/D$. هر چه خورشید دورتر باشد، این دو به هم نزدیک‌تر اند، در واقع، اگر α و β را با استفاده از عددها یی که امروز برا ی ـ ابعاد ـ زمین، خورشید، و فاصله ی ـ زمین و خورشید می‌دانیم حساب کنیم، و آن دو را بر حسب ـ رادیان بیان کنیم، می‌بینیم که به تقریب $\alpha = 0.0093$ و $\beta = 0.0092$ است.



شکل ۱: ماه هنگام ِ خسوف، از A به B می‌رود، که در سایه ی ِ زمین واقع است.

ماه در هنگام ِ گرفته‌گی ی ِ کامل باید زاویه ای را طی کند تا ماه‌گرفته‌گی ِ کامل تمام شود، این زاویه را θ می‌نامیم. داریم $\theta = \omega\,\tau$، که در این جا ω سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ حرکت ِ ماه به دور ِ زمین است (یعنی آهنگ ِ تغییر ِ زاویه ی ِ ماه ـ زمین ـخورشید)؛ و τ مدّت ی است که ماه‌گرفته‌گی کامل است (حدود ِ $1\,\mathrm{h}$). چون می‌دانیم که دوره ی ِ تناوب ِ وضعیّت ِ نسبی ی ِ ماه و زمین و خورشید 30 روز است، و هر روز $24\,\mathrm{h}$ است، پس $\omega = 2\,\pi/(30 \times 24) = 0.009\,\mathrm{Rad/hr}$، و چون گرفت ِ کامل تقریباً 1 ساعت طول می‌کشد، زاویه ای که ماه در این مدّت می‌پیماید، یعنی θ، 0.5° است. زاویه ی ِ $\angle AOB$ را σ می‌نامیم. با توجه به شکل ِ ۲ داریم

$$\sigma = \theta + \alpha \tag{2}$$

اکنون اگر در مثلث ِ OAV رابطه ی ِ سینوس‌ها را بنویسم، و توجّه کنیم که σ و β کوچک اند و بنا بر این $\sin\sigma \simeq \sigma$ و $\sin\beta \simeq \beta$، می‌بینیم

$$\frac{d}{\beta/2} \simeq \frac{X}{\sigma/2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{X} \simeq \frac{\beta}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{X+d} \simeq \frac{\beta}{\sigma+\beta}. \tag{3}$$

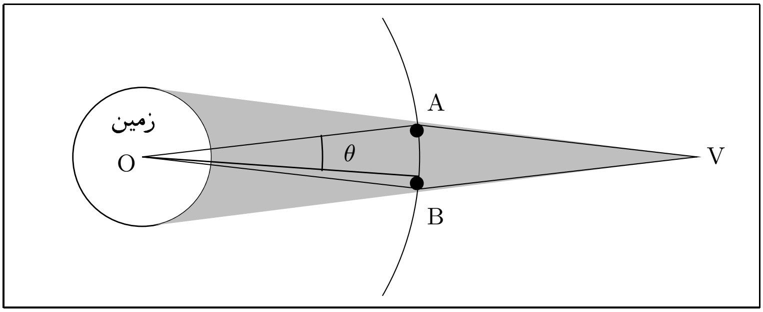
چون σ و β کوچک اند، داریم $X + d \simeq L$ (کمیّت‌ها در شکل ِ ۳ معرفی شده اند). به این ترتیب داریم

$$\frac{d}{L} \simeq \frac{\beta}{\theta + 2\,\beta}. \tag{4}$$

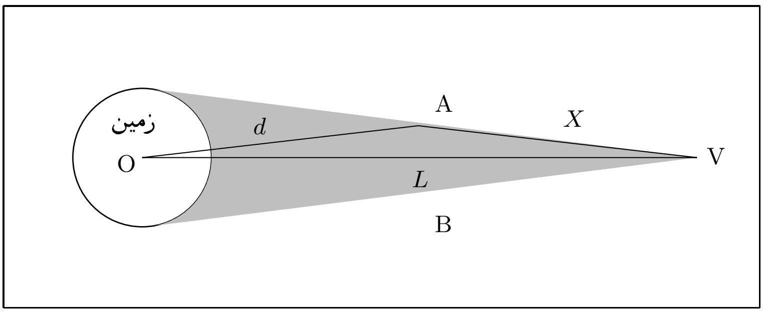
اکنون توجّه می‌کنیم که $\alpha = 2\,R_{\mathrm{m}}/d$ و $\beta = 2\,R_\oplus/L$، و ضمناً α و β تقریباً برابر اند. ضمناً دیدیم که θ هم تقریباً با α برابر است. به این ترتیب خواهیم داشت

$$\frac{R_{\mathrm{m}}}{R_\oplus} \simeq \frac{d}{L} \simeq \frac{\alpha}{\theta + 2\,\alpha} \simeq \frac{1}{3}. \tag{5}$$

اینک با ترکیب ِ دو رابطه ی ِ $\frac{R_{\mathrm{m}}}{R_\oplus} \simeq \frac{1}{3}$ و $\frac{d}{R_{\mathrm{m}}} \simeq \frac{2}{\alpha}$، و مقدار ِ $1/120$ برا ی ِ α، خواهیم داشت



شکل ۲: این شکل نشان می‌دهد که $\sigma = \theta + \alpha$، که در این جا α قطر ِ زاویه‌ای ی ِ ماه است. ماه با دایره ی ِ کوچک ِ سیاه مشخص شده.



شکل ۳: تعریف ِ L، d، و X.

$$\frac{d}{R_\oplus} \simeq 60. \tag{6}$$

خوب است این عددها را با عددها یی که از سنجش‌ها ی ِ دقیق‌تر ِ امروزی نتیجه می‌شود مقایسه کنیم. $R_\oplus/R_\mathrm{m} \simeq 3.7$ و $d/R_\oplus \simeq 60.7$ است. می‌بینم که عددها یی که به دست آورده ایم خیل ی خوب اند ـــ در یک مورد 20%، و در یک مورد 1% خطا!

در پایان، باید اقرار کنم که من نمی‌دانم که آیا واقعاً آریستارخوس به همین نحو استدلال کرده یا به روش ِ دیگر ی. ضمناً، قاعدتاً باید منجمین ِ دیگر، و از جمله منجمین ِ اسلامی هم تخمین‌ها یی از این نسبت‌ها زده باشند. یافتن ِ این روش‌ها مسئله‌ها ی ِ خوب ی برا ی ِ دانش‌جوها ی ِ تاریخ ِ علم است، و فهمیدن ِ این روش‌ها، به زبان ِ امروزی، مسئله‌ها ی ِ خوب ی برا ی ِ دانش‌جوها ی ِ فیزیک است.

[a] Aristrchus (c. 310 – 230 BC)