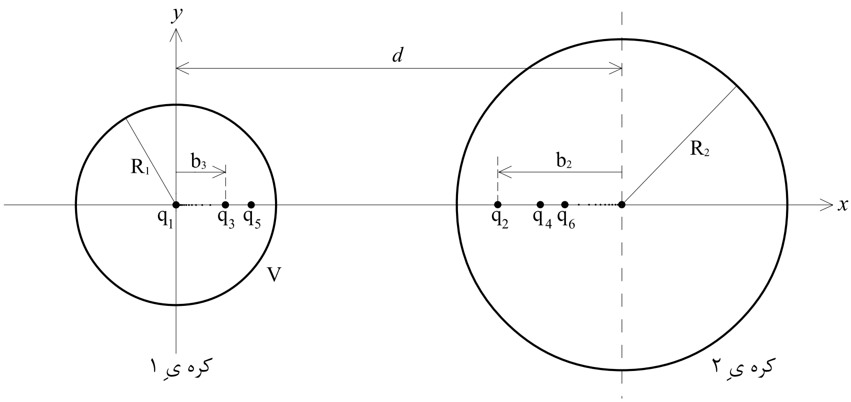
محاسبه ی ـ نیرو ی ـ بین ـ دو کره ی ـ رسانا ی ـ باردار

مسلم ـ مرادی misi_mori@yahoo.com

مسئله ی ـ نیرو ی ـ بین ـ دو کره ی ـ رسانا ی ـ باردار به روش ـ تصویرها ی ـ متوالی حل می‌شود. حالت ـ خاص ـ دو کره ی ـ چسبیده به هم نیز بررسی می‌شود.

1 مقدمه

در حل ـ مسئله‌ها ی ـ مقدار مرزی در الکتروستاتیک از روش‌ها ی ـ مختلفی استفاده می‌شود. از این روش‌ها می‌توان به جداسازی متغیرها، نگاشت ـ هم‌دیس، استفاده از تابع ـ گرین، روش ـ تصویری، معادلات ـ انتگرالی، و بسط ـ چندقطبی اشاره کرد. انتخاب ـ مناسب ـ هر یک از این روش‌ها، در حل ـ یک مسئله، با توجه به هندسه ی ـ مسئله صورت می‌گیرد و سبب ـ آسان‌تر شدن محاسبات خواهد شد. مسئله ی ـ دو کره ی ـ باردار، که کاربردها ی ـ زیادی در پدیده‌ها ی ـ صنعتی و طبیعی پیدا کرده است [1]، توجه ـ خیلی از فیزیک‌پیشه‌ها و ریاضی‌پیشه‌ها را بیش از صد سال است که به خود جلب کرده است. از جمله پوَ سون [2]، کلوین [3]، ماکسول [4]، راسِل [5] و ... وقتی دو کره ی ـ رسانا (قطبیده) ی ـ باردار نزدیک ـ هم قرار می‌گیرند، القاء ـ متقابل بین ـ کره‌ها باعث می‌شود توزیع ـ بار و نیرو ی ـ برهم‌کنش به اندازه ی ـ کره‌ها بسته‌گی داشته باشد. برای ـ حلّ ـ این مسئله از روشهای ـ مختلفی استفاده شده است [6]. یکی از این روش‌ها استفاده از مختصات ـ دوکروی است. در کتاب ـ آرفکن مسئله ی ـ ظرفیت ـ دستگاه ـ کره ـ صفحه به صورت ـ تمرینی در کاربرد ـ این مختصات آمده است. با استفاده از مختصات ـ دوکروی، معادله‌ی ـ لَپلَس R جداشدنی است [8]. بنابراین می‌توان عبارت‌هایی برای ـ پتانسیل، ضریب‌ها ی ـ ظرفیت، و نیرو به‌دست آورد. امّا جواب‌ها ی ـ به‌دست آمده برای ـ نیرو برحسب ـ انتگرال‌ها ی ـ معیّن، یا تابع‌ها ی ـ ناآشنا است، که در مقایسه با روشهای ـ دیگر پیچیده‌تر است و کار ـ تحلیل ـ مسئله را دشوار می‌کند [7]. در روش ـ تصویر، با تعیین ـ توزیع ـ بارها ی ـ تصویری، دیگر نیاز ی به حلّ ـ معادله ی ـ لَپلَس نیست.



شکل 1: تصویرهای متوالی برای دو کره که یکی به زمین وصل شده است.

2 ضریب‌ها یِ ظرفیتِ دو کره

فرض کنید دو کره یِ رسانا به شعاع‌ها یِ R_1 و R_2 و بارها یِ Q_1 و Q_2 داریم که مرکزها یِ آن‌ها به فاصله یِ $d > R_1 + R_2$ از هم باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم کره یِ ۱ در پتانسیلِ V باشد و کره یِ ۲ به زمین وصل باشد، (شکلِ 1). می‌خواهیم دو کره را با مجموعه‌ای از بارها یِ نقطه‌ای که درونِ کره‌ها قرار دارند، جای‌گزین کنیم به‌طوری که همان میدانِ الکتریکیِ دو کره را ایجاد کند. اوّلین گام قرار دادنِ بارِ $q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V$ در مرکزِ کره یِ ۱ است تا پتانسیلِ V را رویِ سطحِ آن تولید کند. امّا با این کار پتاسیلِ سطحِ کره یِ ۲ به هم می‌خورد. پس لازم می‌شود بارِ تصویریِ q_2 را داخلِ کره یِ ۲ قرار دهیم تا پتانسیلِ کره یِ ۲ را در مقدارِ صفر نگه دارد. به همین ترتیب وجودِ بارِ q_2 پتانسیلِ کره یِ ۱ را به هم می‌زند و باید بارِ تصویریِ q_3 را داخلِ کره یِ ۱ قرار داد.

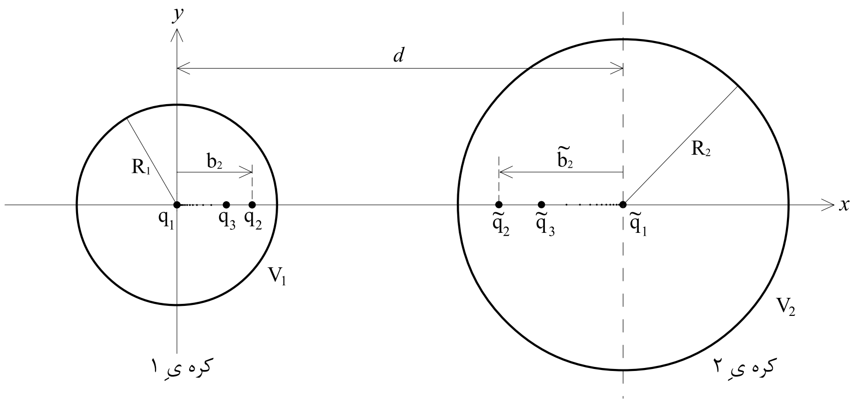
بارها یِ داخلِ کره یِ ۱ و فاصله‌هایشان از مبداء عبارتند از: $(j = 1, 2, 3, ...)$

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V, \qquad b_1 = 0, \qquad q_{(2j+1)} = -\frac{R_1}{b_{(2j)}} q_{(2j)}, \qquad b_{(2j+1)} = \frac{R_1^2}{b_{(2j)}} \tag{1}$$

بارها یِ داخلِ کره یِ ۲ و فاصله‌هایشان از مبداء عبارتند از: $(j = 1, 2, 3, ...)$

$$q_2 = -\frac{R_2}{d}\, q_1, \qquad b_2 = \frac{R_2^2}{d}, \qquad q_{(2j)} = -\frac{R_2}{b_{(2j-1)}} q_{(2j-1)}, \qquad b_{(2j)} = \frac{R_2^2}{b_{(2j-1)}} \tag{2}$$

با جمع‌کردنِ بارها یِ داخلِ کره یِ ۲ و تقسیمِ آن بر اختلاف پتانسیلِ بینِ کره یِ ۱ و کره یِ ۲ به‌دست می‌آید:



شکل 2:   تصویرهای متوالی برای دو کره با پتانسیل‌های مختلف .

$$c_{12} = c_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{q_1}(q_2 + q_4 + q_6 + \cdots) \tag{3}$$

هم‌چنین مجموع ِ بارها ی ِ داخل ِ کره یِ ۱ تقسیم بر اختلاف پتانسیل ِ دو کره می‌شود:

$$c_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{q_1}(q_1 + q_3 + q_5 + \cdots) \tag{4}$$

با تبدیل ِ R_1 به R_2، در رابطه ی ِ c_{11}، می‌توان c_{22} را نیز به‌دست آورد. رابطه‌ها ی ِ بالا برای ِ محاسبه ی ِ دقیق مناسب نیستند، مگر این که $d \gg R_{1,2}$ باشد. با به‌دست آوردن ِ یک رابطه ی ِ کلی بین ِ تصویرها ی ِ متوالی و حلّ ِ معادله ی ِ تفاضلی ِ حاصل، می‌توان نمایش ِ بسته‌ای برای ِ سری‌ها به‌دست آورد. فرض کنید n اُمین تصویر داخل ِ کره یِ ۱، q_n و تصویر ِ q_n داخل ِ کره یِ ۲، $\widetilde{q}_n$ باشد. فاصله ی ِ بین ِ مرکز ِ کره یِ ۱ تا q_n را b_n و فاصله ی ِ بین ِ مرکز ِ کره یِ ۲ تا $\widetilde{q}_n$ را $\widetilde{b}_n$ می‌گیریم. در نتیجه:

$$\widetilde{q}_n = -\frac{R_2}{d - b_n} q_n, \qquad \widetilde{b}_n = \frac{R_2^2}{d - b_n} \tag{5}$$

$$q_{n+1} = -\frac{R_1}{d - \widetilde{b}_n}\widetilde{q}_n = +\frac{R_1 R_2}{d(d - b_n) - R_2^2} q_n \tag{6}$$

$$b_{n+1} = \frac{R_1^2}{d - \widetilde{b}_n} = \frac{R_1^2(d - b_n)}{d(d - b_n) - R_2^2} = \frac{R_1}{R_2}\frac{q_{n+1}}{q_n}(d - b_n) \tag{7}$$

با حذف ِ $d - b_n$ داریم:

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{d}{R_1^2}\frac{q_n}{q_{n+1}}b_{n+1} - \frac{R_2}{R_1} \tag{8}$$

با تبدیل ِ n به $n - 1$ در رابطه ی ِ بالا و حذف ِ b_n به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n-1}} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{R_1 R_2}\frac{1}{q_n} \tag{9}$$

این یک معادله ی ِ تفاضلی ِ مرتبه ی ِ دوّم با ضریب‌ها ی ِ ثابت است. روش ِ کلّی ِ حل این است که قرار دهیم $1/q_n = u^n$ و با تقسیم بر u^{n-1} معادله ی ِ جبری ِ حاصل را برای ِ u حل کنیم. اگر u_1 و u_2 دو جواب باشند، جواب ِ معادله ی ِ تفاضلی $1/q_n = A\ u_1^n + B\ u_2^n$ است که A و B از شرایط ِ اوّلیه به‌دست می‌آیند. یک جواب ِ معادله ی ِ بالا چنین است:

$$\frac{1}{q_n} = A\cosh n\alpha + B\sinh n\alpha \tag{10}$$

که $\alpha = \cosh^{-1}\left(\frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2}\right)$. برای ِ محاسبه ی ِ A و B داریم:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V} = A\cosh\alpha + B\sinh\alpha$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{d^2 - R_2^2}{R_1 R_2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V} = (2\cosh\alpha + \frac{R_1}{R_2})\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V} = A\cosh 2\alpha + B\sinh 2\alpha$$

با حل ِ دستگاه ِ دومعادله‌ای ی ِ بالا برای ِ A و B به‌دست می‌آید:

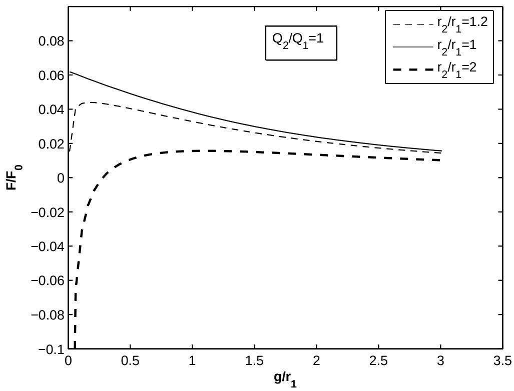
$$A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2 V}, \qquad B = \frac{R_2 + R_1\cosh\alpha}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 V \sinh\alpha}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{q_n} = \frac{R_2\sinh n\alpha + R_1\sinh(n-1)\alpha}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 V\sinh\alpha} \tag{11}$$

با جمع ِ بارها ی ِ داخل ِ کره‌ی ِ 1، به‌دست می‌آید:

$$c_{11} = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \sinh\alpha \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R_2\sinh n\alpha + R_1\sinh(n-1)\alpha} \tag{12}$$



شکل 3: نیروی ِ کولُنی ِ بین ِ دو کره را بارهای ِ برابر به صورت ِ تابعی از فاصله‌ی ِ جدایی ِ دو کره از هم. $F_0 = k\,(2\,\pi)^2\,(Q_1/(4\,R_1))^2$ و g فاصله‌ی ِ فضای ِ خالی ِ بین ِ دو کره است.

برای تعیین ِ c_{12} بایستی $\widetilde{q_n}$ ها را به‌دست آوریم. با حذف ِ $d - b_n$ داریم:

$$-\frac{1}{\widetilde{q_n}} = \frac{R_1}{d}\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{R_2}{d}\frac{1}{q_n} \tag{13}$$

با قرار دادن ِ $1/q_n$ و $1/q_{n+1}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\widetilde{q_n}} = -\frac{d\sinh n\alpha}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 V \sinh\alpha} \tag{14}$$

در نتیجه:

$$c_{12} = -\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \sinh\alpha}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh n\alpha} \tag{15}$$

همچنین بنا به تقارن داریم:

$$c_{22} = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \sinh\alpha \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R_1\sinh n\alpha + R_2\sinh(n-1)\alpha} \tag{16}$$

3 محاسبه‌ی نیرو

تا به حال پتانسیل ِ کره ی ِ ۲ را صفر گرفتیم، زیرا اجازه می‌داد تا جداگانه مُئلّفه‌های ِ c_{ij} را محاسبه کنیم. اگر کره ی ِ ۱ به پتانسیل ِ V_1 (بار ِ Q_1) و کره ی ِ ۲ به پتانسیل ِ V_2 (بار ِ Q_2) وصل باشند، در این صورت علاوه بر بار ِ q_1 در مرکز ِ کره ی ِ ۱، بار ِ $\widetilde{q}_1$ را در مرکز ِ کره ی ِ ۲ قرار می‌دهیم تا پتانسیل َش V_2 شود. بارها ی ِ تصویری ِ $q_n, \widetilde{q}_n$ و مکان‌هایشان $b_n, \widetilde{b}_n$ برابرند با:

$$q_n = -\frac{R_1}{d - \widetilde{b}_{n-1}}\widetilde{q}_{n-1}, \qquad b_n = \frac{R_1^2}{d - \widetilde{b}_{n-1}} \tag{17}$$

$$\widetilde{q}_n = -\frac{R_2}{d - b_{n-1}}q_{n-1}, \qquad \widetilde{b}_n = \frac{R_2^2}{d - b_{n-1}} \tag{18}$$

می‌توان نشان داد:

$$b_n = \frac{d^2 - R_2^2}{d} - \frac{R_1 R_2}{d}\frac{q_n}{q_{n+2}} \tag{19}$$

$$\frac{1}{q_{n-2}} + \frac{1}{q_{n+2}} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{R_1 R_2}\frac{1}{q_n} \tag{20}$$

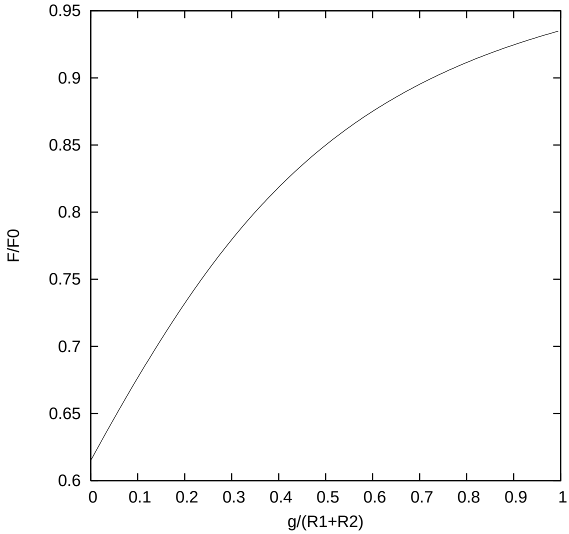
با تعریف ِ $\cosh 2\alpha := \dfrac{d^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2}$ ، دوباره جواب ِ معادله ی ِ تفاضلی را به‌صورت ِ $1/q_n = A\cosh n\alpha + B\sinh n\alpha$ می‌گیریم. برای ِ n ها ی ِ فرد به دستگاه ِ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} A\cosh\alpha + B\sinh\alpha &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V_1} \\ A\cosh 3\alpha + B\sinh 3\alpha &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V_1}(2\cosh 2\alpha + \frac{R_1}{R_2}) \end{aligned} \tag{21}$$

برای ِ A و B به‌دست می‌آید:

$$A = \frac{1 - R_1/R_2}{2\cosh\alpha}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V_1}, \qquad B = \frac{1 + R_1/R_2}{2\sinh\alpha}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V_1}$$

در نتیجه:



شکل 4: نمودار تغییرات نیروی دو کره (که با نیروی دو بار در مرکز کره‌ها بهنجار شده است)، F_s/F_0، بر حسب کمیت $g/(R_1+R_2)$. (شرط $Q_1 = Q_2$ و $R_1 = R_2$ برقرار است.)

$$q_n^o = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1 \frac{R_2 \sinh 2\alpha}{R_1 \sinh(n-1)\alpha + R_2 \sinh(n+1)\alpha},$$

$$b_n^o = R_1 \frac{d \sinh(n-1)\alpha}{R_1 \sinh(n-1)\alpha + R_2 \sinh(n+1)\alpha}.$$

به همین ترتیب برای ـِ n ها ی ـِ زوج به دست می‌آید:

$$q_n^e = 4\pi\epsilon_0 R_2 V_2 \frac{R_1 \sinh 2\alpha}{d \sinh n\alpha}, \qquad b_n^e = R_1 \frac{R_1 \sinh n\alpha + R_2 \sinh(n-2)\alpha}{d \sinh n\alpha}.$$

بنا به تقارن، رابطه‌ها ی ـِ $\widetilde{q}_n$ و $\widetilde{b}_n$ از تعویض ـِ R_1 به R_2 و V_1 به V_2 به‌دست می‌آید. بار ـِ کره‌ها هم برابر است با:

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = c_{11} V_1 + c_{12} V_2, \qquad Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{q}_n = c_{21} V_1 + c_{22} V_2.$$

با دانستن ـِ اندازه ی ـِ بارها و مکان‌ها می‌توان نیرو را با جمع‌بندی به‌دست آورد.

$$F = k \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_n \widetilde{q}_m}{\left| d - (b_n + \widetilde{b}_m) \right|^2}. \tag{22}$$

هم‌چنین می‌توان نیرویی را که دو کره ی ِ رسانا به هم وارد می‌کنند از انرژی ِ الکتروستاتیک محاسبه کرد.

$$U = \frac{1}{2} c_{11} V_1^2 + c_{12} V_1 V_2 + \frac{1}{2} c_{22} V_2^2 = \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2 + p_{12} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} p_{22} Q_2^2 \tag{23}$$

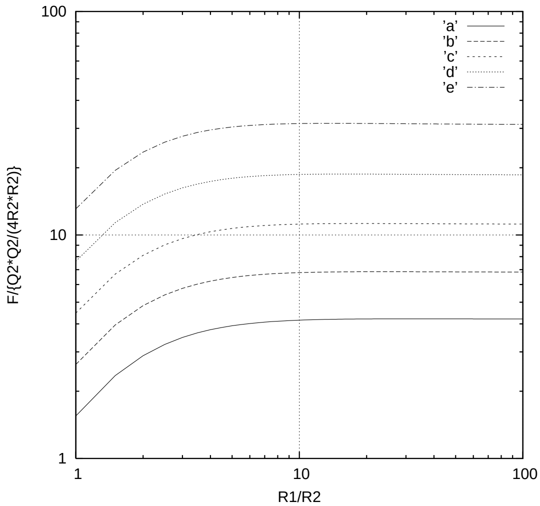
ضریب ها ی ِ ظرفیت از رابطه‌ها ی ِ (12)، (15) و (16) به‌دست می آیند. ضریب ها ی ِ پتانسیل عنصرها ی ِ ماتریس ِ وارون ِ c_{ij} هستند. نیرو هم می‌شود

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial d} \right) \tag{24}$$

در ادامه به بررسی ِ داده‌ها ی ِ عددی برای نیرو پرداخته‌ایم. در نمودار ِ شکل ِ 3 نیروی ِ دو کره با بارهای ِ برابر به صورت ِ تابعی از فاصله‌ی ِ جدایی ِ دو کره از هم برای ِ سه حالت ِ مختلف رسم شده است. مشاهده می‌شود که اگر $R_1 > 1.24\, R_2$ باشد، نیروی ِ دو کره‌ی ِ با بارهای ِ برابر جاذبه می‌شود. نمودار ِ شکل ِ 4، تغییرات ِ نیرو ی ِ دو کره (که با نیرو ی ِ دو بار در مرکز ِ کره‌ها بهنجار شده است)، یعنی F_s/F_0 را بر حسب ِ کمیت ِ $g/(R_1 + R_2)$ نشان می‌دهد. (g فاصله ی ِ فضا ی ِ خالی ِ بین ِ دو کره است.) در این نمودار فرض بر این است که کره‌ها بار و شعاع‌هایی برابر دارند. این نمودار نشان می‌دهد که مستقل ازمقدار ِ بار و یا شعاع، داده‌ها بر روی ِ یک نمودار قرار می‌گیرند و برای ِ فاصله‌ها ی ِ بسیار کم مقدار ِ F_s/F_0 به عدد ِ0.6189 میل می‌کند که با مقدار ِ عددی ِ ارائه شده در مرجع ِ [9] هم‌خوانی دارد. به طوری که مشاهده می‌شود، مقدار ِ بهنجارشده ی ِ نیرو در حد ِ فاصله‌ها ی ِ دور به یک میل می‌کند که گویا ی ِ تبدیل ِ سیستم به دو بار ِنقطه‌ای است. در نمودار ِشکل ِ 5، R_1/R_2 را تغییر داده و مقدار ِبهنجارشده ی ِ نیرو را برای ِ مقادیر ِمختلف ِ g به‌دست آورده‌ایم. به این منظور مقدار ِبار ِ Q_2 را صفر گرفته‌ایم. این نمودار نشان می‌دهد که کاهش ِ g سبب ِ افزایش ِ نیرو می‌شود. و برای ِ یک g ی ِ ثابت با افزایش ِ R_1/R_2، مقدار ِبهنجارشده‌ی ِ نیرو تقریباً ثابت می‌ماند. نمودار ِ به‌دست آمده با داده‌ها ی ِ رسم شده در مرجع ِ [10] در توافق ِ کامل است.

4 دو کره ی ِ رسانا ی ِ باردار ِ چسبیده به هم

در این حالت $d = R_1 + R_2$ و معادله ی ِ تفاضلی می‌شود:



شکل 5: نیروی بهنجار شده بین دو کره‌ی رسانا (فقط کره‌ی کوچک‌تر باردار شده است.)a : $g = R_2/32$، b : $g = R_2/64$، c : $g = R_2/128$، d : $g = R_2/256$، e : $g = R_2/512$

$$\frac{1}{q_{n+2}} + \frac{1}{q_{n-2}} = \frac{2}{q_n} \tag{25}$$

با نوشتن ِ معادله ی ِ مشخصه، دو ریشه ی ِ تکراری ِ ± 1 به‌دست می‌آید. پس $1/q_n$ به‌صورت ِ زیر است:

$$\frac{1}{q_n} = A_0 + A_1 n + (-1)^n (B_0 + B_1 n) \tag{26}$$

دوباره ضرایب را با شرایط ِ اولیه به‌دست می‌آوریم. در نتیجه:

$$q_n = \frac{16\pi\epsilon_0 V_0 R_1 R_2}{[2nd + (R_2 - R_1)](-1)^{n+1} + (R_2 - R_1)} \tag{27}$$

به همین ترتیب برای ِ $\widetilde{q_n}$ به‌دست می‌آید: (به دلیل ِ تقارن جای ِ R_1 و R_2 عوض می‌شود.)

$$\widetilde{q_n} = \frac{16\pi\epsilon_0 V_0 R_1 R_2}{[2nd - (R_2 - R_1)](-1)^{n+1} - (R_2 - R_1)} \tag{28}$$

از رابطه ی ـ $b_n = \dfrac{d^2 - R_2^2}{d} - \dfrac{R_1 R_2}{d}\dfrac{q_n}{q_{n+2}}$ هم به‌دست می‌آید:

$$b_n = \frac{1}{d}\left[R_1^2 + R_1 R_2\left(\frac{[2(n-2)d + (R_2 - R_1)](-1)^{n+1} + (R_2 - R_1)}{[2nd + (R_2 - R_1)](-1)^{n+1} + (R_2 - R_1)}\right)\right] \tag{29}$$

رابطه ی ـ $\widetilde{b}_n$ هم با تعویض ـ جای ـ R_1 و R_2 به‌دست می‌آید.

بار ـ کل روی ـ هر کره با جمع‌کردن ـ بارها ی ـ تصویری داخل ـ همان کره به‌دست می‌آید:

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 4\pi\epsilon_0 V_0 R_1 \cdot S_1, \qquad Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{q}_n = 4\pi\epsilon_0 V_0 R_2 \cdot S_2 \tag{30}$$

که در آن S_1 و S_2 برابرند با: [بانوشتن ـ $(R_2 - R_1) = 2R_2 - d$ و جمع‌زدن روی ـ n ها ی ـ زوج و فرد]

$$S_1 = R_2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)d + R_2} - \frac{1}{nd}\right), \qquad S_2 = R_1 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)d + R_1} - \frac{1}{nd}\right)$$

در نتیجه پتانسیل ـ دستگاه می‌شود:

$$V_0 = \frac{Q_{10} + Q_{20}}{4\pi\epsilon_0 (R_1 S_1 + R_2 S_2)}. \tag{31}$$

چون S_1 و S_2 کوچک‌تر از 1 اَند، پتانسیل ـ دو کره ی ـ چسبیده به هم بیشتر از وقتی است که دو کره را با یک سیم ـ دراز به هم وصل کنیم. پتانسیل در یک نقطه بیرون ـ کره، جمع ـ پتانسیل ـ تمام ـ بارها ی ـ تصویری ـ داخل ـ کره‌ها است:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_n}{r_n} + \frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{r}_n}\right). \tag{32}$$

با انتخاب ـ مبدَاء ـ دستگاه ـ مختصات در مرکز ـ کره یِ ۱ و محور ـ z در راستا ی ـ محور ـ تقارن ـ دو کره، r_n و $\widetilde{r}_n$ می‌شوند:

$$r_n = (r^2 + b_n^2 + 2rb_n\cos\theta)^{1/2}, \qquad \widetilde{r}_n = (r^2 + (d - \widetilde{b}_n)^2 + 2r(d - \widetilde{b}_n)\cos\theta)^{1/2},$$

که از این‌جا می‌توان عبارت‌هایی برای ـ چگالی ـ بار ـ سطحی ـ کره‌ها و نیرو به‌دست آورد. در حالت ـ خاصّ ـ $R_1 = R_2 = R$ $(d = 2R)$ و $Q_1 = Q_2 = Q$ نیرو ی ـ دافعه می‌شود:

$$F = \frac{V_0^2}{k}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\ n\ m}{(n+m)^2}, \tag{33}$$

که با محاسبه ی ـ سری [12]، به‌دست می آید:

$$F = \frac{V_0^2}{6k}(\ln 2 - \frac{1}{4}). \tag{34}$$

5 قدردانی

در رسم ـ نمودارها از نرم‌افزارهای ـ MATLAB و ++C استفاده شده است. از دوستانم، آقایان مولاداد ـ نیکبخت و یوسف ـ عزیزی برای ـ راه‌نمایی‌هایشان در کارهای ـ عددی تشکّر می‌کنم. از استاد ـ عزیزم، دکتر محمّد خرّمی، برای ـ راه‌نمایی‌هایشان در مدّت ـ انجام ـ این کار سپاس‌گزارم.

6 یادداشت‌ها و مراجع

[1] نیرو ی ـ چسبنده‌گی بین ـ یک کره ی ـ باردار ـ دی‌الکتریک در تماس با یک صفحه ی ـ رسانا در حوزه‌ها ی ـ مختلفی مثل ـ الکتروفُتوگرافی (نیروی ـ کولُن باید بر چسبنده‌گی ـ "تونِر"ها غلبه کند)، نیمه‌رساناها (حذف ـ ناخالصی‌ها ی ـ باردار در ابعاد ـ میکرُن در ساختن ـ وسایل ـ نیمه‌رسانا) و میکرُسکپ ـ نیرو ی ـ اتمی (توضیح ـ نمودارها ی ـ نیرو—فاصله) کاربرد دارد. برهم‌کنش ـ بین ـ کره‌ها ی ـ رسانا ی ـ نزدیک ـ هم در تشکیل ـ aerosole ها اساسی است. زیرا هر تغییر در سطح ـ این ذرّات مستقیماً بر آهنگ ـ تشکیل ـ آن‌ها اثر می‌گذارد.

[2] M. Poison, Mem. Sci. Math. de l' Inst. Imp. Fr. **12**, (1811)

[3] W. Thomson, Philos. Mag. **5**, 287 (1853)

[4] J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. 1, Oxford, 1873, § 171-3, p. 266.

[5] A. Russell: "The Capacity Coefficients of Spherical Electrodes", *Proc. Phys. Soc. London*, vol. 23, (1911)

[6] علاوه بر مختصات ـِ دوکروی و روش ـِ تصویر، از این‌ها هم استفاده شده است:

(i) استفاده ی ـِ مستقیم از قانون ـِ کولُـن [13]؛

(ii) روش ـِ بسط ـِ مجدّد؛ برای ـِ دو کره می‌توان جمله‌ها ی ـِ بسط ـِ لُـژاندر ـِ پتانسیل ـِ یک‌ی از کره‌ها را حول ـِ مرکز ـِ کره ی ـِ دیگر بسط داد. با استفاده از رابطه ی ـِ حاصل و اعمال ـِ شرایط ـِ مرزی، معادلات ـِ حاکم بر ضریب‌ها ی ـِ بسط ـِ پتانسیل به‌دست می‌آید. با محاسبه ی ـِ این ضریب‌ها چگالی ـِ سطحی و درآخر نیرو به‌دست می‌آید [10].

(iii) تبدیل ـِ کلوین؛ با استفاده از این نگاشت ـِ هم‌دیس (که همان تبدیل ـِ وارون در سه‌بعد است) می‌توان دو کره ی ـِ بیرون ـِ هم را به دو کره ی ـِ هم‌مرکز تبدیل کرد. با پیدا کردن ـِ پتانسیل در هندسه ی ـِ نگاشت‌یافته، پتانسیل در مسئله ی ـِ اصلی هم معلوم می‌شود [4].

[7] M. H. Davis, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 17, p. 499 (1964)

[8] P. M. Morse & H. Feshbach, *Methods of Theoritical Physics*, McGrow-Hill, 1953

[9] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Willey, 1998, p. 87.

[10] Y. Nakajima & T. Sato: "Calculation of electrostatic force between two charged dielectric spheres by re-expansion method",*Journal of Electrostatics*, vol. 45, p. 213 (1999)

[11] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, McGrow-Hill, 1968

[12] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, 1980

[13] A. V. M. Khachatourian, A. O. Wistrom: "Evaluation of the Coulumb force via the Fredholm integral equations", *Journal of Physics A*, vol. 33, p. 307 (2000)

7 اسم‌ها ی ِ خاص

[a] Poison, [b] Kelvin, [c] Maxwell, [d] Russell, [e] Morse - Feshbach, [f] Arfken