شوک در معادلاتِ شبهِخطی

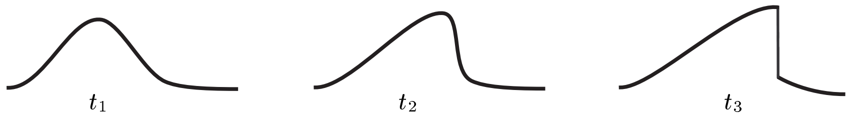
مریم عرب‌سلمانی

جواب یک معادله‌ی شبه‌خطی، بسته به شرط آغازین می‌تواند دچار ناپیوستگی شود، که این ناپیوستگی (شوک) با استفاده از قانون بقایی که معادله از آن استخراج شده قابل تحلیل است. در این مقاله با ارائه‌ی چند مثال روش حل معادلات شبه‌خطی با استفاده از خم‌های مشخصه ارائه می‌شود، و جواب‌های شوک مربوط به این معادلات بررسی می‌شوند. در مثال‌های ذکر شده به طور خاص معادله‌ی بِرگِرز بدون جمله‌ی پخش، $\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ را بررسی می‌کنیم.

1 مقدمه

فرض کنیم u تابعی از متغیرهای مکان، x، و زمان، t، باشد. برای مثال u می‌تواند معرفِ میدانِ سرعتِ یک سیال یا تعدادِ ماشین‌های موجود در یک خیابان باشد. اگر این تابع در زمانِ دلخواهِ t_0 در نقطه‌ی $x = s$ ناپیوسته باشد، می‌گوییم u در این نقطه، که به نقطه‌ی شوک موسوم، شوک دارد. نقاطِ شوک با گذشتِ زمان می‌توانند تغییرِ مکان دهند، و به عبارتی مثلِ موج منتشر شوند (موجِ شوک). چگونگیِ انتشارِ این موج به معادله‌ی توصیف‌کننده‌ی u بستگی دارد. گاهی اوقات این ناپیوستگی از ابتدا وجود دارد و با گذشتِ زمان نیز ادامه پیدا می‌کند. اما در بعضی موارد u ابتدا تابعی پیوسته از x است و در زمان‌های بعدی ناپیوسته می‌شود و موجِ شوک به وجود می‌آید. مثلاً اگر u جوابِ معادله‌ی $u_t + u\,u_x = 0$ باشد[1]، و $u(x, t_1)$ به صورتی باشد که در شکلِ ۱ الف آمده، آن وقت نمودارِ u بر حسبِ x در زمان‌های t_2 و t_3، به طورِ کیفی چنان است که در شکلِ ۱ ب و ج نشان داده شده. همان‌طور که می‌بینیم در زمانِ t_3 یک ناپیوستگی در u به وجود آمده. این ناپیوستگی در زمان‌های بعدی نیز باقی می‌ماند.

[1] شاخص‌های t و x نشان‌دهنده‌ی مشتق‌های جزئی هستند، به این ترتیب $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$ و $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ است.



شکل 1: اگر $u(t,x)$ در $t = t_1$ مثلِ شکلِ الف باشد، و تحول آن طبق معادلهٔ $u_1 + u\,u_x = 0$ باشد، در لحظه‌هایِ بعدیِ t_2 و t_3 به طورِ کیفی مثلِ شکل‌هایِ ب و ج خواهد بود. شکلِ ج تشکیلِ شوک است.

در مباحثی مثلِ مکانیک سیالات و فیزیکِ سطح با معادله‌هایی نظیرِ معادله‌ی نویر ـ استوکس [a]، و معادله‌ی برگرز [b] مواجه می‌شویم. این دو در شرایطی به معادله‌ی $u_t + uu_x = 0$ تبدیل می‌شوند. معادله‌ی اخیر بسته به وضعیت آغازین ($u(x,0)$)، می‌تواند جوابِ شوک داشته باشد. در این مقاله به بررسیِ شوک در چنین معادلاتی می‌پردازیم.

2 معادلاتِ شبهِ‌خطی

فرض کنیم u تابعی از دو متغیرِ x و t باشد و معادله‌ی زیر بر آن حاکم باشد.

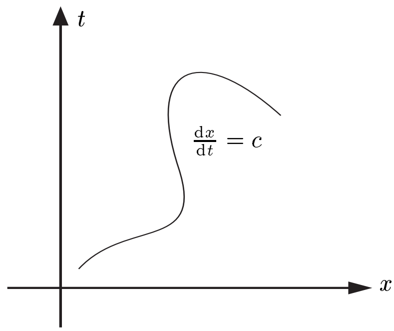
$$u_t + C(u,x,t)\,u_x = G(u,x,t). \tag{1}$$

این معادله علی‌الاصول غیرخطی است؛ اما غیرخطی بودن آن ناشی از ضربِ مشتق‌های u در یکدیگر نیست، و در همه‌ی جملاتِ آن مجموعِ توانِ مشتق‌های u حداکثر 1 است. به چنین معادله‌ای، شبهِ‌خطی می‌گوییم. اگر C به u بستگی نداشته باشد، می‌گوییم معادله‌ی (1) نیمه‌خطی است. اگر C مستقل از u باشد و G نسبت به u خطی باشد، معادله خطی می‌شود.

3 روشِ خمِ مشخصه

برای حلِ معادلاتِ شبه‌خطی با شرط اولیه‌ی خاص، از روش خمِ مشخصه استفاده می‌کنیم. در حل این معادلات، خود را به $t \geq 0$ محدود می‌کنیم. داریم

$$u_t + C(u,x,t)\,u_x = G(u,x,t), \tag{2}$$



شکل 2: خم مشخصه

$$u(x,0) = F(x). \tag{3}$$

هدف، به دست آوردنِ u در همه‌ی نقاط (x,t) در صفحه‌ی x و t است. در این صفحه خمی را در نظر می‌گیریم که شیبِ آن $1/C$ باشد (محورِ x را افقی می‌کشیم).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C(x,t,u). \tag{4}$$

به این خم، خمِ مشخصه می‌گوییم. برای نقطه‌های روی این خم، معادله‌ی (2) به شکل زیر می‌شود

$$u_t + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\, u_x = G. \tag{5}$$

طرفِ چپِ (5) چیزی نیست جز $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$؛ بنابراین روی خمِ مشخصه‌ی ذکر شده، معادله‌ی حاکم بر u عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = G. \tag{6}$$

با حلِ این معادله، u را روی خمِ مشخصه‌ی مورد نظر داریم . به این ترتیب اگر به جای (2)، معادلاتِ زیر را هم‌زمان حل کنیم، u را روی همه‌ی خم‌های مشخصه داریم .

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = G, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C. \tag{8}$$

اگر خم‌های مشخصه کلِ صفحه‌ی (x,t) را بپوشانند، u را در همه‌ی نقاط خواهیم داشت.

3.1 مثالِ ۱

می‌خواهیم معادله‌ی زیر را با شرط اولیه‌ی ذکر شده به روش خم مشخصه حل کنیم.

$$u_t + uu_x = 2u, \tag{9}$$

$$u(x_0, 0) = bx_0 \tag{10}$$

که b مقداری ثابت است. منظور از x_0، همان x در $t = 0$ است. به جای معادله‌ی بالا، هم‌زمان دو معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2u, \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u. \tag{12}$$

ابتدا معادله‌ی (11) را در نظر می‌گیریم

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\mathrm{d}t \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{u(x,t)}{u(x_0,0)} = 2t \tag{14}$$

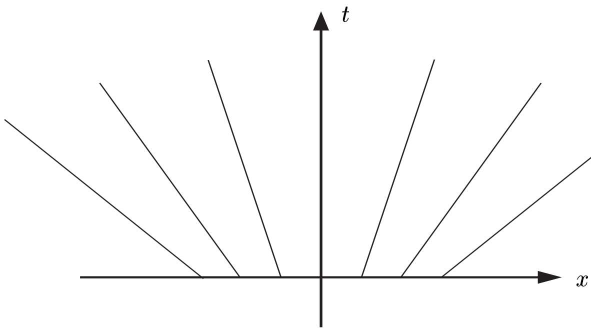
$$\Rightarrow \quad u = bx_0e^{2t}. \tag{15}$$

برای تعیینِ معادله‌ی خمِ مشخصه، با استفاده از (15) معادله‌ی (12) را حل میکنیم.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = bx_0e^{2t} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{b}{2}x_0(e^{2t} - 1). \tag{16}$$

در نهایت از رابطه‌ی (16)، x_0 را بر حسبِ x و t به دست می‌آوریم و با جای‌گذاریِ آن در (15)، u بر حسبِ x و t به دست می‌آید.

$$x_0 = \frac{2x}{(2-b)+be^{2t}} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2bxe^{2t}}{(2-b)+be^{2t}}. \tag{17}$$



شکل 3: خطوط مشخصه، مربوط به مثالِ ۳)

3.2 مثالِ ۲

معادله‌ی زیر را با شرط اولیه‌ی $u(x_0, 0) = F(x_0)$ در نظر بگیریم

$$u_t - 2u_x = e^{2x}. \tag{18}$$

داریم

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -2t + x_0. \tag{19}$$

روشن است که خطوطِ مشخصه، صفحه‌ی x و t را می‌پوشانند. با استفاده از (19) نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^{2x} \tag{20}$$

$$= e^{2(-2t+x_0)}. \tag{21}$$

با حلِ این معادله وبا توجه به این‌که $x_0 = x + 2t$، u به صورتِ زیر می‌شود

$$u = \frac{1}{4}e^{2x}(e^{4t} - 1) + F(x + 2t). \tag{22}$$

معادلاتِ مورد نظرِ ما، معادله‌هایی هستند که در آن‌ها G صفر است و C فقط به u بستگی دارد. یعنی

$$u_t + C(u)u_x = 0. \tag{23}$$

با توجه به (23)، معادله‌های (7) و (8) به صورتِ زیر می‌شوند

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C(u). \tag{25}$$

به این ترتیب در طولِ یک خمِ مشخصه، u تغییر نمی‌کند و همان مقداری را دارد که در $t = 0$ داشته است. بنابراین شیبِ خمِ مشخصه‌ای که در $t = 0$ از نقطه‌ی x_0 می‌گذرد، در همه‌ی نقاط مقدارِ ثابتِ $u(x_0, 0)$ را دارد و به عبارتی خم‌های مشخصه، خطوطِ راستی هستند که شیبِ آن‌ها به نقطه‌ی شروعشان وابسته است.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C(u) \quad \Rightarrow \quad x = Ct + x_0. \tag{26}$$

در ادامه، بررسیِ خود را به معادله‌ی (23) محدود می‌کنیم.

3.3 مثالِ ۳

معادله‌ی زیر را در نظر بگیریم

$$u_t + uu_x = 0, \tag{27}$$

$$u(x_0, 0) = 3x_0. \tag{28}$$

داریم

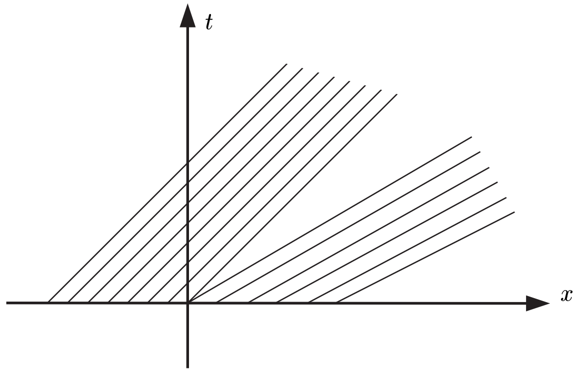
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = u(x_0, 0) \tag{29}$$

$$= 3x_0. \tag{30}$$

بنابراین معادله‌ی خم‌های مشخصه به صورت زیر می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x_0 \quad \Rightarrow \quad x = 3x_0t + x_0. \tag{31}$$

با جایگذاریِ x_0 بر حسبِ x و t در (30) نتیجه می‌شود



شکل 4: خطوط مشخصه، مربوط به مثالِ ۴)

$$u(x,t) = \frac{3x}{3t+1}. \tag{32}$$

3.4 مثالِ ۴

مجدداً معادله‌ی $u_t + uu_x = 0$ را با شرط اولیه‌ی زیر در نظر بگیریم

$$u(x_0, 0) = \begin{cases} 1 & x_0 < 0 \\ \\ 2 & x_0 > 0 \end{cases} \tag{33}$$

در طولِ خطوط مشخصه داریم

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \begin{cases} 1 & x_0 < 0 \\ \\ 2 & x_0 > 0 \end{cases} \tag{34}$$

بنابراین معادله‌ی خطوط مشخصه به صورت زیر می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} t + x_0 & x_0 < 0 \\ \\ 2t + x_0 & x_0 > 0 \end{cases} \tag{35}$$

با توجه به شکل ۳، u در ناحیه‌ی $x < t$ مقدارِ 1 و در ناحیه‌ی $x > 2t$ مقدارِ 2 را دارد. درباره‌ی مقدارِ u در ناحیه‌ی $t < x < 2t$ چیزی نمی‌دانیم. بنابراین

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x<t\\ \\ ? & t<x<2t\\ \\ 2 & 2t<x\end{cases}\tag{36}$$

همان‌طور که می‌بینیم در این مثال خطوط مشخصه، صفحه‌ی x و t را نمی‌پوشانند و در یک ناحیه از این صفحه، هیچ خطِ مشخصه‌ای وجود ندارد. بنابراین با استفاده از این روش نمی‌توانیم u را در ناحیه‌ی $t<x<2t$ تعیین کنیم.

3.5 مثالِ ۵

معادله‌ی $u_t+uu_x=0$ را این‌بار با شرط اولیه‌ی زیر در نظر بگیریم

$$u(x_0,0)=\begin{cases}2 & x_0<0\\ \\ 1 & x_0>0\end{cases}\tag{37}$$

در طولِ خطوط مشخصه داریم

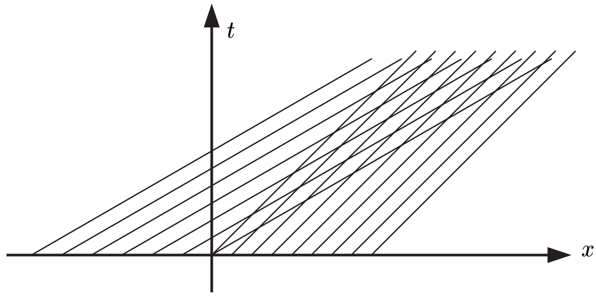
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0\quad\Rightarrow\quad u(x,t)=\begin{cases}2 & x_0<0\\ \\ 1 & x_0>0\end{cases}\tag{38}$$

بنابراین معادله‌ی خطوط مشخصه به صورت زیر می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\quad\Rightarrow\quad x=\begin{cases}2t+x_0 & x_0<0\\ \\ t+x_0 & x_0>0\end{cases}\tag{39}$$

همان طور که در شکل ۵ می‌بینیم برای نواحیِ $x<t$ و $x>2t$، مقدارِ u معین و به ترتیب برابر با 2 و 1 است. در ناحیه‌ی $t<x<2t$ از هر نقطه 2 خطِ مشخصه می‌گذرد که یکی مربوط به $u=1$ و دیگری مربوط به $u=2$ است. بنابراین u در این ناحیه، دومقداری است. اما اگر u ، دومقداری باشد، u_x و u_t تعریف نشده می‌شوند و به این ترتیب معادله‌ی $u_t+uu_x=0$ بی‌معنی خواهد بود. یعنی این جواب، جواب خوبی نیست. بنابراین در این مثال هم مقدارِ u در ناحیه‌ی $t<x<2t$ تعیین نمی‌شود.

$$u(x,t)=\begin{cases}2 & x<t\\ \\ ? & t<x<2t\\ \\ 1 & 2t<x\end{cases}\tag{40}$$



شکل 5: خطوط مشخصه، مربوط به مثالِ ۵)

4 چندمقداری شدنِ u و شوک

اگر u در معادله‌ی (23) صدق کند، مسیرِ همه‌ی نقاطی که مقدارِ u در آن‌ها یک مقدارِ خاص مانند u_0 است، در صفحه‌ی x و t با معادله‌ی زیر معین می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C(u_0). \tag{41}$$

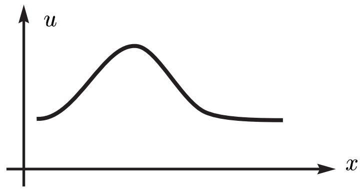
بنابراین اگر در زمانِ t و در نقطه‌ی x، u مقدارِ u_0 را داشته باشد، در زمانِ $t + \Delta t$، نقطه‌ی $x + C\Delta t$ همان مقدارِ u_0 را دارد. این مطلب را این‌طور تعبیر می‌کنیم که نقاطِ نمودارِ u بر حسبِ x با گذشتِ زمان با سرعتِ C حرکت می‌کنند. به عنوانِ مثال اگر داشته باشیم

$$u_t + c\, u_x = 0 \tag{42}$$

و c مقداری ثابت باشد، سرعتِ همه‌ی نقاطِ نمودارِ u ، یکسان و برابر با c است؛ بنابراین شکلِ نمودار با گذشت زمان تغییر نمی‌کند و تنها با سرعتِ c انتقال پیدا می‌کند. اما اگر معادله‌ی حاکم بر u به صورتِ زیر باشد

$$u_t + u\, u_x = 0 \tag{43}$$

به دلیلِ متفاوت بودنِ سرعتِ نقاط مختلف، شکل نمودارِ u بر حسبِ x با گذشت زمان عوض می‌شود. فرض کنیم در $t = t_0$ نمودارِ u بر حسبِ x مطابقِ شکلِ ۶ باشد در زمان‌های بعدی u به طور کیفی مثلِ شکلِ ۷ خواهد بود.



شکل 6: جواب معادله‌ی 43 در $t = t_0$.

به این ترتیب u در برخی نقاط چندمقداری می‌شود. اصطلاحاً می‌گوییم که در این نقاط شوک وجود دارد.

5 جوابِ ضعیف

همان‌طور که دیدیم جوابِ معادله‌ی (23) ممکن است در برخی نقاط، شوک داشته باشد و به عبارتی چندمقداری باشد. در اغلبِ موارد جوابِ چندمقداری بی‌معنی است. مثلاً فرض کنیم معادله‌ی حاکم بر سرعتِ یک سیال این‌چنین باشد. روشن است که هر نقطه‌ی سیال، یک سرعتِ معین دارد و چندمقداری بودنِ سرعت، غیر فیزیکی است. البته توجه داریم که جوابِ مورد نظر واقعاً چندمقداری نیست؛ چرا که در نقاطِ شوک اصلاً معادله‌ی (23) برقرار نیست؛ بلکه رابطه‌ی دیگری وجود دارد که از طریقِ آن می‌توانیم u را در آن نقاط محاسبه کنیم.

5.1 قانون بقا

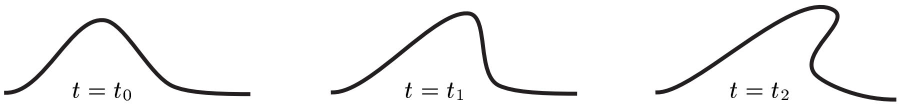
در بسیاری از مباحث، قوانینِ بقا به شکل زیر حاکم هستند

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho \mathrm{d}v + \oint_s \vec{j}.\mathrm{d}s = 0. \tag{44}$$

در این موارد، تغییراتِ زمانیِ کمیتی مثل $\rho(\vec{x},t)$ در ناحیه‌ای با حجم v، با جریانِ مربوط به آن کمیت روی سطحِ آن ناحیه، یعنی $\vec{j}(\vec{x},t)$، مربوط است. در 1 بُعد این رابطه به صورتِ زیر می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho \mathrm{d}x = j(b) - j(a). \tag{45}$$

اگر ρ و j، پیوسته و مشتق‌پذیر باشند (45) را می‌توان به شکل زیر نوشت



شکل 7: جوابِ معادله‌ی 43 در سه زمان مختلف.

$$\int_a^b \rho_t \mathrm{d}x = -\int_a^b j_x \mathrm{d}x. \tag{46}$$

بنابراین

$$\rho_t + j_x = 0. \tag{47}$$

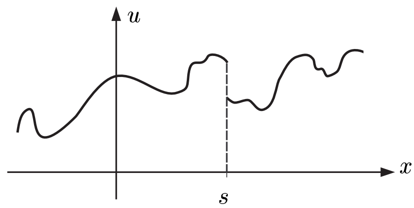
در این حالت (45) و (47) با یکدیگر هم‌ارز هستند و از یکی می‌توان دیگری را به دست آورد. بنابراین برای محاسبه‌ی جواب می‌توانیم بدون در نظر گرفتنِ (45)، معادله‌ی (47) را حل کنیم. برای مثال فرض کنیم

$$j = \frac{1}{2}\rho^2. \tag{48}$$

اگر ρ مشتق‌پذیر باشد، به جای معادله‌ی انتگرالیِ بقا، با معادله‌ی زیر کار می‌کنیم

$$\rho_t + \rho\rho_x = 0. \tag{49}$$

اما اگر ρ و j مشتق‌پذیر نباشند، رابطه‌ی (47) برقرار نیست. مثلاً موردِ مطرح شده در مثالِ ۵ را در نظر بگیریم. دیدیم که در یک ناحیه، u دومقداری می‌شود. اما نکته این است که در آن ناحیه اصلاً معادله‌ی $u_t + uu_x = 0$ برقرار نیست و بنابراین جوابِ به دست آمده از آن، یعنی جواب دومقداری، جوابِ مسأله‌ی مورد نظر نخواهد بود. در چنین مواردی برای به دست آوردنِ جواب، باید از رابطه‌ی اصلی، یعنی معادله‌ی انتگرالیِ بقا استفاده کنیم. به چنین جوابی که در (45) صدق می‌کند اما برای آن (47) برقرار نیست، جوابِ ضعیف می‌گوییم. توجه داریم که معادله‌ی (45) همواره برای جوابی که در (47) صدق می‌کند، برقرار است .



شکل 8: جواب ضعیف

5.2 موج شوک

معادله‌ای از نوعِ

$$u_t + C(u)u_x = 0 \tag{50}$$

می‌تواند از معادله‌ی انتگرالیِ زیر استخراج شده باشد

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} u\mathrm{d}x = j(x_2) - j(x_1) \tag{51}$$

که j تابعی از u است. در مواردی که در u شوک به وجود می‌آید، در نقاطِ شوک رابطه‌ی (50) برقرار نیست، اما (51) همواره برقرار است. بنابراین برای محاسبه‌ی جواب در نقاطِ شوک از (51) استفاده می‌کنیم.

می‌خواهیم جواب، یک تابعِ تک‌مقداری باشد. برای این کار به جای جوابِ چندمقداری در نقاطِ شوک، جوابی را جای‌گزین می‌کنیم که تک‌مقداری است، اما در برخی نقاط ناپیوسته است. زمانی را که در آن u برای اولین بار چندمقداری شده است در نظر می‌گیریم. این زمان نقطه‌ی شروعِ شوک است. فرض می‌کنیم که از آن زمان به بعد u در برخی نقاط دارای ناپیوستگی است و برقرار نبودنِ معادله‌ی (50) به دلیلِ وجود این ناپیوستگی است. اصطلاحاً به نقاطِ ناپیوستگی، نقاطِ شوک می‌گوییم. برای پیدا کردنِ نقاطِ شوک از (51) استفاده می‌کنیم. مسیر این نقاط را در صفحه‌ی x و t با $s(t)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب فرض کرده‌ایم که ناپیوستگی با گذشتِ زمان روی مسیرِ $s(t)$ منتشر می‌شود. به این سبب به $s(t)$ موجِ شوک می‌گوییم.

فرض می‌کنیم u به صورتِ زیر باشد (شکل ۵)

$$u(x,t) = u^-(x,t)\theta[s(t)-x] + u^+\theta[x-s(t)] \tag{52}$$

که u^- و u^+ پیوسته و مشتق‌پذیر هستند و

$$\theta(x-y)=\begin{cases}1 & x\geq y\\ \\ 0 & x<y\end{cases} \tag{53}$$

این جواب را در (51) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{s(t)} u^-\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{s(t)}^{x_2} u^+\mathrm{d}x \quad = \quad j(x_1)-j(x_2) \tag{54}$$

$$\dot{s}u^-(s)+\int_{x_1}^{s(t)} u_t^-\mathrm{d}x-\dot{s}u^+(s)\int_{s(t)}^{x_2} u_t^+\mathrm{d}x \quad = \quad j(x_1)-j(x_2). \tag{55}$$

اگر در هر لحظه x_1 و x_2 را به s نزدیک کنیم، به دست می‌آید

$$\dot{s}=\frac{[\ j\ ]}{[\ u\ ]} \tag{56}$$

که منظور از $[A]$، اختلافِ A در دو طرفِ ناپیوستگی است. بنابراین با در نظر گرفتنِ (23) به همراهِ نقطه‌ی شروعِ شوک، مسیرِ شوک به دست می‌آید. توجه داریم که در حالتِ کلی برای معادله‌ی (45)، سرعتِ شوک به صورتِ زیر می‌شود

$$\dot{s}=\frac{[\ j\ ]}{[\ \rho\ ]}. \tag{57}$$

به عنوان مثال، معادله‌ی ذکر شده در مثالِ ۵ را می‌توان به صورتِ زیر نوشت

$$u_t+(\frac{1}{2}u^2)_{xx}=0. \tag{58}$$

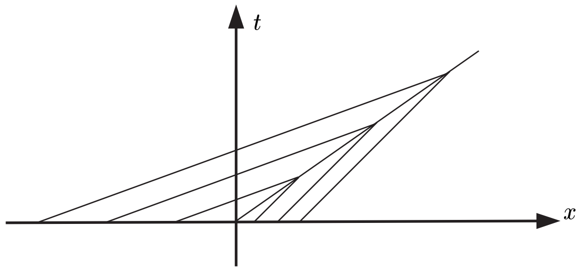
بنابراین

$$\dot{s}=\frac{1}{2}\quad\frac{4-1}{2-1}=\frac{3}{2}. \tag{59}$$

با توجه به این‌که شوک از نقطه‌ی $(0,0)$ شروع می‌شود، مسیرِ شوک عبارت است از

$$s(t)=\frac{3}{2}\ t. \tag{60}$$

به این ترتیب جوابِ شوک به صورتِ زیر می‌شود



شکل 9: خطوط مشخصه و موج شوک، مربوط به مثالِ ۵)

$$u(x,t)=\begin{cases}2 & x<\frac{3}{2}t\\ \\ 1 & \frac{3}{2}t<x\end{cases}\tag{61}$$

خطوطِ مشخصه و خطِ شوک در شکل ۹ رسم شده‌اند.

5.3 مثالِ ٦

معادله‌ی $u_t+uu_x=0$ را با شرط اولیه‌ی زیر در نظر بگیریم

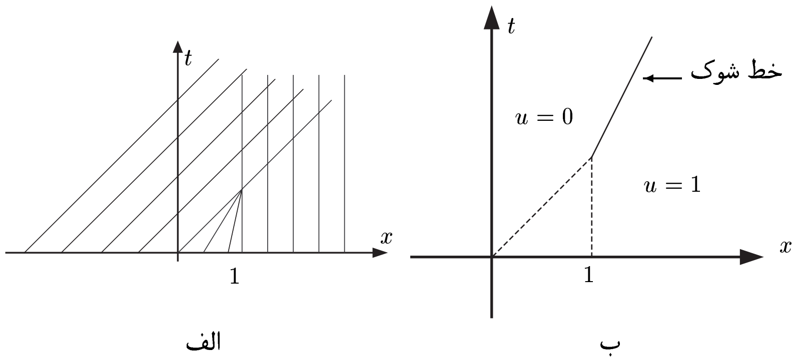
$$u(x_0,0)=\begin{cases}1 & x_0<0\\ \\ 1-x_0 & 0<x_0<1\\ \\ 0 & 1<x_0\end{cases}\tag{62}$$

توجه داریم که u در $t=0$ پیوسته است. در طولِ خطوط مشخصه، تغییراتِ زمانیِ u صفر است.

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x_0<0\\ \\ 1-x_0 & 0<x_0<1\\ \\ 0 & 1<x_0\end{cases}\tag{63}$$

بنابراین معادله‌ی خطوط مشخصه به شکل زیر خواهند بود

$$x=\begin{cases}t+x_0 & x_0<0\\ \\ (1-x_0)t+x_0 & 0<x_0<1\\ \\ 0 & 1<x_0\end{cases}\tag{64}$$



شکل 10: الف) خطوط مشخصهٔ مثال ٦، و ب) خط یا موج شوک برای مثال ٦

شکل ۱۰ الف خطوط مشخصه را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌بینیم نقطه‌ی شروعِ شوک، $(1,1)$ است.

ابتدا u را در زمان‌های کوچکتر از $t=1$ که هیچ شوکی وجود ندارد، بررسی می‌کنیم . روشن است که برای $x<t$ و $x>1$، به ترتیب u مقدارهای 1 و 0 را دارد. برای ناحیه‌ی محدود به خطوطِ $x=1$ و $x=t$ داریم

$$x=(1-x_0)t+x_0t \quad \Rightarrow \quad x_0=\frac{x-t}{1-t}. \tag{65}$$

با جای‌گذاریِ x_0 در u به دست می‌آید

$$u(x,t)=\frac{1-x}{1-t}. \tag{66}$$

در $t=1$ در نقطه‌ی $x=1$ شوک به وجود می‌آید.

برای زمان‌های بزرگ‌تر از $t=1$، در ناحیه‌ی محدود به خطوطِ $x=1$ و $x=t$ جواب دومقداری می‌شود. برای محاسبه‌ی جوابِ شوک، باید مسیر شوک را به دست آوریم. با در نظر گرفتنِ رابطه‌ی (56) داریم

$$\dot{s}=\frac{1}{2}. \tag{67}$$

بنابراین معادله‌ی خطِ شوک به صورت زیر می‌شود

$$s(t) = \frac{1}{2}(t+1). \tag{68}$$

به این ترتیب برای $t > 1$، u عبارت است از

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & 2x < t+1 \\ \\ 0 & t+1 < 2x \end{cases} \tag{69}$$

در نهایت می‌بینیم که صفحه‌ی x و t به 3 ناحیه تقسیم شده است. در شکل ۸ این 3 ناحیه نشان داده شده است.

5.4 مثالِ ۷

معادله‌ی $u_t + uu_x = 0$ را با شرط اولیه‌ی زیر در نظر بگیریم.

$$u(x_0,0) = \begin{cases} 2 & x_0 < 0 \\ \\ 1 & 0 < x_0 < 1 \\ \\ 0 & 1 < x_0 \end{cases} \tag{70}$$

خطوط مشخصه در شکل ۹ رسم شده‌اند. در این مثال دو موجِ شوک در $t = 0$ به وجود می‌آیند. معادله‌ی این دو موج عبارت است از

$$x = \frac{3}{2}t \quad , \quad x = \frac{1}{2}t + 1. \tag{71}$$

این دو در $t = 1$ به هم می‌رسند و تشکیلِ یک موجِ شوک می‌دهند. معادله‌ی موجِ حاصل از دو موجِ اولیه به صورت زیر است

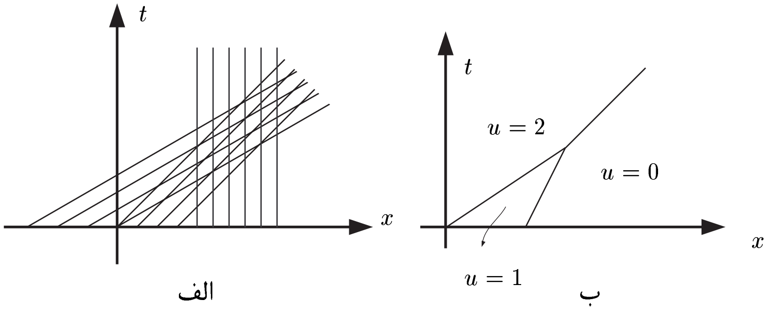
$$x = t + \frac{1}{2}. \tag{72}$$

خطوطِ شوک و مقدارهای مختلفِ u در صفحه‌ی x,t در شکل ۱۱ ب نشان داده شده‌اند.

5.5 مدلِ ساده‌ی ترافیک

در این بخش به ذکرِ مدلی ساده برای یک خیابانِ یک‌طرفه و تک‌باندی می‌پردازیم.

با توجه به تک‌باندی بودنِ خیابان، مسأله‌ی ما یک‌بُعدی است و می‌توانیم هر نقطه‌ی خیابان را با مختصه‌ی x نشان دهیم. در زمان دلخواهِ t، تعداد ماشین‌هایی را که در فاصله‌ی بینِ نقاطِ x و $x+L$



شکل 11: الف) خطوط مشخصهٔ مثال ۷، ب) خطوط شوک مربوط به مثال ۷ (توجّه: هر سه خط خط شوک هستند.)

هستند با $\rho(x,t)$ نشان می‌دهیم و به آن چگالیِ ماشین می‌گوییم. فرض بر این است که طولِ خیابان از L خیلی بزرگ‌تر است. تعداد ماشین‌هایی را که در فاصله‌ی زمانیِ t و $t+T$، از نقطه‌ی x عبور می‌کنند جریان می‌نامیم و آن را با $q(x,t)$ نشان می‌دهیم. توجه داریم که در صورتی مدل، تقریبِ خوبی از مسأله‌ی واقعی است که روابطِ زیر برقرار باشند

$$l \ll L \qquad \frac{l}{\bar{u}} \ll T \tag{73}$$

که l و $\bar{u}$ به ترتیب طولِ میانگین و سرعتِ میانگینِ ماشین‌ها هستند.

اگر در طولِ خیابان، ورودی و خروجی وجود نداشته باشد، رابطه‌ی بقای تعدادِ ماشین به صورت زیر می‌شود

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t) = q(a,t) - q(b,t). \tag{74}$$

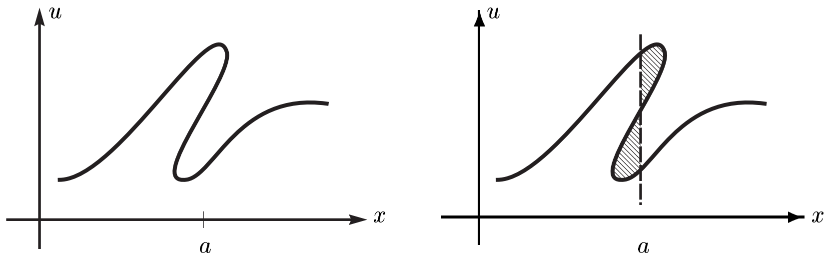
این رابطه را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}q(x,t). \tag{75}$$

از این معادله‌ی انتگرالی، معادله‌ی دیفرانسیلیِ زیر استخراج می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}q(x,t) = 0. \tag{76}$$

اگر فرض کنیم که سرعت ماشین‌ها، $u(x,t)$، تنها به چگالی وابسته است، در این صورت با توجه به



(الف) (ب)

شکل 12: تعیین حل شوک با استفاده از قاعده‌ی برش ماکسول

این‌که $q = \rho u$ معادله‌ی شبه‌خطیِ زیر به دست می‌آید

$$\rho_t + C(\rho)\rho_x = 0. \tag{77}$$

انتظار داریم که با زیاد شدنِ چگالی، سرعتِ ماشین‌ها کم شود؛ بنابراین u باید تابعی نزولی از ρ باشد. یک حالتِ ساده این است که u تابعی خطی از ρ باشد.

$$u = -\alpha\rho \qquad \alpha > 0 \tag{78}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_t - 2\alpha\rho\rho_x = 0. \tag{79}$$

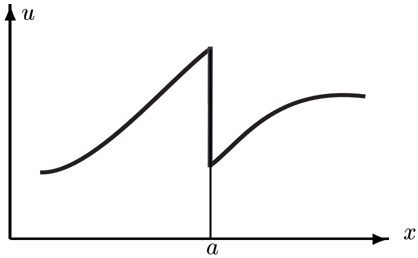
به این ترتیب اگر در زمانِ t_0 چگالی به صورتِ زیر باشد، جوابِ معادله در زمان‌هایِ بعدی، موجِ شوک خواهد بود؛ به طوری که شکلِ ρ ثابت می‌ماند و تنها نقطه‌ی شوک با سرعتی ثابت جابجا می‌شود.

$$\rho(x,t_0) = \begin{cases} \rho_1 & x < x_0 \\ \\ \rho_2 & x > x_0 \end{cases} \qquad \rho_2 > \rho_1 \tag{80}$$

جواب همان‌طور است که انتظار می‌رود؛ چرا که وقتی ماشین‌های عقبی که سرعتِ بیشتری دارند به ماشین‌های جلویی که سرعتِ کمتری دارند می‌رسند، مجبورند که سرعتِ خود را به اندازه‌ی آن‌ها کم کنند و به این ترتیب یک موجِ شوکِ ترافیکی به وجود می‌آید.

5.6 قاعده‌ی بُرشِ ماکسول

در بخش قبل با استفاده از (45) مسیر شوک را به دست آوردیم. در ادامه یک روش هندسی را برای تعیینِ نقاطِ شوک بررسی می‌کنیم.



شکل 13: جواب شوک به‌دست آمده از قاعده‌ی برش ماکسول.

معادله‌ی $u_t + uu_x = 0$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم در یک زمانِ معین مثل τ جواب این معادله چندمقداری و مثلِ شکلِ ۱۲ الف باشد. u در نقطه‌ای مثل a، 3 مقدار دارد؛ بنابراین اگر در این نقطه خطی عمودی رسم کنیم، نمودارِ u را در 3 نقطه قطع می‌کند (شکل ۱۲ ب). نواحیِ محدود به خطِ عمودیِ رسم شده و نمودارِ u را در نظر بگیریم.

اگر مساحتِ این دو ناحیه یکسان باشد در این صورت a همان $s(\tau)$ خواهد بود. تعیینِ محلِ شوک به این روش، به قاعده‌ی بُرشِ ماکسول [c] مشهور است. یکسان بودنِ مساحتِ این دو ناحیه به معنیِ برقرار بودن رابطه‌ی زیر در مسیر بین نقاط 1 تا 3 است

$$\int_c u\mathrm{d}x = 0. \tag{81}$$

اگر نواحیِ هاشور خورده را حذف کنیم، ناپیوستگیِ u را در نقطه‌ی شوک می‌بینیم (شکل ۱۳).

قاعده‌ی بُرش ماکسول با استفاده از رابطه‌ی انتگرالیِ بقا، قابل توجیه است. داریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} u\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[u^2(x_2) - u^2(x_1)\right]. \tag{82}$$

x_1 و x_2 را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$x_1 = s(t) - \varepsilon \quad , \quad x_2 = s(t) + \varepsilon. \tag{83}$$

طرفِ راستِ (51) برای جوابِ چندمقداری و جوابِ شوک، یکسان است. بنابراین با توجه به این‌که در $t = 0$، $\int udx$ یک مقدارِ معین دارد نتیجه می‌شود که در هر زمان دلخواهی این مقدار برای هر دو جواب یکسان است. از این‌جا روشن می‌شود که نقطه‌ی شوک، جایی است که مساحتِ نواحی هاشور خورده برابر شود.

6 قانون‌های بقا

معادله‌ی زیر را در نظر بگیریم

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0. \tag{84}$$

می‌توانیم آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$u_t + uu_x = 0. \tag{85}$$

اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که بی‌نهایت معادله وجود دارد که همه منجر به (85) می‌شوند. این معادلات عبارتند از

$$\left(u^N\right)_t + \left(\frac{N}{N+1}u^{N+1}\right)_x = 0 \tag{86}$$

که N یک عدد صحیحِ نامنفی است. توجه داریم که بی‌نهایت رابطه‌ی بقا متناظر با این بی‌نهایت معادله وجود دارد.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u^N = \frac{N}{N+1}\left[u^{N+1}(a) - u^{N+1}(b)\right]. \tag{87}$$

با توجه به (57) هر کدام از آن‌ها مسیرِ شوکِ خاصی را معین می‌کند. نکته این است که در مسائل مختلف باید دقت کرد که معادله‌ی حاکم، از کدام رابطه‌ی بقا استخراج شده است و با تعیینِ آن، مسیر شوک را محاسبه کرد.

قدردانی

از دکتر امیر آقامحمدی و دکتر محمد خرمی به خاطر پیشنهادهای مفیدشان تشکر می‌کنم.

مرجع‌ها

[1] L. Debnath: *Nonlinear Partial Differential Equation For Scientists And Engineers*, Birkhauser, 1997; pp. 159-184, 11-133.

[2] R. Haberman: *Elementary Applied Partial Differential Equations With Fourier Series And Boundary value Problems*, Prentice-Hall International, 1987; pp. 417-449.

[3] J. Kevorkian: *Partial Differential Equations Analytical Solution Techniques*, Brooks/Cole, 1990; pp. 261-321.

[4] B. Neta: *Partial differential equations*, MA 3132 Lecture Notes, 2002; pp. 37-57. http://www.math.nps.navy.mil/~bneta/pde.pdf

[5] فرهاد شهبازی؛ نظریه‌ی آماری معادله‌ی کاردر ـ پاریزی ـ ژانگ در حد کشش سطحی صفر؛ پایان‌نامه‌ی دکتری فیزیک؛ دانش‌گاه صنعتی شریف، دانش‌کده‌ی فیزیک، ۱۳۸۲.

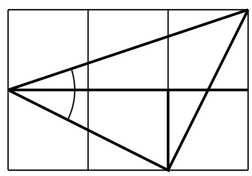
نام‌های خاص

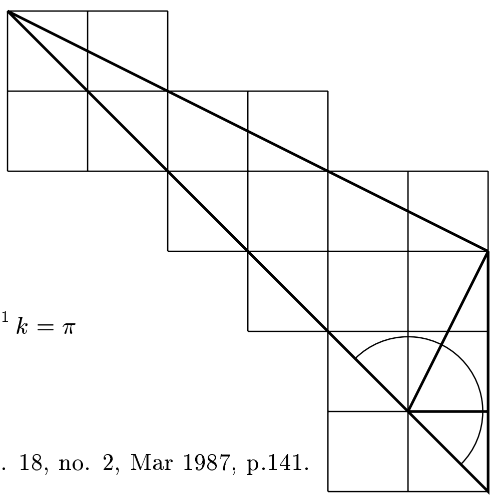
a) Navier-Stokes, b) Burgers, c) Maxwell

واژه‌نامه

quasi-linear	شبه‌خطی
semi-linear	نیمه‌خطی
characteristic	مشخّصه
weak solution	جوابِ ضعیف
cutting rule	قاعده‌ی برش

$$\sum_{k=2}^{3} \tan^{-1}\frac{1}{k} = \frac{\pi}{4}$$





$$\sum_{k=1}^{3} \tan^{-1} k = \pi$$

E. M. Harris,
College Mathematics Journal, vol. 18, no. 2, Mar 1987, p.141.