نوسان‌هایِ یک شاره‌یِ کرویِ تراکم‌ناپذیر

لیلا لوایی یانسی yalda57L@yahoo.com

در این مقاله نوسان‌هایِ یک قطره‌یِ کرویِ تراکم‌ناپذیر بررسی می‌شود. این نوسان‌ها، به‌خاطرِ کششِ سطحی به‌وجود می‌آید. بس‌آمدهایِ طبیعیِ سیستم یک‌بار بدونِ در نظر گرفتنِ گرانروی و یک‌بار با در نظر گرفتنِ گرانروی، در حدّ نوسان‌هایِ کوچک (خطّی) بدست می‌آید.

1 مقدمه

در مکانیکِ شاره‌ها برایِ هر شاره پارامترهایی به نامِ کششِ سطحی و گرانروی تعریف می‌کنیم. کششِ سطحی، که خاصیّتی است مربوط به فصلِ مشترکِ مایع و گاز، از جاذبه‌یِ مولکولی بینِ مولکول‌هایِ هم‌جنس و جاذبه‌یِ مولکولی بینِ مولکول‌هایِ غیرِهم‌جنس ناشی می‌شود. انرژی‌یِ پتانسیلِ داخلِ یک مایع، از انرژی‌یِ پتانسیلِ سطحِ آزادِ مایع کمتر است. یعنی یک انرژی‌یِ پتانسیلِ سطحی وجود دارد. این انرژی، کششِ سطحی را نتیجه می‌دهد. به همین دلیل است که قطره‌یِ آب، شکلِ کروی به خود می‌گیرد. هم‌چنین به این دلیل است که، حشراتِ کوچک می‌توانند بر سطحِ آزادِ آبِ استخر قرار گیرند و غرق نشوند.

برایِ بدست آوردنِ انرژی‌یِ سطحی (انرژی‌یِ پتانسیل) کافی است که دو قطره، یکی داخلِ شاره و یکی خارجِ شاره در نظر بگیریم و اختلافِ انرژی‌یِ دو قطره را بدست آوریم. (انرژی‌یِ ذراتِ داخلی‌یِ دو قطره یکی است.) با این کار انرژی‌یِ سطحی‌یِ بدست آمده $U = \sigma\, s$ است که σ کششِ سطحی است و دارای بُعدِ انرژی بر سطح است.

گرانروی به جریان یافتنِ شاره مربوط است. در واقع گرانروی یک نیرویِ مقاوم در مقابلِ حرکتِ شاره بوجود می‌آورد. (همانندِ عملی که نیرویِ اصطکاک در مکانیک ذرات انجام می‌دهد.) این نیرویِ مقاوم، یک نیرویِ وارد بر واحدِ سطح است که تنشِ برشی نام دارد، و متناسب است با گرادیانِ سرعت. ضریبِ تناسب گرانروی نام دارد. درواقع تنشِ برشی زمانی وجود دارد که اختلافِ سرعت بینِ لایه‌هایِ

شاره وجود داشته باشد، یعنی گرادیانِ سرعت مخالفِ صفر باشد، و کارش این است که می‌خواهد سرعت‌هایِ لایه‌هایِ مجاور را یکی کند. گرانروی به جنسِ شاره‌بستگی دارد و با تغییرِ دما نیز تغییر می‌کند. به عنوانِ مثال، گرانرویِ آب خیلی کم و گرانرویِ عسل زیاد است. شاره‌ای که نسبتِ تنشِ برشی به تغییراتِ سرعت در آن ثابت است، شاره‌یِ نیوتنی و شاره‌ای که نسبتِ تنشِ برشی به تغییراتِ سرعت در آن ثابت نیست، شاره‌یِ غیرِ نیوتنی نامیده می‌شود. بسیاری از شاره‌ها از قبیلِ آب و هوا نیوتنی هستند.

برایِ شاره‌یِ تراکم‌ناپذیر، می‌توان معادله‌یِ نوی‌ـاستوکس را با استفاده از قانونِ دوّمِ نیوتن نوشت. این معادله یک معادله‌یِ غیرِ خطی بر حسبِ سرعتِ شاره است. در حالتِ کلی این معادله قابلِ حل نیست. معادله‌یِ نوی‌ـاستوکس عبارت است از [3]:

$$\rho\frac{dv^i}{dt} = \rho\frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)v^i = -\partial^i p + \partial_j F^{ij}$$

که در آن ρ چگالیِ شاره، $\mathbf{v}$ سرعتِ شاره، p فشار و F^{ij} تنشِ برشی است. از طرفی برایِ هر شاره‌یِ تراکم‌ناپذیر با استفاده از شرطِ بقایِ جرم، یک معادله‌یِ پیوستگی به صورتِ زیر داریم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla\rho = 0$$

یک معادله‌یِ حالت هم در شاره داریم، که رابطه‌یِ بینِ ρ (چگالی) و p (فشار) را بیان می‌کند. برایِ شاره‌یِ تراکم‌ناپذیر معادله‌یِ حالت به صورتِ $\rho = c$ است، که در آن c ثابت است.

2 نوسان‌هایِ یک شاره‌یِ کروی

فرض‌می‌کنیم یک قطره‌یِ آبِ کروی شکل داریم و یک ضربه به آن وارد می‌کنیم. در اثر این ضربه، قطره از شکل کره خارج می‌شود. می‌دانیم کره دارای کمترین انرژی است، یعنی حالتِ تعادلِ سیستم است. هم‌چنین می‌دانیم سیستم‌هایِ فیزیکی وقتی از حالتِ تعادل خارج می‌شوند، تمایل دارند به حالتِ تعادل برگردند. پس قطره‌یِ آب در اثرِ این ضربه (و نیرویِ کششِ سطحی) شروع به نوسان می‌کند. برای بدست آوردنِ نوسان‌هایِ طبیعی، باید انرژی‌یِ پتانسیل وانرژی‌یِ جنبشیِ قطره را برایِ انحراف‌هایِ کوچک از کره بدست آوریم. قبل از بدست آوردنِ انرژی‌یِ جنبشی و انرژی‌یِ پتانسیل، این مسئله را از روشِ تحلیلِ ابعادی حل می‌کنیم.

2.1 محاسبه‌ی بس‌آمدهایِ طبیعی از روشِ تحلیلِ ابعادی [4]

قطره‌ای آب در نظر بگیریم با چگالی‌یِ ρ، شعاعِ R، و کششِ سطحی‌یِ σ. بُعدِ کششِ سطحی $\mathrm{M\,T^{-2}}$ است، و به آسانی می‌توان دید که $\sqrt{\dfrac{\rho R^3}{\sigma}}$ بُعدِ زمان دارد. پس اگر ω بس‌آمدِ طبیعی‌یِ نوسانِ قطره باشد باید داشته باشیم $\omega^2 = \eta\dfrac{\sigma}{\rho R^3}$، که در این‌جا η یک عددِ بی‌بُعد است.

حال یک تخمینِ عددی برایِ آب می‌زنیم. برایِ آب داریم:

$$\sigma = 0.07\,(\mathrm{N/m}), \qquad \rho = 1000\,(\mathrm{kg/m^3})$$

برایِ یک قطره‌یِ آب که از قطره‌چکان خارج می‌شود، داریم:

$$R \approx\ 10^{-3}\ (\mathrm{m})$$

اگر η را از رتبه‌یِ یک در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\omega^2 \approx\ 10^5\ (\mathrm{s^{-2}})$$

2.2 انرژی‌یِ پتانسیل

می‌خواهیم قطره‌ای تراکم‌ناپذیر به شعاعِ R را بررسی کنیم. انرژی‌یِ پتانسیلِ قطره عبارت است از:

$$U = \sigma\, s, \tag{1}$$

که U انرژی‌یِ پتانسیل، σ کششِ سطحی (انرژی بر واحدِ سطح)، و s مساحتِ کره است.

از رابطه‌یِ قبل می‌توان دید، که برایِ محاسبه‌یِ انرژی‌یِ پتانسیلِ قطره، به مساحتِ آن نیاز داریم. معادله‌یِ این سطح در مختصاتِ کروی را می‌شود چنین نوشت:

$$r_p = \sum_{l,m} \left(a_m^l\, Y_l^m(\theta,\phi)\right) + r_0 \tag{2}$$

که در آن (r,θ,ϕ) مختصاتِ کروی، وr_0 و a_m^l ها مقدارهایی ثابت‌اند و جمع رویِ l از 1 تا ∞ است، و جمع رویِ m از $-l$ تا l است (این قرارداد جمع را در تمامِ مقاله به کار می‌بریم). r_p مختصه‌یِ شعاعی‌یِ نقطه‌ای از مرزِ قطره است، که زاویه‌هایش (θ,ϕ) است. a_m^lها در واقع دامنه‌هایِ متناظر با انحراف از حالتِ تعادل اند، و r_0 با استفاده از تراکم‌ناپذیری (ثابت‌بودنِ حجمِ قطره) از رویِ این دامنه و فازها به دست می‌آید. برا یِ به‌دست‌آوردنِ r_0، داریم:

$$\tau = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{r_p} r^2 dr = \frac{1}{3}\int r_p^3\, d\Omega$$

با استفاده از (2) داریم:

$$\tau = \frac{1}{3}\left[\int r_0^3 d\Omega + \sum_{\{l,m\}} a_m^l\, a_{m'}^{l'}\, a_{m''}^{l''} \int Y_l^m\, Y_{l'}^{m'}\, Y_{l''}^{m''}\, d\Omega \right.$$
$$\left. + \sum_{l,m} \int 3\, r_0^2\, a_m^l\, Y_l^m\, d\Omega + 3\, r_0 \sum_{\{l,m\}} a_{m'}^{l'*} \int Y_l^m\, Y_{l'}^{m'*}\, d\Omega \right]$$

چون ما نوسان‌هایِ کوچک را بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان از انتگرالِ دوّم در رابطه‌یِ بالا صرفنظر کرد. یعنی جمله‌هایِ تا رتبه‌یِ دوّم نسبت به a_m^l ها را نگه می‌داریم. برای محاسبه‌یِ انتگرال‌هایِ بالا از شرطِ بهنجارشِ Y_l^m ها استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$\int Y_l^m(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'*}(\theta,\phi) d\Omega = \delta_{ll'}\delta^{mm'} \qquad (3)$$

با محاسبه داریم:

$$\tau = \frac{1}{3}\left[4\pi r_0^3 + 3\, r_0 \sum_{l,m} a_m^l\, a_m^{l*}\right] = \frac{4}{3}\pi\, R^3 \qquad (4)$$

چون نوسان‌هایِ کوچک را بررسی می‌کنیم، کافی است انرژیِ پتانسیل و انرژیِ جنبشی را تا مرتبه‌یِ 2 نسبت به جابجایی از حالتِ تعادل حساب کنیم، یعنی کافی است r_0 را تا مرتبه‌یِ 2 نسبت به a_m^l ها حساب کنیم. بنابراین داریم:

$$r_0 \approx R + \delta \qquad (5)$$

با استفاده از رابطه‌یِ (4) داریم:

$$\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (R+\delta)^3 + (R+\delta)\sum_{l,m} a_m^l\, a_m^{l*}$$
$$\approx \frac{4}{3}\pi\,(R^3 + 3\,\delta\, R^2) + R\sum_{l,m} a_m^l\, a_m^{l*}$$

پس:

$$4\pi\delta R^2 + R\sum_{l,m} a_m^l\, a_m^{l*} = 0$$

یعنی:

$$\delta \approx -\frac{1}{4\pi R}\sum_{l,m} a_m^l\, a_m^{l*} \qquad (6)$$

با استفاده از رابطه‌یِ (5) داریم:

$$r_0 = R - \frac{1}{4\pi R} \sum_{l,m} a_m^l \, a_m^{l*} \tag{7}$$

حال مساحتِ شاره را حساب می‌کنیم. در مختصاتِ کروی داریم:

$$\begin{aligned}
ds &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| d\theta \, d\phi && (8)\\
\hat{\mathbf{r}} &= \sin\theta \cos\phi \, \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \sin\phi \, \hat{\mathbf{j}} + \cos\theta \, \hat{\mathbf{k}} \\
\hat{\theta} &= \cos\theta \cos\phi \, \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \sin\phi \, \hat{\mathbf{j}} - \sin\theta \, \hat{\mathbf{k}} \\
\hat{\phi} &= \cos\phi \, \hat{\mathbf{j}} - \sin\phi \, \hat{\mathbf{i}} \\
\mathbf{r} &= r(\theta, \phi) \, \hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

با استفاده از روابطِ بالا داریم:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \cos\theta \cos\phi \, \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \sin\phi \, \hat{\mathbf{j}} - \sin\theta \, \hat{\mathbf{k}} = \hat{\theta} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} = -\sin\theta \sin\phi \, \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \cos\phi \, \hat{\mathbf{j}} = \sin\theta \, \hat{\phi} \tag{10}$$

و با استفاده از این دو داریم:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \phi} \right| = r_p^2 \sin\theta \left[1 + \frac{1}{2 r_p^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial r_p}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2\, r_p^2} \left(\frac{\partial r_p}{\partial \theta} \right)^2 \right] \tag{11}$$

با استفاده از روابطِ (8) و (11) داریم:

$$\begin{aligned}
s &= \iint r_p^2 \sin\theta d\theta d\phi + \iint \frac{1}{2\sin\theta} \left(\frac{\partial \, r_p}{\partial \phi} \right)^2 d\theta d\phi + \iint \frac{\sin\theta}{2} \left(\frac{\partial \, r_p}{\partial \theta} \right)^2 d\theta d\phi \\
&= \int r_p^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial r_p}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_p}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\Omega && (12)
\end{aligned}$$

$$\int r_p^2 d\Omega = 4\pi r_0^2 + \sum_{l,m} a_m^l \, a_m^{l*} \tag{13}$$

از طرفی:

$$\iint \frac{1}{2\sin\theta} \left(\frac{\partial \, r_p}{\partial \phi} \right)^2 d\theta d\phi = \iint \frac{1}{2\sin\theta} \frac{\partial \, r_p}{\partial \phi} \frac{\partial \, r_p^*}{\partial \phi} d\theta d\phi \tag{14}$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\partial\ r_p^*}{\partial\phi}\frac{\partial r_p}{\partial\phi} d\phi = r_p^* \frac{\partial\ r_p}{\partial\phi} |_{\phi=0}^{\phi=2\pi} - \int_{\phi=0}^{2\pi} r_p^* \frac{\partial^2 r_p}{\partial\phi^2} d\phi \tag{15}$$

r_p و مشتقِ آن، و r_p^* نسبت به ϕ دوره‌ای‌اند. پس جمله‌ي مرزی صفر است.

با استفاده از روابطِ (14) و (15) داریم:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{\partial\ r_p}{\partial\phi}\right)^2 d\theta d\phi = -\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r_p^*}{2\sin\theta}\frac{\partial^2 r_p}{\partial\phi^2} d\theta d\phi \tag{16}$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\sin\theta\frac{\partial\ r_p}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial\ r_p^*}{\partial\theta}\right) d\theta = \left(\sin\theta\frac{\partial\ r_p}{\partial\theta}\right) r_p^* |_{\theta=0}^{\pi} - \int_{\theta=0}^{\pi} r_p^* \frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial\ r_p}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} d\theta$$

در رابطه‌ي بالا جمله‌ي اوّل صفر است. با استفاده از رابطه‌ي بالا جمله‌ي سوّمِ s برابر می‌شود با:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2}\left(\frac{\partial\ r_p}{\partial\theta}\right)^2 d\theta d\phi = -\frac{1}{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r_p^* \frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial\ r_p}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} d\theta d\phi \tag{17}$$

با استفاده از روابطِ (16) و (17)،دو جمله‌ي آخرِ رابطه‌ي (12) برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{1}{2\sin\theta}\left(\frac{\partial\ r_p}{\partial\phi}\right)^2 d\theta d\phi + \int\int \frac{\sin\theta}{2}\left(\frac{\partial\ r_p}{\partial\theta}\right)^2 d\theta d\phi \\
= &-\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r_p^* \left[\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\right)\sum_{l,m} a_m^l\, Y_l^m(\theta,\phi)\right] \sin\theta d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}Y_l^m(\theta,\phi) = -\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\right] Y_l^m(\theta,\phi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi) \tag{18}$$

بنابراین انتگرالِ دوّمِ رابطه‌ي (12) برابر است با:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r_p^* \left[\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta}\right)\sum_{l,m} a_m^l\, Y_l^m(\theta,\phi)\right] d\Omega \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l,m} l\,(l+1)\, a_m^l\, a_m^{l*} \qquad (19)
\end{aligned}$$

با استفاده از روابطِ (12) و (13) و (19)، s بدست می‌آید.

$$s = 4\pi r_0^2 + \sum_{l,m}\left[1 + \frac{1}{2}l\,(l+1)\right] a_m^l\, a_m^{l*}$$

با استفاده از رابطه‌ي (7) داریم:

$$
\begin{aligned}
s \;\approx\; 4\pi \left[R^2 - 2\frac{1}{4\pi}\sum_{l,m} a^l_m\, a^{l*}_m\right] + \sum_{l,m}\left[1+\frac{1}{2}\; l\,(l+1)\right]\; a^l_m\, a^{l*}_m \\
=\; 4\,\pi\, R^2 + \sum_{l,m}\left[-1+\frac{1}{2} l\,(l+1)\right]\; a^l_m\, a^{l*}_m
\end{aligned}
$$

از رابطه‌ی بالاورابطه‌ی (1) داریم:

$$
U = \sigma s = U_0 + \sigma \sum_{l,m}\left[-1+\frac{1}{2} l\,(l+1)\right] a^l_m\, a^{l*}_m \tag{20}
$$

که U_0 انرژی‌ی پتانسیلِ حالتِ تعادل است $(U_0 = 4\,\pi\, R^2\,\sigma)$. این انرژی‌ی پتانسیل، جمله‌ی درجه‌ی یک نسبت به a^l_m ها ندارد. از طرفی جمله‌ی مجذوری نسبت به a^1_m هم صفر است. در واقع a^1_m متناظر با انتقالِ صلبِ شاره است که انرژی‌ی پتانسیل را عوض نمی‌کند.

2.3 انرژی‌ی جنبشی

انرژی‌ی جنبشی (K) عبارت است از:

$$
K = \frac{1}{2}\rho \int |\mathbf{v}|^2\; d^3x = \frac{1}{2}\rho \int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^*\; d^3x \tag{21}
$$

در رابطه‌ی بالا ρ چگالی‌ی مایع و $\mathbf{v}$ سرعتِ حرکتِ مایع است. برایِ بدست آوردنِ انرژیِ جنبشی تا مرتبه‌ی دو نسبت به جابجایی‌ها، کافی است سرعت را تا مرتبه‌ی یک نسبت به جابجایی‌ها حساب کنیم. شرطِ مرزی برایِ بردارِ سرعت این است که هر نقطه در مرزِ مایع، همیشه در مرزِ مایع باقی بماند.

فرض کنیم معادله‌ی مرزِ مایع بصورتِ $f(\mathbf{r},t)=0$ باشد، بعد از زمانِ $\triangle t$ نقطه‌ی $\mathbf{r}$ به $\mathbf{r}+\mathbf{v}\,\triangle t$ رفته، و این نقطه باید باز هم یک نقطه‌ی مرزی باشد، پس باید داشته باشیم:

$$
f(\mathbf{r}+\mathbf{v}\,\Delta t,\; t+\Delta t) = 0
$$

بنابراین داریم:

$$
\left[\mathbf{v}.\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right]_{f=0} = 0 \tag{22}
$$

که در این‌جا ∇ عمل‌گرِ گرادیان است. طرفِ چپِ رابطه‌ی بالا، مشتقِ هم‌رفته‌ی f است. f را می‌توان به شکلِ

$$
f(r,\theta,\phi,t) = r - r_p(\theta,\phi,t) \tag{23}
$$

گرفت. بستگیِ r_p به t از طریقِ a^l_m ها است.

با جایگذاریِ (23) در (22)، شکلِ کلیِ (22) پیچیده خواهد بود. ولی چون بدست آوردنِ v تا رتبه‌ی یک نسبت به جابجایی‌ها کافی است، (22) را هم می‌توان تا همین رتبه نوشت. بنابراین داریم:

$$v_r(R,\theta,\phi) - \frac{\partial(r_p)}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

در رابطه‌ی بالا v_r مئلفه‌ی شعاعیِ سرعت است. از تراکم‌ناپذیریِ مایع داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{25}$$

(24) و (25) برایِ بدست آوردنِ $\mathbf{v}$ بر حسبِ a_m^l ها کافی نیستند. برایِ بدست آوردنِ $\mathbf{v}$ به کرلِ $\mathbf{v}$ هم نیاز داریم. اگر میدانِ سرعت را ناچرخشی بگیریم، داریم:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{26}$$

از (26) نتیجه می‌شود که میدانِ سرعت را می‌توان گرادیانِ یک میدانِ اسکالر گرفت. پس داریم:

$$\mathbf{v} = \nabla\psi \tag{27}$$

از (25) و (27) داریم:

$$\nabla^2\psi = 0, \qquad r < R, \tag{28}$$

از رابطه‌هایِ (2) و (24) و (27) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(R,\theta,\phi) = \sum_{l,m} \dot{a}_m^l\, Y_l^m(\theta,\phi) \tag{29}$$

جوابِ (28) عبارت است از([2] فصلِ 3):

$$\psi(r,\theta,\phi) = c_0 + \sum_{l,m} A_m^l\, r^l\, Y_l^m(\theta,\phi) \tag{30}$$

با جاگذاریِ (30) در (29) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(R,\theta,\phi) = \sum_{l,m} A_m^l\, l\, r^{l-1}\, Y_l^m(\theta,\phi)\,\Big|_{\,r=R} = \sum_{l,m} \dot{a}_m^l Y_l^m(\theta,\phi)$$

از رابطه‌یِ بالا نتیجه می‌شود:

$$A_m^l = \frac{\dot{a}_m^l}{lR^{l-1}}$$

با جاگذاریِ رابطه‌یِ بالا در (30) داریم:

$$\psi(r,\theta,\phi) = c_0 + \sum_{l,m} \frac{\dot{a}_m^l}{lR^{l-1}}\; r^l\; Y_l^m(\theta,\phi) \tag{31}$$

پس داریم:

$$v_r \;=\; \frac{\partial \psi}{\partial r} = \sum_{l,m} \dot{a}^l_m \left(\frac{r}{R}\right)^{l-1} \; Y^m_l(\theta,\phi) \tag{32}$$

$$v_\theta \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \sum_{l,m} \frac{\dot{a}^l_m}{l} \; \left(\frac{r}{R}\right)^{l-1} \; \frac{\partial Y^m_l(\theta,\phi)}{\partial \theta} \tag{33}$$

$$v_\phi \;=\; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \sum_{l,m} \frac{\dot{a}^l_m}{l\sin\theta} \left(\frac{r}{R}\right)^{l-1} \; \frac{\partial Y^m_l(\theta,\phi)}{\partial \phi} \tag{34}$$

براي محاسبه‌يِ انرژي‌يِ جنبشي در رابطه‌يِ (21) چون انتگرال‌ده از مرتبه‌يِ دو (نسبت به جابه‌جايي‌ها) است و مي‌خواهيم که انرژيِ جنبشي هم از مرتبه‌يِ دو باشد، پس کافي است ناحيه‌يِ انتگرال‌گيری را تا مرتبه‌يِ صفر بگيريم، يعنی کره‌ای به مرکزِ مبدأ وشعاعِ R. با انتگرال‌گيريِ جزءبه‌جزء و استفاده از رابطه‌يِ (28) داريم:

$$K = \frac{1}{2}\rho \int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^* d^3x = \frac{1}{2}\rho \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} \; ds$$

با استفاده از (31) داريم:

$$K \;=\; \sum_{l,m} \frac{\rho R^3}{2l} \dot{a}^l_m \dot{a}^{l*}_m. \tag{35}$$

2.4 بس‌آمدهايِ طبيعی

از رابطه‌يِ (20) ديده مي‌شود که انرژی‌يِ پتانسيل نسبت به a^l_m ها مجذوری است و جمله‌هايِ غيرِ قطری ندارد. (يعنی جمله‌هايِ $a^l_m\, a^{l'*}_{m'}$ و $l \neq l'$ يا $m \neq m'$ نداريم.) از رابطه‌يِ (35) هم پيداست که انرژی‌يِ جنبشی نسبت به $\dot{a}^l_m$ ها مجذوری است و جمله‌هايِ غيرِ قطری ندارد. پس a^l_m ها وجه‌هايِ طبيعی‌يِ نوسان هستند و نسبتِ ضريبِ هر جمله‌يِ مجذوری در انرژی‌يِ پتانسيل به ضريبِ جمله‌يِ مجذوری‌يِ متناظر در انرژی‌يِ جنبشی، مجذورِ يک بس‌آمدِ طبيعی است. زيرا اگر $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ و $U = \frac{1}{2}\,k\,x^2$ باشند، آنگاه $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ است. پس به ازايِ هر l و m، داريم:

$$\left(\omega^l_m\right)^2 = \frac{2\,l\,\sigma\left[-1+\frac{1}{2}l(l+1)\right]}{\rho\,R^3} \tag{36}$$

عبارتِ بالا به ازايِ $l = 1$ صفر است واين به اين دليل است که انرژی‌يِ پتانسيل به ازايِ $l = 1$ صفر است. بقيه‌يِ مجذورِ بس‌آمدها مثبت هستند، يعنی حرکت‌ها نوسانی‌اند و تعادلِ سيستم پای‌دار است. با مقايسهٔ رابطه‌يِ بالا و مجذورِ بس‌آمدِ بدست آمده در روشِ تحليلِ ابعادی نتيجه می‌شود:

$$\eta = 2l\,[-1+\frac{1}{2}l(l+1)]$$

3 نوسان‌هایِ یک شاره‌یِ کروی با در نظر گرفتنِ گرانروی

اگر F نیرویِ ناشی از گرانروی در واحدِ سطحِ شاره باشد، داریم ([3]) :

$$\rho\frac{dv^i}{dt} = -\partial^i p + \partial_j F^{ij}$$

در رابطه‌یِ بالا ρ چگالی، v سرعت، p فشار، و F^{ij} (که مؤلّفه‌هایِ یک تانسور است) نیرویِ ناشی از گرانروی در واحدِ سطحِ شاره است. بنابراین $\rho\,\frac{dv^i}{dt}$ مؤلّفه‌یِ i امِ جرمِ واحدِ حجم ضربدرِ شتاب، $(-\partial^i p)$ مؤلّفه‌یِ i امِ نیرویِ فشار بر واحدِ حجم، و $\partial_j F^{ij}$ مؤلّفه‌یِ i امِ نیرویِ ناشی از گرانروی بر واحدِ حجمِ شاره است. اگر طرفینِ رابطه‌یِ بالا را در v_i^* (می‌دانیم سرعتِ شاره حقیقی است، یعنی $v_i = v_i^*$) ضرب کنیم (رویِ i جمع داریم) و رویِ حجمِ شاره انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int v_i^*(\rho\frac{dv^i}{dt})\,d\tau = \int -v_i^*\partial^i p\,d\tau + \int v_i^*(\partial_j F^{ij})\,d\tau$$

در رابطه‌یِ بالا $d\tau$ المانِ حجمِ شاره است. از طرفی F^{ij} عبارت است از:

$$F^{ij} = \frac{\mu}{2}(\partial^i v^j + \partial^j v^i)$$

پس داریم:

$$\int v_i^*\ \partial_j F^{ij}\ d\tau = \frac{\mu}{2}\int v_i^*\partial_j(\partial^i v^j + \partial^j v^i)\ d\tau = \frac{\mu}{2}\int v_i^*(\partial^i\partial_j v^j + \partial_j\partial^j v^i)\ d\tau$$

از طرفی $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$، یعنی $\partial_j v^j = 0$، پس:

$$\frac{\mu}{2}\int v_i^*(\partial_j\partial^j v^i)\ d\tau = \frac{\mu}{2}\int\left[\partial_j(v_i^*\partial^j v^i) - (\partial_j v_i^*)(\partial^j v^i)\right]\ d\tau$$

جمله‌یِ اوّلِ انتگرالِ بالا صفر است، زیرا:

$$\int \partial_j(v_i^*\partial^j v^i)d\tau = \int v_i^*(\partial^j v^i)ds_j$$

وقتی گرانروی نداریم، فقط مؤلّفه‌یِ عمودیِ سرعت رویِ مرز صفر است. زیرا یک نقطه رویِ مرز، باید رویِ مرز باقی بماند و روابطِ $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ و $\nabla\times\mathbf{v} = 0$ درتمامِ نقاطِ داخلِ حجمِ شاره برقرار است. زمانی که گرانروی داریم، علاوه بر مؤلّفه‌یِ عمودی‌یِ سرعت، مؤلّفه‌یِ مماسی‌یِ سرعت هم رویِ مرز

صفر است. زیرا نقاطِ بیرونِ شاره، که در کنارِ مرزِ شاره هستند، ساکن‌اند. پس نقاطِ رویِ مرز هم باید ساکن باشند. در واقع $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ هنوز در تمامِ حجمِ شاره برقرار است، ولی $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ در یک پوسته‌یِ باریکی از مرزِ شاره برقرار نیست و در بقیّه‌یِ حجمِ شاره برقرار است. پس تمامِ مؤلّفه‌هایِ سرعت رویِ مرز صفر است، یعنی v_i در رابطه‌یِ بالا صفر است. پس انتگرالِ بالا صفر است. پس داریم:

$$\int v_i^*(\partial_j F^{ij})\ d\tau = -\frac{\mu}{2}\int(\partial_j v_i^*)(\partial^j v^i)\ d\tau$$

می دانیم که نیرویِ گرانروی یک نیرویِ تلف‌کننده (نیرویِ مقاوم) است. از طرفی $\int v_i^*(\partial_j F^{ij})\, d\tau$، انتگرالِ سرعت در چگالی‌یِ نیرو است. یعنی این انتگرال، نشان‌گرِ توان است. پس این انتگرال، اتلافِ انرژی‌یِ مکانیکی بر واحدِ زمان را بیان می‌کند. یعنی:

$$\int v_i^*(\partial_j F^{ij})\ d\tau = -\frac{\mu}{2}\int(\partial_j v_i^*)(\partial^j v^i)\ d\tau = \frac{dE}{dt} \tag{37}$$

پس:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{2}\left[\int \partial^j(v^i\partial_j v_i^*)d\tau - \int(\partial^j\partial_j v_i^*)v^i\ d\tau\right]$$

از طرفی داخلِ شاره داریم $\nabla \times \mathbf{v} = 0$، یعنی:

$$\partial_i v^j = \partial^j v_i$$

پس داریم:

$$\int(\partial^j\partial_j v_i^*)v^i\ d\tau = \int(\partial_j\partial^j v_i^*)v^i\ d\tau = \int(\partial_j\partial_i v^{j*})v^i\ d\tau = \int(\partial_i\partial_j v^{j*})v^i\ d\tau$$

و چون $\partial_j v^j = 0$، پس:

$$\int(\partial_i\partial_j v^{j*})v^i\ d\tau = 0$$

یعنی:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{2}\int \partial^j(v^i\partial_j v_i^*)d\tau = -\frac{\mu}{2}\int(v^i\partial_j v_i^*)ds^j = -\frac{\mu}{2}\int \partial_j(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^*}{2})ds^j \tag{38}$$

از طرفی در کره داریم $d\mathbf{s} = ds^j\ \hat{e_j} = ds\,\hat{\mathbf{r}}$ پس $ds = R^2\,\sin\theta\, d\theta\, d\phi$، بنابراین:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{2}\int \partial_r(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^*}{2})R^2 d\Omega\ \Big|_{r=R}$$

از طرفی از روابطِ (32) و (33) و (34) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^* = \sum_{\{l,m\}} \dot{a}^l_m \dot{a}^{l'*}_{m'} (\frac{r}{R})^{l+l'-2} \Big[Y^m_l Y^{m'*}_{l'}$$
$$+ \frac{1}{ll'} \frac{\partial Y^m_l}{\partial\theta}\frac{\partial Y^{m'*}_{l'}}{\partial\theta} + \frac{1}{ll'\sin^2\theta}\frac{\partial Y^m_l}{\partial\phi}\frac{\partial Y^{m'*}_{l'}}{\partial\phi}\Big]$$

با استفاده از روشِ انتگرالِ جزء به جزء و رابطه‌ي (18) داريم:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{2}\sum_{l,m} \dot{a}^l_m \dot{a}^{l*}_m (l-1)\left(\frac{2l+1}{l}\right) R. \tag{39}$$

براي پيدا كردنِ ارتباطِ $\frac{dE}{dt}$ و نيروي اتلافي، لحظه‌اي از مسئله خارج مي‌شويم. اگر نيروي اتلافي بصورتِ $(-\tilde{f}\dot{x})$ داشته باشيم، معادله‌ي حركت بصورتِ $\tilde{M}\ddot{x}+\tilde{k}x=-\tilde{f}\dot{x}$ است، كه در آن x بردار است، و $\tilde{M}$، $\tilde{k}$ و $\tilde{f}$ ماتريس‌هاي متقارن هستند. پس داريم:

$$\dot{x}^t\tilde{M}\ddot{x}+\dot{x}^t\tilde{k}x=-\dot{x}^t\tilde{f}\dot{x}$$

يعني:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^t\tilde{M}\dot{x}+\frac{1}{2}x^t\tilde{k}x\right]=-\dot{x}^t\tilde{f}\dot{x}$$

پس $\frac{dE}{dt}=-\dot{x}^t\tilde{f}\dot{x}$ است. با پيدا كردنِ $\tilde{f}$، فركانسِ نوسان را مي‌توان بصورتِ زير پيدا كرد:

$$M\ddot{x}+kx+f\dot{x}=0, \qquad x=e^{st},$$

كه M، k و f عدد هستند. پس نتيجه مي‌شود $Ms^2+fs+k=0$. اگر f نبود، آن وقت $s=\pm i\sqrt{\frac{k}{M}}$، يعني:

$$x=c_1\,\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{M}}\right)+c_2\,\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{M}}\right)$$

پس $\omega^2=\frac{k}{M}$. حال كه f را هم داريم، $s=\frac{-f\pm\sqrt{f^2-4Mk}}{2M}$. اگر $f^2<4\,M\,k$، آن‌گاه:

$$s=\frac{-f\pm i\,\sqrt{4Mk-f^2}}{2M}=-\frac{f}{2M}\pm i\,\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{f^2}{4M^2}}$$

و چون $x=e^{st}$، پس داريم:

$$\omega^2=\frac{k}{M}-\frac{f^2}{4M^2} \tag{40}$$

و ميرايي $-\frac{f}{2M}$ است. اگر $f^2>4\,M\,k$، آن‌گاه s يک مقدارِ حقيقي خواهد بود، يعني s قسمتِ موهومي ندارد. پس حالتِ فوقِ ميرا اتّفاق مي‌افتد.

حال براي پيدا كردنِ بس‌آمد، بايد f را بيابيم. چون فقط جمله‌هايِ قطری در $\frac{dE}{dt}$ (رابطه‌يِ 39) ظاهر شده‌اند، پس f منفی‌يِ ضريبِ $\dot{a}^{l}_{m}\,\dot{a}^{l*}_{m}$ است. يعنی به ازايِ هر l و m داريم:

$$f = \frac{(l-1)\,(2l+1)}{2\,l}\,R\,\mu \qquad (41)$$

از رابطه‌يِ بالا واضح است كه به ازايِ $l = 1$، داريم $f = 0$. می‌توان دليلِ اين مطلب را اين‌گونه بيان كرد: اگر $l = 1$ باشد، v_r، v_θ و v_ϕ مستقل از r می‌شوند. پس $\partial_r(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^*)$ صفر می‌شود. پس $\frac{dE}{dt} = 0$، يعنی $f = 0$.

دررابطه‌يِ (40)، k ضريبِ $(\frac{1}{2}\,a^{l}_{m}\,a^{l*}_{m})$ در انرژی‌يِ پتانسيل است، و M ضريبِ $(\frac{1}{2}\,\dot{a}^{l}_{m}\,\dot{a}^{l*}_{m})$ در انرژی‌يِ جنبشی است. بااستفاده از روابطِ (20) و (35) و (40) و(41) به ازايِ هر l و m داريم:

$$\omega^2 = \frac{[-2+l\,(l+1)]\,\sigma l}{\rho\,R^3} - \frac{\mu^2\,(l-1)^2\,(2l+1)^2}{16\,\rho^2\,R^4}$$

از رابطه‌يِ بالا واضح است كه به ازای l های بزرگ، ω^2 منفی می‌شود. پس حالتِ فوقِ ميرا اتّفاق می‌افتد.

قدردانی

در اينجا لازم می‌دانم كه از جنابِ آقایِ دكتر محمّدِ خرّمی كه مرا در تهيّه‌يِ اين مقاله ياری كردند، تشكّر كنم.

4 مرجع‌ها

[1] George Arfken; “Mathematical Methods for Physicists”, third edition.

[2] John David Jackson; “Classical Electrodynamics”, third edition.

[3] R.Byron Bird, Warren E.Stewart, Edwin N.Lightfoot; “Transport Phenomena”, New York. Wiley, [1960].

[4] Shames, Irving Herman; “Mechanics of Fluids”, New York. McGraw-Hill, [1992].