حل معادلات واپاشی زنجیره‌ای هسته‌ای به روش پله‌ای

فرنوش وحیدپور[1]

ابراهیم فولادوند[2]

واپاشی هسته‌ای مواد پرتوزا از جمله مسائل مهم در مبحث فیزیک هسته‌ای است [۱ تا ۳]. اما در کتابهای درسی شاید کمتر به بررسی حل حالت عمومی مسائل واپاشی پرداخته شود. ما در این نوشته تلاش می‌کنیم یک روش برای حل عمومی این مسئله ارائه دهیم.

فرض کنید K نوع هسته‌ی پرتوزا داریم. هر هسته می‌تواند به هسته‌ی کوچکتری واپاشی کند. اگر تعداد هسته‌های نوع 1 تا K را در زمان t با $N_1(t)$، $N_2(t)$، ...، $N_K(t)$ نشان دهیم، با فرض خوبی می‌توان تحول زمانی $N_j(t)$ ها را با معادلات زنجیره‌ای زیر نشان داد.

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \tag{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \tag{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dN_K}{dt} = \lambda_{K-1} N_{K-1} - \lambda_K N_K. \tag{3}$$

مجموعه معادلات بالا، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی مرتبه‌ی یک را تشکیل می‌دهند و λ_iها ثابت‌های واپاشی، اعداد معلومی هستند. شرایط اولیه را می‌توان به صورت زیر فرض کرد.

$$N_1(0) = N_{10}, \qquad N_j(0) = 0, \quad j = 2, \ldots \tag{4}$$

که در آن N_{10} تعداد هسته‌های مادر در لحظه‌ی صفر است. تعداد تمامی هسته‌های دختر در لحظه $t = 0$ مساوی صفر فرض شده است. حل معادله (1) به دلیل جفت نبودن آسان است.

$$N_1(t) = c_1\, e^{-\lambda_1 t}. \tag{5}$$

[1] دانشجوی کارشناسی فیزیک، دانشگاه الزهرا f.vahidpour@yahoo.com

[2] گروه فیزیک، دانشگاه زنجان http://www.znu.ac.ir/members/fouladvand.htm

ثابت c_1 از روی شرایط اولیه برابر $c_1 = N_{10}$ تعیین می‌گردد. در نتیجه $N_1(t)$ به صورت زیر است.

$$N_1(t) = N_{10}\, e^{-\lambda_1\, t}. \tag{6}$$

حال برای به دست آوردن $N_2(t)$ ، جواب $N_1(t)$ را در معادله‌ی (2) جایگذاری می‌کنیم تا به معادله زیر برسیم.

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2\, N_2 = \lambda_1\, N_{10}\, e^{-\lambda_1\, t}. \tag{7}$$

می‌بینیم که معادله‌ی مربوط به $N_2(t)$ یک معادله‌ی دیفرانسیل درجه یک، خطی، و ناهمگن است که جواب آن به صورت ترکیب خطی از یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی است.

$$N_2(t) = c_2\, e^{-\lambda_2\, t} + N_2^p(t) \tag{8}$$

$N_2^p(t)$ همان جواب خصوصی این معادله است که با توجه به فرم جمله ناهمگن، آن را به صورت زیر حدس می‌زنیم.

$$N_2^p(t) = r_2\, e^{-\lambda_1\, t}. \tag{9}$$

این جمله را در رابطه (7) جایگذاری کرده و پس از حذف عامل مشترک $e^{-\lambda_1 t}$ به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

$$-\lambda_1\, r_2 + \lambda_2\, r_2 = \lambda_1\, N_{10}. \tag{10}$$

همچنین با توجه به شرایط اولیه $N_2(0) = 0$ نیز به رابطه‌ی زیر بین r_2 و c_2 می‌رسیم.

$$0 = c_2 + r_2. \tag{11}$$

با حل این دو معادله‌ی اخیر، مجهولات r_2 و c_2 به راحتی به دست می‌آیند.

$$r_2 = \frac{\lambda_1\, N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad c_2 = \frac{\lambda_1\, N_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{12}$$

با جایگذاری c_2 و r_2 در رابطه‌ی (8)، $N_2(t)$ به دست می‌آید.

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1\, N_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2\, t} - e^{-\lambda_1\, t}\right]. \tag{13}$$

توجه داریم که $N_2(t)$ تعداد هسته‌های دختر نوع 2 است بنا بر این باید مثبت باشد. اگر $\lambda_2 < \lambda_1$ باشد، آنگاه مخرج فرمول اخیر مثبت است، و صورت نیز مثبت است. در حالت خاص $\lambda_1 = \lambda_2$، دیگر جواب (9) فرم مناسبی برای جواب خصوصی معادله نخواهد بود. فرم مناسب را به صورت $N_2^p(t) = r_2\, t\, e^{-\lambda_1\, t}$ می‌گیریم. با جایگذاری در معادله‌ی (7) خواهیم داشت:

$$-\lambda_1\, r_2\, t\, e^{-\lambda_1\, t} + r_2\, e^{-\lambda_1\, t} + \lambda_2\, r_2\, t\, e^{-\lambda_1\, t} = \lambda_1\, N_{10}\, e^{-\lambda_1\, t},$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \qquad \Longrightarrow \qquad r_2 = \lambda_1\, N_{10}$$

همچنین از روی شرایط اولیه نیز خواهیم داشت $c_2 = 0$، و وقتی $\lambda_1 = \lambda_2$ است $N_2(t)$ به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$N_2(t) = \lambda_1\, N_{10}\, t\, e^{-\lambda_1\, t}. \tag{14}$$

البته در این نوشته فرض می‌شود $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N$ است، و بیش از این به بررسی شرایط خاص نمی‌پردازیم.

به این ترتیب $N_2(t)$ را به دست آوردیم. حالا به حل معادله مربوط به $N_3(t)$ می‌پردازیم.

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2\, N_2 - \lambda_3\, N_3,$$
$$\frac{dN_3}{dt} + \lambda_3\, N_3 = \lambda_2\, N_2 = \frac{\lambda_1\, \lambda_2\, N_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2\, t} - e^{-\lambda_1\, t}\right]. \tag{15}$$

مانند قبل، جوابهای عمومی و خصوصی معادله را با هم جمع می‌کنیم. در این جا جواب خصوصی را با $N_3^p(t)$ نشان می‌دهیم.

$$N_3(t) = c_3\, e^{-\lambda_3\, t} + N_3^p(t). \tag{16}$$

از آنجایی که $N_3^p(t)$ هم یکی از جوابهای معادله است، باید در رابطه (15) صدق کند.

$$\frac{dN_3^p(t)}{dt} + \lambda_3\, N_3^p(t) = \frac{\lambda_1\, \lambda_2\, N_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2\, t} - e^{-\lambda_1\, t}\right]. \tag{17}$$

با توجه به فرم بخش ناهمگن ، جواب خصوصی $N_3^p(t)$ را به این صورت حدس می‌زنیم:

$$N_3^p(t) = r_3\, e^{-\lambda_1\, t} + s_3\, e^{-\lambda_2\, t}. \tag{18}$$

این جواب را در رابطه (15) صدق می‌دهیم.

$$-r_3\lambda_1\, e^{-\lambda_1\, t} - s_3\, \lambda_2\, e^{-\lambda_2\, t} + r_3\, \lambda_3\, e^{-\lambda_1\, t} + s_3\, \lambda_3\, e^{-\lambda_2\, t} = \frac{\lambda_1\, \lambda_2\, N_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2\, t} - e^{-\lambda_1\, t}\right]. \tag{19}$$

پس از فاکتورگیری داریم:

$$e^{-\lambda_1\, t}\left[-r_3\, \lambda_1 + r_3\, \lambda_3\right] + e^{-\lambda_2\, t}\left[-s_3\, \lambda_2 + s_3\, \lambda_3\right] = \frac{\lambda_1\, \lambda_2\, N_{10}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\lambda_2\, t} - e^{-\lambda_1\, t}\right] \tag{20}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب یکسان $e^{-\lambda_1 t}$ و $e^{-\lambda_2 t}$ در دو طرف تساوی، مقادیر s_3 و r_3 به دست می‌آیند.

$$r_3\ (\lambda_3-\lambda_1)=\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,N_{10}}{\lambda_2-\lambda_1} \quad\Rightarrow\quad r_3=\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,N_{10}}{(\lambda_2-\lambda_1)\,(\lambda_3-\lambda_1)}, \tag{21}$$

$$s_3\ (\lambda_3-\lambda_2)=\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,N_{10}}{\lambda_1-\lambda_2} \quad\Rightarrow\quad s_3=\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,N_{10}}{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_3-\lambda_2)}. \tag{22}$$

حال برای پیدا کردن c_3 از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم.

$$N_3(0)=0 \quad\Rightarrow\quad c_3+r_3+s_3=0 \quad\Rightarrow\quad c_3=-r_3-s_3. \tag{23}$$

که با توجه به روابط (21) و (22) به دست می‌آوریم:

$$c_3=\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,N_{10}}{(\lambda_1-\lambda_3)\ (\lambda_2-\lambda_3)}. \tag{24}$$

به این ترتیب می‌توان این ضرایب را در $N_3(t)$ جایگذاری کرد و $N_3(t)$ را به دست آورد.

$$N_3(t)=\lambda_1\,\lambda_2\,N_{10}\ \left[\frac{e^{-\lambda_1\,t}}{(\lambda_2-\lambda_1)\ (\lambda_3-\lambda_1)}+\frac{e^{-\lambda_2\,t}}{(\lambda_1-\lambda_2)\ (\lambda_3-\lambda_2)}\right. \tag{25}$$

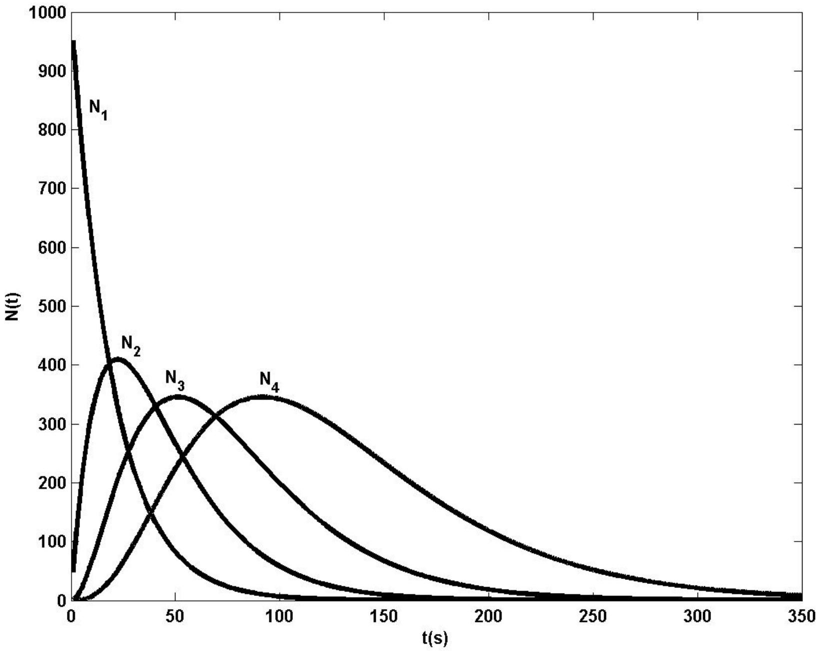
$$\left.+\frac{e^{-\lambda_3\,t}}{(\lambda_1-\lambda_3)\ (\lambda_2-\lambda_3)}\right]. \tag{26}$$

با انجام مقداری عملیات ریاضی، به راحتی می‌توان $N_4(t)$ را نیز پیدا کرد.

$$\begin{aligned}N_4(t)=N_{10}\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,&\left[\frac{e^{-\lambda_1\,t}}{(\lambda_2-\lambda_1)\ (\lambda_3-\lambda_1)\ (\lambda_4-\lambda_1)}\right.\\&+\frac{e^{-\lambda_2\,t}}{(\lambda_1-\lambda_2)\ (\lambda_3-\lambda_2)\ (\lambda_4-\lambda_2)}\\&+\frac{e^{-\lambda_3\,t}}{(\lambda_1-\lambda_3)\ (\lambda_2-\lambda_3)\ (\lambda_4-\lambda_3)}\\&\left.+\frac{e^{-\lambda_4\,t}}{(\lambda_1-\lambda_4)\ (\lambda_2-\lambda_4)\ (\lambda_3-\lambda_4)}\right].\end{aligned} \tag{27}$$

در شکل ۱، تغییرات N_1، N_2، N_3، و N_4 بر حسب زمان نشان داده شده است. مقادیر عددی λ_1 تا λ_4 به ترتیب عبارتند از: $\lambda_1=0.5$، $\lambda_2=0.4$، $\lambda_3=0.3$، و $\lambda_4=0.2$.

با توجه به جوابهای به دست آمده، می‌توان شکل عمومی جوابها را برای هر هسته دختر دلخواه i ام حدس زد [۴]: $(\lambda_0:=1)$



شکل ۱: در این شکل تغییرات N_1، N_2، N_3، و N_4 بر حسب زمان نشان داده شده است. مقادیر عددی λ_1 تا λ_4 به ترتیب عبارتند از: $\lambda_1 = 0.5$، $\lambda_2 = 0.4$، $\lambda_3 = 0.3$، و $\lambda_4 = 0.2$.

$$N_i(t) = N_{10}\, \lambda_{i-1}\, \lambda_{i-2},\ \ldots\ \lambda_1 \sum_{k=1}^{i} \frac{e^{-\lambda_k\, t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i} (\lambda_j - \lambda_k)}. \tag{28}$$

برای اثبات رابطه بالا از استقراء کمک می‌گیریم. در واقع باید نشان دهیم $N_{i+1}(t)$ در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{dN_{i+1}}{dt} = \lambda_i = mN_i - \lambda_{i+1}\, N_{i+1}. \tag{29}$$

یا به طور معادل باید نشان دهیم که رابطه

$$\frac{dN_{i+1}}{dt} + \lambda_{i+1}\, N_{i+1} = \lambda_i\, N_i \tag{30}$$

برقرار است. بدین منظور نخست $N_{i+1}(t)$ و $\dfrac{dN_{i+1}(t)}{dt}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$N_{i+1}(t) = N_{10}\, \lambda_i\, \lambda_{i-1},\ \ldots\ \lambda_1 \sum_{k=1}^{i+1} \frac{e^{-\lambda_k\, t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1} (\lambda_j - \lambda_k)}. \tag{31}$$

با مشتق گیری حواهیم داشت:

$$\frac{dN_{i+1}}{dt} = N_{10}\lambda_i\,\lambda_{i-1},\ \ldots\ \lambda_1 \sum_{k=1}^{i+1} \frac{-\lambda_k\, e^{-\lambda_k\, t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)} \tag{32}$$

حال دو عبارت اخیر را در رابطه (30) قرار می‌دهیم تا به رابطه زیر برسیم:

$$\begin{aligned} & N_{10}\,\lambda_i\,\lambda_{i-1},\ \ldots\ \lambda_1\ \textstyle\sum_{k=1}^{i+1}\ \dfrac{-\lambda_k\, e^{-\lambda_k\, t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)} \\ & +\lambda_{i+1}\, N_{10}\,\lambda_i\,\lambda_{i-1},\ldots\ \lambda_1\ \textstyle\sum_{k=1}^{i+1}\ \dfrac{e^{-\lambda_k\, t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)} \\ & \stackrel{?}{=} \lambda_i\, N_{10}\,\lambda_{i-1}\,\lambda_{i-2},\ \ldots\ \lambda_1\ \textstyle\sum_{k=1}^{i}\ \dfrac{e^{-\lambda_k\, t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i}(\lambda_j - \lambda_k)}. \end{aligned} \tag{33}$$

سپس عامل مشترک $N_{10}\ \lambda_1\ \ldots\ \lambda_i$ را از دو طرف این رابطه حذف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{i+1} \frac{-\lambda_k e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)} \quad + \quad \lambda_{i+1}\sum_{k=1}^{i+1} \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)} \\ & \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{i} \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i}(\lambda_j - \lambda_k)} \end{aligned} \tag{34}$$

پس از فاکتور گیری، سمت چپ این رابطه به صورت زیر در می‌آید.

$$\sum_{k=1}^{i+1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_k)e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)} \tag{35}$$

جمله $i+1$ ام جمع، صفر خواهد شد. بنا بر این می‌توان حد بالای جمع را تا i گرفت:

$$\sum_{k=1}^{i} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_k)e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i+1}(\lambda_j - \lambda_k)}. \tag{36}$$

در مخرج عبارت داخل $\sum$، جمله $j = i+1$ را جدا کرده که با جمله $(\lambda_{i+1} - \lambda_k)$ در صورت ساده می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{i} \frac{e^{-\lambda_k t}}{\prod_{j=1(j\neq k)}^{i}(\lambda_j - \lambda_k)}. \tag{37}$$

که در واقع همان سمت راست رابطه (34) است. بدین ترتیب حکم استقراء ثابت شد و می‌توان شکل عمومی جوابها را برای هر هسته دختر دلخواه، از روی رابطه (28) به دست آورد.

مراجع

[1] Robley D. Evans, & The Atomic Nucleus (Krieger,Malabar,FL,1982), Ie Print of 14th ed., pp. 470-490.

[2] Kenneth S. Krane, Introductory Nuclear Physics (Wiley, New York, 1987), pp. 170-173.

[3] K. Heyde. Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics (IOP, Bristol, 2000), 2nd ed., pp. 59-65.

[4] Dobromir S. Pressyanov: "Short solution of the radioactive decay chain equations", *American Journal of Physics*, vol. 70, no. 4 (Apr 2002), pp. 444-445.

در کُرنل، می‌باید درس تهیه می‌کردم، باید خیلی به آزمایش‌گاه می‌رفتم. ... اما هنگامی که وقتش شد که مقداری تحقیق انجام دهم، نمی‌توانستم کار کنم. کمی خسته بودم. علاقه‌مند نبودم. نمی‌توانستم تحقیق کنم! این وضعیت برای مدتی که حس می‌کردم چند سال است ادامه یافت. البته وقتی که به عقب برمی‌گردم و زمان را حساب می‌کنم، می‌بینم نباید آن‌قدر طولانی بوده باشد. شاید حالا فکر نمی‌کنم که آن قدر طول کشیده است، ولی آن وقت‌ها، به نظر می‌رسید که زمانِ خیلی درازی بوده است. من به سادگی نمی‌توانستم هیچ مسئله‌ای را شروع کنم. یادم می‌آید که یک یا دو جمله در موردِ مسئله‌ای درباره‌ی پرتوهای گاما نوشتم و نتوانستم جلوتر بروم. متقاعد شده بودم که به خاطرِ جنگ و چیزهای دیگر (مرگِ همسرم) از پای درآمده ام.

حالا آن وضعیّت را خیلی بهتر می‌فهمم. اول از همه، آدمِ جوان درک نمی‌کند که تهیه‌ی درس‌نامه‌های خوب ــ مخصوصاً برای اولین بار ــ ارائه‌ی درس، تهیه‌ی مسائلِ امتحانی، و بررسیِ این‌که آن‌ها سوالاتِ معقولی هستند، چه قدر زمان می‌برد. من خوب درس می‌دادم، از آن کلاس‌هایی که درباره‌ی هر درس فکرِ زیادی می‌کردم. اما نمی‌فهمیدم که این واقعاً کارِ زیادی است!

R. Feynman: "Surely You are Joking Mr Feynam", p. 171