گاما، شماره ی ِ ۱۰، بهار ِ ۱۳۸۵

فاصله يِ زمانی يِ دو غروب ِ متوالی يِ ماه[1]

X1-036 (2006/02/12) mamwad@mailaps.org **محمد خرمی**

فاصله يِ زمانی يِ دو غروب ِ متوالی يِ ماه، از رو يِ هندسه يِ مدار ِ ماه دور ِ زمین و چرخش ِ زمین محاسبه می‌شود.

0 مقدمه

وضعیت ِ نسبی يِ زمین و ماه و خورشید، بعد از یک ماه ِ قمری تقریباً تکرار می‌شود. هر ماه ِ قمری 29.5 روز ِ خورشیدی است. یعنی طی ِ یک ماه ِ قمری، در یک نقطه از زمین به طور ِ میان‌گین 29.5 بار خورشید غروب می‌کند. حرکت ِ ماه و خورشید در آسمان چنان است که ماه از خورشید عقب می‌ماند و این عقب‌مانده‌گی، طی ِ یک ماه ِ قمری دقیقاً یک دور می‌شود. پس طی ِ یک ماه ِ قمری، در یک نقطه از زمین ماه به طور ِ میان‌گین 28.5 بار غروب می‌کند. از این‌جا معلوم می‌شود میان‌گین فاصله يِ زمانی يِ دو غروب ِ متوالی يِ ماه ($\bar{t}_{\rm m}$)

$$\bar{t}_{\rm m} = \frac{29.5}{28.5}\,\bar{t}_{\rm s} \tag{1}$$

است، که $\bar{t}_{\rm s}$ روز ِ خورشیدی يِ میان‌گین (فاصله يِ زمانی يِ میان‌گین ِ دو غروب ِ متوالی يِ خورشید در یک نقطه از زمین) است. پس

$$\bar{t}_{\rm m} = 1.035\,\bar{t}_{\rm s}. \tag{2}$$

داریم

$$\bar{t}_{\rm s} = 24\,h. \tag{3}$$

از این‌جا

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

$$\bar{t}_{\rm m} - 24\,{\rm h} = 50\,{\rm min}. \tag{4}$$

این یعنی در یک نقطه از زمین، ماه به طور ِ میان‌گین هر روز نسبت به روز ِ قبل به طور ِ میان‌گین 50 min دیرتر غروب می‌کند. البته روشن است که بحث را به نقاط ی از زمین محدود کرده ایم که ماه طلوع و غروب دارد. سئال این است که فاصله یِ زمانی یِ دو غروب ِ متوالی یِ ماه (روز ِ قمری، $t_{\rm m}$) ثابت است یا نَه، و اگر نَه بسته‌گی یِ آن به زمان و مکان چه‌گونه است.

1 هندسه یِ مسئله

کلیات ِ این مسئله بسیار شبیه ِ مسئله یِ حرکت‌ها یِ زمین و خورشید است، که در [1] بررسی شده. محور ِ چرخش ِ زمین به دور ِ خود را محور ِ z می‌گیریم. به این ترتیب بردار ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش ِ زمین $\omega_0\,\hat{\mathbf{z}}$ است، که

$$\omega_0 = \frac{2\,\pi}{t_0}, \tag{5}$$

و t_0 روز ِ نجومی است. روز ِ نجومی دوره یِ چرخش ِ زمین است، و رابطه اَش با روز ِ خورشیدی یِ میان‌گین چنین است.

$$\frac{1}{t_0} = \frac{1}{\bar{t}_{\rm s}} + \frac{1}{y}, \tag{6}$$

که y سال ِ خورشیدی است. از این‌جا معلوم می‌شود

$$t_0 = \bar{t}_{\rm s} - 4\,{\rm min}. \tag{7}$$

اندازه یِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ گردش ِ ماه دور ِ زمین (یعنی سرعت ِ زاویه‌ای یِ گردش نسبت به ستاره‌ها یِ دور) Ω_0 است. رابطه یِ این کمیت با ماه ِ قمری یِ میان‌گین ($\bar{T}_{\rm m}$) چنین است.

$$\frac{1}{\bar{T}_{\rm m}} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{y}, \tag{8}$$

که T_0 دوره یِ گردش ِ ماه دور ِ زمین است:

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\Omega_0}. \tag{9}$$

جهت ِ بردار ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ گردش ِ ماه دور ِ زمین $\hat{\mathbf{z}}$ نیست بل که $\hat{\mathbf{n}}$ است، که با $\hat{\mathbf{z}}$ زاویه یِ η می‌سازد. جهت ِ ماه نسبت به مرکز ِ زمین در زمان ِ t را با $\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)$ نمایش می‌دهیم. این

جهت با

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)=R[\Phi(t)\,\hat{\mathbf{n}}]\,\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(0) \tag{10}$$

داده می‌شود، که R عمل‌گر ِ دوران به اندازه ي زاويه يِ Φ حول ِ محور ِ $\hat{\mathbf{n}}$، و $\Phi(t)$ زاويه يِ گردش ِ ماه طی ِ زمان ِ t است:

$$\dot{\Phi}=\Omega_0. \tag{11}$$

جهت ِ يک نقطه از سطح ِ زمين نسبت به مرکز ِ زمين در زمان ِ t را با $\hat{\mathbf{r}}(t)$ نمايش می‌دهيم. اين جهت هم با

$$\hat{\mathbf{r}}(t)=R(\omega_0\,t\,\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{r}}(0) \tag{12}$$

داده می‌شود. غروب (يا طلوع) در يک نقطه از زمين زمان ی رخ می‌دهد که جهت ِ آن نقطه نسبت به مرکز ِ زمين بر جهت ِ ماه نسبت به مرکز ِ زمين عمود باشد:

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)\cdot\hat{\mathbf{r}}(t)=0. \tag{13}$$

داريم

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)\cdot\hat{\mathbf{r}}(t)=\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(0)\cdot\{R[-\Phi(t)\,\hat{\mathbf{n}}]\,R(\omega_0\,t\,\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{r}}(0)\}. \tag{14}$$

سرعت ِ زاويه يِ چرخش ِ زمين تقريباً ثابت است. اگر سرعت ِ زاويه‌ای يِ گردش ِ ماه هم ثابت و جهت ِ آن با سرعت ِ زاويه‌ای يِ چرخش ِ زمين موازی می‌بود، آن‌گاه

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)\cdot\hat{\mathbf{r}}(t)=\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(0)\cdot\{R[(\omega_0-\Omega_0)\,t\,\hat{\mathbf{z}}]\,\hat{\mathbf{r}}(0)\}, \tag{15}$$

که در اين صورت وضعيت ِ نسبی يِ ماه و يک نقطه يِ معين در زمين، بر حسب ِ زمان دوره‌ای با دوره يِ

$$\tau:=\frac{2\,\pi}{\omega_0-\Omega_0} \tag{16}$$

می‌شد. در اين حالت فاصله يِ زمانی يِ دو غروب ِ متوالی يِ ماه در هر نقطه يِ زمين، هم‌واره τ می‌بود. اما سرعت ِ زاويه‌ای يِ گردش ِ ماه ثابت نيست، و جهت ِ اين سرعت ِ زاويه‌ای هم با جهت ِ سرعت ِ زاويه‌ای يِ چرخش ِ زمين موازی نيست. به همين خاطر فاصله يِ دو غروب ِ متوالی يِ ماه در هر نقطه يِ زمين، نَه ثابت است و نَه مستقل از مکان. البته روز ِ قمری يِ ميان‌گين از رابطه ای شبيه ِ رابطه يِ بالا به دست می‌آيد:

$$\frac{1}{\bar{t}_\mathrm{m}} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{T_0}, \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\bar{t}_\mathrm{s}} - \frac{1}{\bar{T}_\mathrm{m}}, \tag{18}$$

که در آن از (6) و (8) استفاده شده است.

فرض کنید در زمان ـِ صفر، در یک نقطه از زمین ماه غروب کند. در این حالت،

$$\hat{\mathbf{r}}(0)\cdot\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{m}(0) = 0. \tag{19}$$

اما ضمناً $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{m}$ همیشه بر سرعت ـِ زاویه‌ای یِ گردش ـِ ماه دور ـِ زمین عمود است. پس،

$$\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{m}(0) \propto \hat{\mathbf{r}}(0)\times\hat{\mathbf{n}}. \tag{20}$$

بردار ـِ $\mathbf{r}_\mathrm{m}(t)$ با

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\mathrm{m}(t) &= R[\Phi(t)\,\hat{\mathbf{n}}]\,\mathbf{r}_\mathrm{m}(0),\\ \mathbf{r}_\mathrm{m}(0) &= \hat{\mathbf{r}}(0)\times\hat{\mathbf{n}},\end{aligned} \tag{21}$$

با جهت ـِ ماه نسبت به مرکز ـِ زمین موازی است و شرط ـِ غروب ـِ ماه را می‌شود عمودشدن ـِ این بردار بر $\hat{\mathbf{r}}(t)$ گرفت.

غروب ـِ بعدی یِ ماه در آن نقطه، در $t = t_\mathrm{m}$ رخ می‌دهد. به این ترتیب،

$$[R(\omega_0\,t_\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{r}}(0)]\cdot\{R(\Omega_0\,t_\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{n}})\,[\hat{\mathbf{r}}(0)\times\hat{\mathbf{n}}]\} = 0. \tag{22}$$

هدف یافتن ـِ جواب ی از این معادله برا یِ t_m است که به t_0 نزدیک است.

2 حل ـِ تقریبی

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\delta &:= t_\mathrm{m} - t_0,\\ \hat{\mathbf{u}} &:= \hat{\mathbf{r}}(0),\\ \mathbf{v} &:= \mathbf{r}_\mathrm{m}(0).\end{aligned} \tag{23}$$

معادله یِ (22) می‌شود

$$[R(\omega_0\,\delta\,\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{u}}]\cdot[R(\Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf{n}})\,(\hat{\mathbf{u}}\times\hat{\mathbf{n}})]=0. \tag{24}$$

فرض کنیم زاویه‌ها یِ $(\omega_0\,\delta)$ و $(\Omega_0\,t_{\rm m})$ کوچک اند. تا مرتبه یِ اول نسبت به این زاویه‌ها داریم

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}(t_{\rm m})\; &=\; \hat{\mathbf{u}}+\omega_0\,\delta\,\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}},\\ \mathbf{r}_{\rm m}(t_{\rm m})\; &=\; \mathbf{v}+\Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{25}$$

به این ترتیب، معادله یِ (24) تا مرتبه یِ یک نسبت به این زاویه‌ها می‌شود

$$\omega_0\,\delta\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{v}+\Omega_0\,t_{\rm m}\,(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{u}}=0. \tag{26}$$

با جاگذاری یِ $\mathbf{r}_{\rm m}(0)$ از (21)،

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{v}\; &=\; -[\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})],\\ (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{u}}\; &=\; 1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2,\end{aligned} \tag{27}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_{\rm m}}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}. \tag{28}$$

البته تا مرتبه یِ یک نسبت به $\Omega_0\,t_{\rm m}$ (یا $\omega_0\,\delta$)، جواب در واقع

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_0}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}, \tag{29}$$

است.

اگر $\hat{\mathbf{n}}$ با $\hat{\mathbf{z}}$ برابر باشد، آن‌گاه (28) به شکل ِ ساده یِ

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_{\rm m}}{\omega_0} \tag{30}$$

در می‌آید، که (17) میان‌گین ِ آن است.

از رابطه یِ (29) می‌شود مرتبه یِ δ را به دست آورد. با توجه به این که نسبت ِ ω_0 به Ω_0 تقریباً 30 است، δ از مرتبه یِ (1/30) ِ روز است، که می‌شود 50 دقیقه. این در واقع همان رابطه یِ (4) است. از این‌جا معلوم می‌شود خطا یِ نسبی یِ ناشی از جاگذاری یِ t_0 به جا یِ $t_{\rm m}$ در (28)، از مرتبه یِ (1/30) است. ضمناً خطا یِ نسبی یِ ناشی از چشم‌پوشی از جمله‌ها یِ $(\omega_0\,\delta)^2$ در برابر ِ $(\omega_0\,\delta)$، از مرتبه یِ $(2\,\pi/30)$، یا (1/5) است. به این ترتیب انتظار می‌رود با واردکردن ِ جمله‌ها یِ مرتبه‌یِ‌دو نسبت به $(\omega_0\,\delta)$ یا $(\Omega_0\,t_0)$، مقدار ِ δ با دقت ِ چند دقیقه به دست آید.

پس معادله یِ (24) را تا مرتبه یِ دوم نسبت به زاویه‌ها یِ $(\omega_0\,\delta)$ و $(\Omega_0\,t_{\rm m})$ بنویسیم. معادله‌ها یِ (25) می‌شوند

$$\hat{\mathbf{r}}(t_{\rm m}) \;=\; \hat{\mathbf{u}} + \omega_0\,\delta\,\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}} + \frac{(\omega_0\,\delta)^2}{2}\,\hat{\mathbf{z}}\times\;(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}}),$$

$$\mathbf{r}_{\rm m}(t_{\rm m}) \;=\; \mathbf{v} + \Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v} - \frac{(\Omega_0\,t_{\rm m})^2}{2}\,\mathbf{v}. \tag{31}$$

در رابطه یِ دوم از این استفاده شده که $\hat{\mathbf{n}}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است. به این ترتیب، تا مرتبه یِ دوم،

$$(\omega_0\,\delta)\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{v} + (\Omega_0\,t_{\rm m})\,(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{u}} \;+\; (\omega_0\,\delta)\,(\Omega_0\,t_{\rm m})\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v})$$

$$+\;\frac{(\omega_0\,\delta)^2}{2}\,[\hat{\mathbf{z}}\times\;(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})]\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{32}$$

با استفاده از (21)،

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}) \;&=\; -(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,[(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}],\\ [\hat{\mathbf{z}}\times\;(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})]\cdot\mathbf{v} \;&=\; (\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,[(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}].\end{aligned} \tag{33}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\delta \;=\; &\frac{\Omega_0\,t_{\rm m}}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\\ &+\frac{(\Omega_0\,t_{\rm m})^2}{\omega_0}\,\frac{(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\,\left\{\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}}}{2}-\frac{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u})\,[1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2]}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\right\}.\end{aligned} \tag{34}$$

در این رابطه هم می‌شود به جا یِ $t_{\rm m}$، در جمله یِ اول $(t_0+\delta)$ و در جمله یِ دوم t_0 گذاشت. حتا می‌شود در جمله یِ اول هم به جا یِ $t_{\rm m}$ خود ِ t_0 را گذاشت. علت آن است که (δ/t_0) از مرتبه یِ $(\Omega_0\,t_{\rm m})^2$ است. پس خطا یِ ناشی از درنظرنگرفتن ِ جمله‌ها یِ $(\Omega_0\,t_{\rm m})^3$، با خطا یِ ناشی از جاگذاری یِ t_0 به جا یِ $t_{\rm m}$ در جمله یِ اول هم‌مرتبه است. پس

$$\begin{aligned}\delta \;=\; &\frac{\Omega_0\,t_0}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\\ &+\frac{(\Omega_0\,t_0)^2}{\omega_0}\,\frac{(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\,\left\{\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}}}{2}-\frac{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u})\,[1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2]}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\right\}.\end{aligned} \tag{35}$$

تغییر ِ δ به خاطر ِ تغییر ِ بردارها یِ $\hat{\mathbf{u}}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\cos\eta. \tag{36}$$

در نقطه ای از زمین با عرض ِ جغرافیایی یِ λ،

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}}=\sin\lambda. \tag{37}$$

رابطه یِ ساده‌تر ِ (29) می‌شود

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_0}{\omega_0}\,f(y), \tag{38}$$

که

$$f(y):=\frac{1-y^2}{\cos\eta-y\,\sin\lambda}. \tag{39}$$

در این‌جا،

$$y:=\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}}, \tag{40}$$

و

$$y=\cos\eta\,\sin\lambda+x\,\sin\eta\,\cos\lambda, \tag{41}$$

که

$$x:=\cos\xi. \tag{42}$$

ξ زاویه یِ $\hat{\mathbf{u}}$ با صفحه یِ شامل ِ $\hat{\mathbf{z}}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ است.

بررسی را به جاها یی محدود کنیم که عرض ِ جغرافیایی پِشان بزرگ نیست، تا ماه همیشه طلوع و غروب داشته باشد:

$$|\lambda|+\tilde{\eta}<\frac{\pi}{2}, \tag{43}$$

که

$$\tilde{\eta}:=\cos^{-1}(|\cos\eta|), \tag{44}$$

یعنی $\tilde{\eta}$ زاویه یِ حاده یِ راستا یِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش ِ زمین با راستا یِ سرعت ِ زاویه ای یِ گردش ِ ماه دور ِ زمین است. از شرط ِ (43) نتیجه می‌شود مخرج ِ f، به ازا یِ $|x|\leq 1$ تغییرِعلامت نمی‌دهد.

f در $x=\pm 1$ فرینه می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} f_\pm &:= f(x=\pm 1), \\ &= \frac{\cos(\lambda\pm\eta)}{\cos\lambda}. \end{aligned} \tag{45}$$

جز این، f ممکن است در $y=y_*$ هم فرینه شود، که y_* صفر ِ مشتق ِ f نسبت به y است:

$$(1+y_*^2)\,\sin\lambda - 2\,y_*\,\cos\eta = 0. \tag{46}$$

این معادله دو ریشه دارد که حاصلِ‌ضرب ِشان یک است. ریشه ای که اندازه اَش بزرگ‌تر از یک است قابلِ‌قبول نیست. پس،

$$y_* = \frac{\cos\eta}{\sin\lambda}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\,\right]. \tag{47}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$x_* = \frac{\cos\eta}{\sin\lambda\,\cos\lambda\,\sin\eta}\left[\cos^2\lambda-\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\,\right]. \tag{48}$$

این مقدار ِ x قابلِ‌قبول است، اگر قدرِمطلق ِ آن نابزرگ‌تر از یک باشد:

$$-1 \le \frac{\cos\eta}{\sin\lambda\,\cos\lambda\,\sin\eta}\left[\cos^2\lambda-\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\,\right] \le 1. \tag{49}$$

$\sin\eta$ و $\cos\lambda$ نامنفی اند. پس شرط‌ها یِ بالا را می‌شود چنین نوشت.

$$\cos\lambda\,\cos(|\lambda|+\tilde\eta)-\sqrt{\cos^2\eta-\sin^2\lambda}\,\le\,0, \tag{50}$$

$$\cos\lambda\,\cos(|\lambda|-\tilde\eta)-\sqrt{\cos^2\eta-\sin^2\lambda}\,\ge\,0, \tag{51}$$

که با استفاده از

$$\cos^2\eta-\sin^2\lambda=\cos(|\lambda|-\tilde\eta)\,\cos(|\lambda|+\tilde\eta), \tag{52}$$

می‌شوند

$$\cos|\lambda|-\sqrt{\frac{\cos(|\lambda|-\tilde\eta)}{\cos(|\lambda|+\tilde\eta)}}\,\le\,0, \tag{53}$$

$$\cos|\lambda|-\sqrt{\frac{\cos(|\lambda|+\tilde\eta)}{\cos(|\lambda|-\tilde\eta)}}\,\ge\,0. \tag{54}$$

شرط ـ (53) می‌شود

$$\frac{\cos(|\lambda|-\tilde{\eta})}{\cos(|\lambda|+\tilde{\eta})} \geq \cos^2|\lambda|. \tag{55}$$

این شرط به ازا یِ $\tilde{\eta}=0$ برقرار است. شرط ـ (43) تضمین می‌کند مخرج ـ طرف ـ چپ ـ (55) مثبت است. ضمناً داریم

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\eta}}\left[\frac{\cos(|\lambda|-\tilde{\eta})}{\cos(|\lambda|+\tilde{\eta})}\right] = \frac{\sin(2|\lambda|)}{\cos^2(|\lambda|+\tilde{\eta})},$$

$$\geq 0, \tag{56}$$

پس طرف ـ چپ ـ (55)، نسبت به $\tilde{\eta}$ نانزولی است. به این ترتیب (55) و در نتیجه (53) اتحاد است.

شرط ـ (54) می‌شود

$$\frac{\cos(|\lambda|+\tilde{\eta})}{\cos(|\lambda|-\tilde{\eta})} \leq \cos^2|\lambda|. \tag{57}$$

این شرط اتحاد نیست. این بار مشتق ـ طرف ـ چپ نسبت به $\tilde{\eta}$ نامثبت است، و نامساوی هم به ازا یِ $\tilde{\eta}=0$ برقرار نیست (مگر λ هم صفر باشد). شرط ـ (57) هم‌ارز است با

$$\sin(2|\lambda|) \leq [3+\cos(2|\lambda)]\,\tan\tilde{\eta}, \tag{58}$$

یا

$$\tan(\tilde{\eta}) \geq \frac{\sin(2|\lambda|)}{3+\cos(2|\lambda|)}. \tag{59}$$

می‌شود هم شرط را بر حسب ـ $|\lambda|$ به دست آورد:

$$\sin(2|\lambda|-\tilde{\eta}) \leq 3\sin\tilde{\eta}, \tag{60}$$

که می‌شود

$$\tilde{\eta} \geq \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right), \tag{61}$$

$$\vee$$

$$\tilde{\eta} \leq \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \;\wedge\; \left[\frac{\tilde{\eta}}{2}+\frac{1}{2}\,\sin^{-1}(3\,\sin\tilde{\eta}) \leq |\lambda| \leq \frac{\tilde{\eta}}{2}-\frac{1}{2}\,\sin^{-1}(3\,\sin\tilde{\eta})+\frac{\pi}{2}\right]. \tag{62}$$

با فرض ـ این که این شرط برقرار است، f یک فرینه یِ دیگر هم دارد:

$$f_* := f(y_*),$$
$$= \frac{2}{\cos\eta}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\right]^{-1}. \quad (63)$$

علامت ـ f عوض نمی‌شود. پس هرسه‌فرینه یِ آن یا مثبت اند یا منفی. چون فرینه یِ f_* بین ـ فرینه‌ها یِ $f_\pm$ رخ می‌دهد، مقدار ـ f_* یا از هردو یِ $f_\pm$ کوچک‌تر است، یا از هردو یِ $f_\pm$ بزرگ‌تر. روشن است که

$$|f_*| \geq \frac{1}{\cos\tilde\eta} \geq \cos\tilde\eta \geq \frac{\cos(\tilde\eta+|\lambda|)}{\cos|\lambda|}. \quad (64)$$

پس $|f_*|$ از قدرِمطلق ـ دستِ‌کم یک ی از دوفرینه یِ دیگر بزرگ‌تر است، و در نتیجه از قدرِمطلق ـ هردوفرینه یِ دیگر بزرگ‌تر است.

خلاصه، f سه فرینه دارد (f_* و $f_\pm$) اگر (61) یا (62) برقرار باشند، و دو فرینه دارد ($f_\pm$) اگر نَه (61) برقرار باشد و نَه (62). اگر (61) یا (62) برقرار باشند، آن‌گاه

$$\frac{\cos(\tilde\eta+|\lambda|)}{\cos|\lambda|} \leq |f| \leq \frac{2}{\cos\tilde\eta}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sin|\lambda|}{\cos\tilde\eta}\right)^2}\right]^{-1}, \quad (65)$$

و اگر نَه (61) برقرار باشد و نَه (62)، آن‌گاه

$$\frac{\cos(\tilde\eta+|\lambda|)}{\cos|\lambda|} \leq |f| \leq \frac{\cos(\tilde\eta-|\lambda|)}{\cos|\lambda|}. \quad (66)$$

3 مقدارها یِ عددی

مشخصات ـ مدار ـ ماه دور ـ زمین را می‌شود در مثلاً [2] یافت. مدار ـ ماه دور ـ زمین بیضی یی با خروج‌ازمرکز ـ e است، که

$$e = 0.055. \quad (67)$$

دوره یِ گردش ـ ماه دور ـ زمین هم

$$T_0 = 27.3\,\mathrm{d} \quad (68)$$

است. $\hat{\mathbf{z}}$ (جهت ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ چرخش ـِ زمین)، در مقیاس ـِ سال ثابت است. زاویه یِ این بردار با بردار ـِ عمود بر مدار ـِ زمین دور ـِ خورشید α است:

$$\alpha = 23.5^\circ. \tag{69}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ (جهت ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای یِ گردش ـِ ماه دور ـِ زمین) ثابت نیست و با دوره یِ 19 سال تغییر می‌کند، اما β (زاویه یِ این بردار با بردار ـِ عمود بر مدار ـِ زمین دور ـِ خورشید) تقریباً ثابت است:

$$\beta = 5^\circ. \tag{70}$$

به این ترتیب η ثابت نیست:

$$\cos\eta = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma. \tag{71}$$

γ زاویه ای متغیر است، اما تغییرات َ ش در مقیاس ـِ چند ماه چشم‌گیر نیست.

دیده می‌شود آن چه δ را متغیر می‌کند، تغییرات ـِ Ω_0 و بردار ـِ $\hat{\mathbf{u}}$ است: از تغییر ـِ $\hat{\mathbf{n}}$ طی ـِ چندماه می‌شود چشم پوشید. برا یِ تعیین ـِ محدوده یِ تغییرات ـِ δ، کافی است همان شکل ـِ ساده یِ (29) را به کار ببریم. چون مدار ـِ ماه دور ـِ زمین دایره نیست، Ω_0 ثابت نیست. بر اساس ـِ قانون ـِ دوم ـِ کِپلِر [a]،

$$\Omega_0\, r_{\mathrm{m}}^2 = \mathrm{const.}, \tag{72}$$

که r_{m} فاصله یِ ماه تا زمین است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\,\Omega_0}{\Omega_0} &= 2\,e,\\ &= 0.1.\end{aligned} \tag{73}$$

پس تغییر ـِ نسبی یِ δ به خاطر ـِ تغییر ـِ Ω_0 از مرتبه یِ 10% است.

از (69) تا (71) معلوم می‌شود

$$18.5^\circ \le \eta \le 28.5^\circ. \tag{74}$$

عرض ـِ جغرافیایی یِ تهران 35.5° است. از این داده‌ها معلوم می‌شود برا یِ تهران دستِ‌کم یک ی از شرط‌ها یِ (61) یا (62) برقرار است. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}0.72 \le f \le 1.18, &\qquad \eta = 18.5^\circ,\\ 0.54 \le f \le 1.30, &\qquad \eta = 28.5^\circ.\end{aligned} \tag{75}$$

این یعنی در تهران، فاصله یِ بین ـِ دو غروب ـِ متوالی یِ ماه بین ـِ 27 min تا 65 min است. البته خود ـِ این گستره 10% خطا دارد به خاطر ـِ ثابت‌گرفتن ـِ Ω_0، و از مرتبه یِ 20% خطا به خاطر ـِ درنظرنگرفتن ـِ مرتبه‌ها یِ بالاتر. اگر کلاً 30% خطا در نظر بگیریم، گستره یِ $t_{\rm m}$ ممکن است به 20 min تا 90 min هم برسد.

4 مرجع‌ها

[1] محمد خرمی، فریناز روشنی، احمد شریعتی، و امیرحسین فتح‌اللهی؛ "ساعت ـِ آفتابی"، X1-004 (2001/08/01) (گاما، ش ۳، تابستان ـِ ۱۳۸۳، صص ۵۸ تا ۸۰)

[2] Kennet R. Lang; "Astrophysical data: planets and stars", (Springer Verlag, 1992) chapter 4

5 اسم ـِ خاص

[a] Kepler

مسئله ی ـِ ۴. یک یا چند رسانا در نظر بگیرید که بار ـِ خالص ی رو ی ـِ آن‌ها نباشد. اگر بار ـِ نقطه‌ای ی ـِ q را، که مثبت فرض می‌کنیم، در مجاورت ـِ این رساناها بگذاریم، رو ی ـِ سطح ـِ رساناها یک توزیع ـِ بار ـِ سطحی القا می‌شود (σ). اگر سطح ـِ رویه‌ها را Σ بنامیم، می‌دانیم که $\int_\Sigma \sigma\, da = 0$ (در این جا da عنصر ـِ سطح است). چگالی ی ـِ بار ـِ سطحی در بعض ی جاها مثبت، و در بعض ی جاها منفی است. مجموعه ای را که σ در آن جا مثبت است Σ_+ می‌نامیم. و تعریف می‌کنیم $Q := \int_{\Sigma_+} \sigma\, da$. در باره ی ـِ Q چه می‌توان گفت؟ آیا این ادعا که «اگر یک رسانا داشته باشیم، و رسانا بار ـِ q را در بر نگرفته باشد، همواره $Q < q$ است» درست است؟ آیا این ادعا برا ی ـِ هر تعداد ی از رسانا هم درست است؟