مقایسه ی دو هامیلتونی ی $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ و $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$

افسانه جوادی، ابراهیم ـ کریمی [1]

در این مقاله دو هامیلتونی یِ برهم‌کنش ـ اتم با میدان ـ الکترومغناطیسی را مورد ـ مطالعه قرار داده و در نهایت معادلات ـ بته [a] را برا یِ هامیلتونی یِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ تصحیح می‌کنیم. با این تصحیح نتیجه ای که از این دو همیلتونی گرفته می‌شود با هم برابر خواهد بود، و شبهه یِ قدیمی (درست بودن ـ هامیلتونی یِ $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$) از بین می‌رود.

1 مقدمه

یکی از جالب‌ترین مسائل مطرح در کوانتم — اُپتیک تمایز ـ بین ـ دو هامیلتونی است که در برهم‌کنش ـ اتم — میدان مورد ـ استفاده قرار می‌گیرد:

$$-e\widetilde{E}\cdot\widetilde{r} \qquad\qquad -(\frac{e}{m})\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}+\frac{e^2}{2m}A^2 \tag{1}$$

در سال ـ ۱۹۵۲ برا یِ اولین بار محاسباتی که بر اساس ـ دو برهم‌کنش ـ مختلف پایه‌گذاری شده بودند با هم مقایسه شد و دیده شد که این دو ممکن است به نتایج ـ مختلفی منجر شوند. تلاش ما در این مقاله این است که با در نظر گرفتن ـ شرایطی خاص، هم‌ارزی یِ این دو هامیلتونی را نشان دهیم.
معادلات ـ حرکت برا یِ میدان ـ نوسانی یک اتم ـ دو ترازی در یک میدان ـ استاتیک ـ خارجی به وسیله‌یِ معادلات ـ بته [a] داده شده است. در طول ـ این مقاله از این دسته معادلات استفاده خواهیم کرد. در ابتدا هامیلتونی یِ برهم‌کنش ـ اتم — میدان را معرفی خواهیم کرد ونحوه یِ ظاهر شدن ـ این دو هامیلتونی را به‌عنوان ـ یک اختلال در هامیلتونی اصلی نشان می‌دهیم و در نهایت با استفاده از معادلات ـ بته [a] هم‌ارزی یِ این دو هامیلتونی را نشان خواهیم داد.

---

[1] سنندج — دانش‌گاه کردستان — دانش‌کده‌یِ علوم — گروه فیزیک

2 هامیلتونی یِ برهم‌کنش ـ اتم — میدان

برهم‌کنش ـ یک الکترون با بار ـ e و جرم ـ m با میدان ـ الکترومغناطیسی یِ خارجی ، با هامیلتونی یِ زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}(\widetilde{p} - e\widetilde{A}(\widetilde{r};t))^2 + e\,U(\widetilde{r};t) + V(\widetilde{r}) \tag{2}$$

که در آن $\widetilde{p}$ عمل‌گر ـ تکانه خطی یِ سیستم است و $\widetilde{A}$، U به‌ترتیب پتانسیل‌هایِ برداری و اسکالر ـ میدان ـ خارجی هستند. $\widetilde{V}(\widetilde{r})$ پتانسیلی است که الکترون‌ها را به هسته مقید می‌کند. در این بخش ابتدا این هامیلتونی را از یک ثابت پیمانه‌ای استخراج کرده و سپس آن را به‌شکل ـ ساده شده‌ای برا یِ توصیف برهم‌کنش اتم — میدان می‌نویسیم. حرکت ـ یک الکترون آزاد به‌وسیله‌یِ معادله‌یِ شرودینگر [b] به‌صورت ـ زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \;=\; i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{3}$$

$$p(\widetilde{r};t) \;=\; |\psi(\widetilde{r};t)|^2 \tag{4}$$

$p(\widetilde{r};t)$ چگالی احتمال پیدا کردن ـ الکترون در مکان ـ $\widetilde{r}$ و زمان ـ t است. در معادله‌یِ (3) اگر $\psi(\widetilde{r};t)$ یک جواب باشد پس $\psi_1(\widetilde{r};t) = \psi(\widetilde{r};t)e^{i\lambda}$ هم یک جواب آن خواهد بود، که در آن λ یک فاز ـ ثابت اختیاری است. باید توجه کرد که چگالی یِ احتمال $p(\widetilde{r};t)$، مستقل از انتخاب ـ λ است، بنابراین انتخاب ـ فاز ـ تابع ـ موج کاملاً اختیاری است. اگر فاز به‌صورت ـ تابعی از مکان و زمان باشد وضعیت به گونه‌ای متفاوت خواهد بود

$$\psi(\widetilde{r};t) \longrightarrow \psi(\widetilde{r};t)e^{i\lambda(\tilde{r};t)} \tag{5}$$

هر چند تحت ـ این تبدیل $p(\widetilde{r};t)$ بدون ـ تغییر می‌ماند اما این رابطه در معادله‌یِ (3) صدق نمی‌کند در نتیجه باید جمله‌هایِ جدیدی به معادله اضافه شود:

$$\{-\frac{\hbar^2}{2m}(\widetilde{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\widetilde{A})^2 + e\,U(\widetilde{r};t)\}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{6}$$

که در آن $\widetilde{A}(\widetilde{r};t)$ و $U(\widetilde{r};t)$ تابع‌هایی هستند که باید تحت ـ تبدیلات ـ زیر ناوردا بمانند [2]:

[2] مشاهده پذیرهایِ اصلی همان میدان‌هایِ الکتریکی و مغناطیسی است که تحت ـ تبدیل‌های فوق یکتا هستند.

$$\widetilde{A}(\widetilde{r};t) \longrightarrow \widetilde{A}(\widetilde{r};t) + \frac{\hbar}{e}\widetilde{\nabla}\lambda(\widetilde{r};t) \tag{7}$$
$$U(\widetilde{r};t) \longrightarrow U(\widetilde{r};t) - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial\lambda}{\partial t} \tag{8}$$

معادلهٔ (5) در واقع به‌صورتِ زیر در خواهد آمد

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{9}$$

که در آن $\hat{\mathcal{H}}$ همان هامیلتونی است که در رابطهٔ (1) تعریف شده است.

2.1 تقریبِ دو قطبی و هامیلتونی یِ $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$

الکترونی در فاصله‌یِ $\widetilde{r}_0$ از هسته قرار دارد. هامیلتونی یِ (2) برهم‌کنشِ این اتم را با میدانِ الکترومغناطیسی یِ خارجی توصیف می‌کند، با استفاده از تقریبِ دو قطبی این هامیلتونی را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم. در این تقریب تمامِ اتم در موجِ الکترومغناطیسی که به‌وسیله‌یِ پتانسیلِ برداری یِ $\widetilde{A}(\widetilde{r}+\widetilde{r}_0;t)$ تعریف شده قرار دارد. در واقع طولِ موجِ میدان نسبت به ابعاد اتم بزرگ است، یعنی $\widetilde{k}\cdot\widetilde{r}$ بسیار کوچک است ، در نتیجه می‌توانیم $\widetilde{A}$ را بسط دهیم:

$$\begin{aligned}
\widetilde{k}\cdot\widetilde{r} \ll 1 \qquad \Rightarrow \widetilde{A}(\widetilde{r}+\widetilde{r}_0;t) &= \widetilde{A}(t)\, e^{i[\widetilde{k}\cdot(\widetilde{r}+\widetilde{r}_0)]} \\
&= \widetilde{A}(t)\, e^{i(\widetilde{k}\cdot\widetilde{r}_0)}(1+i\widetilde{k}\cdot\widetilde{r}_0) \\
&= \widetilde{A}(t)\, e^{i(\widetilde{k}\cdot\widetilde{r}_0)}
\end{aligned} \tag{10}$$

معادله یِ شرودینگر [b] (6) در تقریبِ دو قطبی به صورتِ زیر در خواهد آمد

$$\{-\frac{\hbar^2}{2m}(\widetilde{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\widetilde{A}(\widetilde{r}_0;t))^2 + V(\widetilde{r})\}\psi(\widetilde{r};t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\widetilde{r};t)}{\partial t} \tag{11}$$

معادله را در پیمانه‌یِ

$$U(\widetilde{r};t) = 0, \qquad\qquad \widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{A} = 0 \tag{12}$$

نوشته‌ایم[3]. تابع ِ موج ِ جدید ِ $\phi(\widetilde{r};t)$ را به شکل ِ زیر تعریف می‌کنیم[4]

$$\psi(\widetilde{r};t) = e^{[-i\frac{e}{\hbar}\tilde{A}\cdot\tilde{r}]}\phi(\widetilde{r};t) \tag{13}$$

با قرار دادن ِ (13) در (11) و ساده کردن ِ روابط، خواهیم داشت

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1)\phi(\widetilde{r};t) = i\hbar\frac{\partial\phi(\widetilde{r};t)}{\partial t} \tag{14}$$

که در آن

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\widetilde{r}), \qquad \hat{\mathcal{H}}_1 = -e\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}(\widetilde{r}_0;t) \tag{15}$$

به ترتیب $\hat{\mathcal{H}}_0$ هامیلتونی یِ غیر اختلالی و $\hat{\mathcal{H}}_1$ هامیلتونی یِ اختلالی هستند[5].

2.2 هامیلتونی یِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$

در حالت ِ قبل هامیلتونی را برحسب ِ پیمانه‌ای که انتخاب کردیم، نوشتیم و برا یِ $\hat{\mathcal{H}}_1$ به عبارت ِ $-e\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ رسیدیم. اما در بسیاری از مسائل هامیلتونی یِ برهم‌کنش ِ اتم – میدان را برحسب ِ فاکتورهایِ $\widetilde{A}$ و $\widetilde{p}$ می‌نویسند. این عمل در اختلال ِ به‌دست آمده تئثیر ِ قبل ملاحظه‌ای دارد. مجدداً پیمانه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن $U(\widetilde{r};t) = 0$ و $\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{A} = 0$ است[6]. در نتیجه هامیلتونی یِ (1) به‌صورت ِ زیر نوشته می‌شود

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_2 \tag{16}$$

که در آن $\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\widetilde{r})$ و

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{e}{m}\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}(\widetilde{r}_0;t) + \frac{e^2}{2m}A^2(\widetilde{r}_0;t) \tag{17}$$

[3] کاملاً واضح است که $V(\widetilde{r})$ پتانسیل ِ الکترواستاتیکی است که از مقید بودن ِ الکترون به هسته ناشی می‌شود و در صورت بررسی کردن ِ الکترون ِ آزاد مقدار ِ آن صفر خواهد بود.

[4] با تغییر ِ پیمانه‌ها تابع ِ موج فقط در یک فاز تغییر می‌کند، $\psi' = e^{-i\lambda}\psi$. برا یِ به‌دست آوردن ِ مقدار ِ λ باید تابع ِ موج ِ جدید در رابطه یِ $\mathcal{H}\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$ صدق کند. چون از هامیلتونی برهم‌کنشی استفاده می‌کنیم باید شرط ناوردایی پتانسیل ِ برداری و اسکالر برقرار باشد (روابط ِ (6) و (7)). با احتساب این روابط λ برابر خواهد بود با: $\lambda = \frac{e}{\hbar}\widetilde{A}(\widetilde{r};t)\cdot\widetilde{r}$.

[5] در رابطه یِ بالا $\widetilde{E} = -\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial t}$.

[6] شرط ِ $\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{A} = 0$ یعنی $[\widetilde{p},\widetilde{A}] = 0$.

از جمله یِ دوم (به دلیل ِ کوچک بودن) نسبت به جمله یِ اول صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{e}{m}\widetilde{p}\cdot\widetilde{A})\psi(\widetilde{r};t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\widetilde{r};t)}{\partial t} \tag{18}$$

که تعریف می‌کنیم

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = -\frac{e}{m}\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}(\widetilde{r};t) \tag{19}$$

3 اختلاف ِ دو هامیلتونی یِ اختلالی

اولین تئوری در ارتباط با اثر ِ یک میدان ِ الکتریکی یِ یک‌نواخت رو یِ ساختار ِ اتم ِ هیدروژن توسط ِ بته [a] داده شده است. او دو حالت ِ تبهگن ِ $|a>$ و $|b>$ را با دو ضریب ِ میرایی یِ γ_a و γ_b، $\gamma_a \gg \gamma_b$ در نظر گرفت. معادلات ِ بته [a] برا یِ دامنه یِ احتمال ِ a و b به‌صورت ِ زیر است

$$\begin{cases} \dot{a} = -\dfrac{\gamma_a}{2}\,a - \dfrac{i}{\hbar}\,V_{ab}\,b \\ \\ \dot{b} = -\dfrac{\gamma_b}{2}\,b - \dfrac{i}{\hbar}\,V_{ba}\,a \end{cases} \tag{20}$$

V_{ba} المان ماتریس برا یِ گذار $b \longrightarrow a$ برا یِ برهم‌کنش اتم — میدان است. ابتدا برهم‌کنش ِ $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت معادلات بته [a] بیش‌تر به میدان ِ AC به شکل ِ $E(t) = E_0 \sin\nu t$ با بسامد ν تعمیم داده می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{a} = -\dfrac{\gamma_a}{2}\,a + \dfrac{i}{\hbar}\,e\,\widetilde{E}_0\cdot\widetilde{r}_{ab}\,\sin\nu t\,e^{i\omega t}\,b \\ \\ \dot{b} = -\dfrac{\gamma_b}{2}\,b + \dfrac{i}{\hbar}\,e\,\widetilde{E}_0\cdot\widetilde{r}_{ba}\,\sin\nu t\,e^{-i\omega t}\,a \end{cases} \tag{21}$$

که در آن $\widetilde{r}_{ab} =< a|\widetilde{r}|b >$. جملات ِ شامل ِ $e^{-i(\omega+\nu)}$ بسیار سریع نوسان می‌کنند و با میانگین گیری رو یِ زمان از سهم ِ آن‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم، تقریب ِ موج ِ چرخان (RWA)، با استفاده از $\sin\nu t = \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2i}$ و تقریب ِ ذکر شده معادلات ِ (21) به شکل زیر در خواهند آمد

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\gamma_a}{2}\, a - \frac{e}{2\hbar}\, \widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab}\, e^{i\Delta t}\, b \\ \\ \dot{b} = -\frac{\gamma_b}{2}\, b + \frac{i}{2\hbar}\, \widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ba}\, e^{-i\Delta t}\, a \end{cases} \tag{22}$$

که در آن $\Delta := \omega - \nu$ پارامتر ِ واکوکی است. با استفاده از معادلات ِ (22) می‌توانیم معادله ي درجه دومی برا يِ a به‌دست آوریم

$$\ddot{a} + [\frac{\gamma_a}{2} + \frac{\gamma_b}{2} - i\Delta]\dot{a} + [\frac{\gamma_a}{2}(\frac{\gamma_b}{2} - i\Delta) + (\frac{e}{2\hbar})^2|\widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab}|^2]a = 0 \tag{23}$$

جوابی به صورت ِ $a(t) = e^{\mu t}$ را حدس می‌زنیم. با قرار دادن ِاین عبارت در معادله‌يِ (23) به یک معادله‌يِ درجه دوم برحسب ِμ می‌رسیم. ریشه‌های ی این معادله عبارت های زیر را برای دامنه های احتمال حالت ِ a به‌ما می‌دهد

$$a(t) = \frac{1}{4\Omega}[(2\Omega - \Delta + i\delta)e^{-\frac{1}{2}(\gamma - \Delta + i\delta)t} + (2\Omega + \Delta - i\delta)e^{-\frac{1}{2}(\gamma + \Delta - i\delta)t}] \tag{24}$$

که در آن $\gamma = \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}$، $\delta = \frac{\gamma_a - \gamma_b}{2}$ و $\Omega = \sqrt{\frac{1}{4}(\Delta - i\delta)^2 + (\frac{e}{2\hbar})^2|\widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab}|^2}$ است. دامنه يِ احتمال برابر است با

$$a^2(t) = e^{-[(\frac{e}{2\hbar})^2|\widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab}|^2 \frac{\gamma_b}{\Delta^2 + (\frac{\gamma_b}{2})^2}]t} \tag{25}$$

از رابطه يِ بالا کاملاً واضح است که آهنگ فرو ریزش ِ تراز ِ $|a>$ در حالت ِ تشدید $\omega = \nu$ بیش ترین مقدار را داراست. حال اگر در معادله هايِ بته [a] به جايِ V_{ab}، برهم‌کنش ِ $\widetilde{p} \cdot \widetilde{A}$ را جای‌گزین کنیم به فرو ریزش ِ حالت $|a>$ ی منجر می‌شود که با معادله يِ (25) متفاوت خواهد بود. برا يِ برهم‌کنش ِ $\widetilde{p} \cdot \widetilde{A}$ دامنه يِ احتمال برابر است با

$$a^2(t) = e^{-[(\frac{e}{2\hbar})^2|\widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab}|^2(\frac{\omega}{\nu})^2 \frac{\gamma_b}{\Delta^2 + (\frac{\gamma_b}{2})^2}]t} \tag{26}$$

نتیجه بالا با معادله يِ (25) تنها در عامل ِ $(\frac{\omega}{\nu})^2$ تفاوت دارند.

4 معادله‌های ِ حرکت

در این بخش با استفاده از یک سیستم ِ دو ترازی معادله‌هایِ بته [a] را که در رابطه يِ (21) آمده است را استخراج می‌کنیم. برا يِ این مقصود از معادله يِ شرودینگر [b] با برهم‌کنش ِ $\widetilde{r} \cdot \widetilde{E}$ شروع می‌کنیم:

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{i\hbar}{2}\hat{\Gamma} - e\widetilde{r}\cdot\widetilde{E})\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{27}$$

که در آن Γ عمل‌گر ِ نابودی است که واپاشی يِ خودبه‌خودی يِ ترازها را توصیف می‌کند و $\hat{\mathcal{H}}_0$ هامیلتونی مختل نشده با ویژه حالات ِ $|a>$ و $|b>$ است.

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_0|a>=\hbar\omega_a|a> \\ \\ \hat{\mathcal{H}}_0|b>=\hbar\omega_b|b> \end{cases} \tag{28}$$

اگر زمان ِ برهم‌کنش خیل ی بیش‌تر از زمان ِ واهلش حالت‌هایِ داخلی باشد آن‌گاه حالت‌هایِ داخلی اتم به‌سرعت به مقدار ِ شبه ایستایِ خود واپاشی می‌کنند. تنها زمان ِ واپاشی داخلی که در اتم وجود دارد زمان ِ گسیل خودبه‌خودی است که ما آن را در معادله يِ شرودینگر [b] منظور کرده‌ایم. تابع ِ موج ِ سیستم ِ دو ترازی به‌صورت ِ زیر نوشته می‌شود

$$|\psi>=a(t)e^{-i\omega_a t}|a>+b(t)e^{-i\omega_b t}|b> \tag{29}$$

با قرار دادن ِ این رابطه در معادله يِ (27) معادله‌هایِ بته [a] برایِ دامنه‌های a و b به‌دست می‌آید. قبل از جانشینی يِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ به‌جای $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ در معادله يِ شرودینگر [b] باید به این نکته ی مهم توجه کنیم که باید تابع ِ موج با تغییر ِ پیمانه تبدیل شود تنها در این صورت است که می‌توان به روابط صحیحی برای معادله‌های حرکت رسید بنابراین تابع ِ موج $|\psi>$ را به‌صورت ِ مقابل تغییر می‌دهیم

$$\psi'(\widetilde{r};t) = T\psi(\widetilde{r};t) \tag{30}$$

که در آن T برابر است با $e^{[-ie\frac{\tilde{r}\cdot\tilde{A}(t)}{\hbar}]}$. $\psi'(\widetilde{r};t)$ در معادله يِ شرودینگر [b] صدق می‌کند

$$(\hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{i\hbar}{2}\hat{\Gamma}' - \frac{e}{m}\widetilde{p}\cdot\widetilde{A} + \frac{e^2}{2m}A^2)\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} \tag{31}$$

توجه کنید که عمل‌گرهایِ نابودی در روابط ِ (27) و (31) با هم متفاوتند

$$\hat{\Gamma}' := T\,\hat{\Gamma}\,T^{\dagger} \tag{32}$$

$\hat{\Gamma}'$ به $\widetilde{r}$ و t بسته‌گی دارد و در پایه يِ $|a>$ و $|b>$ غیر ِ قطری است.

(33)

$|\psi'>$ را برحسب ِ $|a>$ و $|b>$ بسط می دهیم

$$|\psi'>=\alpha(t)e^{-i\omega_a t}|a>+\beta(t)e^{-i\omega_b t}|b> \tag{34}$$

رابطه ی بالا را در معادله یِ (31) قرار می‌دهیم، معادلات ِ حرکت برا یِ α و β به شکل ِ زیر َند

$$\begin{cases} \frac{\partial\alpha}{\partial t}=-[\frac{1}{2}\hat{\Gamma}'_{aa}(t)+\frac{i}{\hbar}\frac{e^2}{2m}A^2]\alpha-[\frac{1}{2}\hat{\Gamma}'_{ab}(t)-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{m}\widetilde{p}_{ab}\cdot\widetilde{A}(t)]e^{i\omega t}\beta \\ \frac{\partial\beta}{\partial t}=-[\frac{1}{2}\hat{\Gamma}'_{bb}(t)+\frac{i}{\hbar}\frac{e^2}{2m}A^2]\beta-[\frac{1}{2}\hat{\Gamma}'_{ba}(t)-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{m}\widetilde{p}_{ba}\cdot\widetilde{A}(t)]e^{-i\omega t}\alpha \end{cases} \tag{35}$$

لازم است متذکر شویم که معادله‌های بالا فقط برای اتم دو ترازی صادق است. برای یک اتم n ترازی این معادلات با یک دسته از جفت معادلات ِ n تایی که در آن تابع موج ِ $|\psi'>$ باید برحسب ِ یک دسته یِ کامل از تابع های موج $|n>$ (ویژه توابع ِ $\hat{\mathcal{H}}_0$) بسط داده شود، سپس در معادله یِ (31) جای‌گزین شوند.

5 دامنه‌های ِ احتمال

مسئله یِ جالب ِ فیزیکی پیدا کردن ِ احتمال‌هایِ P_a و P_b است که احتمال ِ پیدا کردن ِ اتم در دو ویژه حالت ِ انرژی یِ $|a>$ و $|b>$ است. برا یِ هامیلتونی یِ $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ احتمال‌ها به صورت ِ زیر است

$$P_n=|<n|\psi>|^2 \qquad\qquad n=a,b \tag{36}$$

برا یِ هامیلتونی یِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ نباید از $|a>$ و $|b>$ استفاده شود بل‌که تابع ِ موج باید تحت ِ تبدیل ِ T قرار گیرد

$$\begin{aligned} &|n'>=T|n> \qquad\qquad n=a,b \\ &P'_n=|<n'|\psi'>|^2=|<n|T^\dagger|\psi'>|^2 \end{aligned} \tag{37}$$

برایِ هامیلتونیِ $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ احتمال‌ها با توان ِ دوم اندازه دامنه‌های بسط برابرند

$$\begin{cases} P_a = |a(t)|^2 \\ P_b = |b(t)|^2 \end{cases} \tag{38}$$

برا یِ هامیلتونی یِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ احتمال‌ها به‌صورت ـ زیر است

$$\begin{cases} P'_a = \left|\alpha(t)\,T^{\dagger}_{aa}\,e^{-i\omega_a t} + \beta(t)\,T^{\dagger}_{ab}\,e^{-i\omega_b t}\right|^2 \\ \\ P'_b = \left|\alpha(t)\,T^{\dagger}_{ba}\,e^{-i\omega_a t} + \beta(t)\,T^{\dagger}_{bb}\,e^{-i\omega_b t}\right|^2 \end{cases} \tag{39}$$

از آن‌جایی‌که P'_a و P'_b کمیت‌هایِ فیزیکی هستند شرایط ـ اولیه سیستم از رویِ آن‌ها تعیین می شود که در حالت ـ کلی با شرایط ـ اولیه بته [a] تفاوت دارد. برای مشخص شدن ـ بحث های ذکر شده یک مثال را بررسی می‌کنیم.

★ **مثال:** برای استفاده از معادلات ـ بته [a] ابتدا یک اتم دو ترازی را در یک میدان ـ الکتریکی یِ ایستا و یک‌نواخت در نظر می‌گیریم:

$$\widetilde{E}(\widetilde{r};t) = \widetilde{E}_0 \tag{40}$$

انتقال هایِ صورت گرفته در حضور ـ میدان از حالت ـ $|b> \longrightarrow |a>$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین فرض می‌کنیم میدان آن‌قدر ضعیف باشد که از تئوری یِ اختلال ـ مرتبه اول استفاده کنیم در این حالت معادلات ـ بته [a] برا یِ اتم ی که در ابتدا در حالت ـ $|a>$ بوده، دامنه های احتمال زیر را برا یِ حالت ـ $|b>$ نتیجه می‌دهد:

$$P_b(t) = \left| -\frac{e}{\hbar}\,\widetilde{E}_0\cdot\widetilde{r}_{ab}\,\frac{e^{-(\frac{\gamma_a}{2}+i\omega_a)t} - e^{-(\frac{\gamma_b}{2}+i\omega_b)t}}{\omega - i\delta}\right|^2 \tag{41}$$

پتانسیل ـ برداری برا یِ میدان ـ (40) به‌صورت ـ $\widetilde{A}(t) = -t\widetilde{E}_0$ است. با استفاده از برهم‌کنش ـ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ (و در نظر گرفتن ـ پتانسیل ـ بالا)، در تقریب ـ مرتبه یِ اول (در معادلات ـ بته [a]) خواهیم داشت

$$P'_b(t) = \left| -\frac{e}{\hbar}\,\widetilde{E}_0\cdot\widetilde{r}_{ab}\,\frac{\omega}{\omega - i\delta}\,\frac{(1+(i\omega+\delta)t)e^{-(\frac{\gamma_a}{2}+i\omega_a)t} - e^{-(\frac{\gamma_b}{2}+i\omega_b)t}}{\omega - i\delta}\right|^2 \tag{42}$$

جواب هایِ این دو باهم متفاوت است. برا یِ رفع ـ این اختلاف باید شرایط ـ اولیه یِ مناسب را در نظر بگیریم. برا یِ محاسبه یِ دامنه ی احتمال ، رابطه یِ (35)، از عمل‌گر ـ تبدیل ـ زیر می‌توانیم استفاده کنیم

$$\hat{T}(\widetilde{r};t) = 1 + \frac{i}{\hbar} e \widetilde{A}(t) \cdot \widetilde{r} \tag{43}$$

در این مثال ـِ خاص ـِ $T(\widetilde{r};0) = 1$ در نتیجه شرایط ـِ اولیه برا یِ (35) به‌صورت ـِ زیر است

$$\begin{cases} \alpha(0) = P'_a(0) = 1 \\ \beta(0) = P'_b(0) = 0 \end{cases} \tag{44}$$

المان هایِ ماتریس ـِ عمل‌گر ـِ نابودی یِ $\hat{\Gamma}'$ به شکل ـِ زیر است

$$\Gamma'_{aa} = \gamma_a, \qquad \Gamma'_{bb} = \gamma_b, \qquad \Gamma'_{ab} = {\Gamma'_{ab}}^{\star} = i \frac{2\,t}{\hbar} e\, \delta\, \widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab} \tag{45}$$

به کمک ـِ رابطه یِ $\widetilde{p} = \frac{i}{\hbar} m \, [\mathcal{H}_0, \widetilde{r}]$ جواب ـِ مرتبه اول ـِ (35) مشخص می‌شود

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= e^{-(\frac{\gamma_a}{2})t} \\ \beta(t) &= -\frac{e}{\hbar} \widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab} \frac{(1 + (i\omega + \delta)t) e^{-(\frac{\gamma_a}{2} + i\omega)t} - e^{-(\frac{\gamma_b}{2})t}}{\omega - i\delta} \end{aligned} \tag{46}$$

بااستفاده از رابطه یِ بالا دامنه یِ احتمال ـِ $P'_b(t)$ برابر است با

$$P'_b(t) = \left| -\frac{e}{\hbar} \widetilde{E}_0 \cdot \widetilde{r}_{ab} \frac{e^{-(\frac{\gamma_a}{2} + i\omega_a)t} - e^{-(\frac{\gamma_b}{2} + i\omega_b)t}}{\omega - i\delta} \right|^2 \tag{47}$$

که با نتیجه‌ای که از $\widetilde{E} \cdot \widetilde{r}$ گرفتیم، رابطه یِ (41)، برابر است. ■

6 نتیجه

در بخش هایِ گذشته مسئله‌ای را که منجر به استخراج ـِ معادلات ـِ بته [a] شد یادآوری کردیم. از معادلات ـِ بته [a] برا یِ محاسبه یِ دامنه یِ احتمال در دو حالت ـِ $\widetilde{E} \cdot \widetilde{r}$ و $\widetilde{A} \cdot \widetilde{p}$ استفاده کردیم که نتایج این دو باهم متفاوت بودند. ولی این دو هامیلتونی در اصل از یک هامیلتونی با دو پیمانه یِ متفاوت به دست آمده بودند بنابراین بایستی جواب هایِ آن‌ها باهم یک‌سان باشد. اکثراً در تبدیل ـِ یک شکل از برهم‌کنش به شکل ـِ دیگر دو نکته را نادیده می‌گیریم که نتیجه یِ فوق را به‌هم‌راه خواهد داشت

i) در تبدیل ـِ هامیلتونی از $\widetilde{E} \cdot \widetilde{r}$ به $\widetilde{A} \cdot \widetilde{p}$ تابع ـِ موج بایستی تبدیل شود. تبدیل ـِ تابع ـِ موج منجر به تعریف ـِ شرایط ـِ اولیه برا یِ دامنه هایِ بسط ـِ α و β در (41) خواهد شد.

ii) عمل‌گر ِ نابودی هم باید تحت ِ تغییر پیمانه ها تبدیل شود. این تِنسور در صورت ِ استفاده از برهم‌کنش ِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ عناصر ِ غیر ِ قطری دارد. برا یِ برهم‌کنش ِ $\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ معادلات ِ حرکت به وسیله یِ رابطه یِ (41) داده شده است.

استفاده از برهم‌کنش ِ $\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$ این برتری را دارد که عمل‌گر ِ انرژی در این پیمانه با $\hat{\mathcal{H}}$ برابر است و چون پتانسیل برداری در آن ظاهر نمی‌شود در نتیجه دامنه های بسط ِ a و b در معادله یِ (29) با دامنه هایِ احتمال مطابقت می‌کنند و محاسبات بسیار ساده‌تر خواهد شد.

7 پیوست

مقایسه یِ جمله هایِ هامیلتونی در تصحیح ِ مرتبه یِ اول و دوم برای هامیلتونی هایِ اختلالی یِ $\frac{e}{m}\widetilde{p}\cdot\widetilde{A}$ و $-e\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}$

یک میدان ِ قطبیده یِ خطی و برهم‌کنش ِ آن با یک اتم در $\widetilde{r}_0=\widetilde{0}$ را در نظر می‌گیریم. میدان ِ الکتریکی به‌صورت ِ زیر خواهد بود

$$E(0,t)=\mathcal{E}\cos\nu t. \tag{48}$$

در نتیجه پتانسیل ِ برداری برابر است با $A(0,t)-\frac{1}{\nu}\mathcal{E}\sin\nu t$.

اگر مطابق با هامیلتونی یِ (15) و (19) مقادیر ِ (مستقل از زمان ِ) A و E را جای‌گزین کنیم (البته با حذف جمله‌یِ A^2) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1=-e\widetilde{r}\cdot\widetilde{E}, \\ \mathcal{H}_2=\frac{e}{m\nu}\widetilde{p}\cdot\widetilde{E} \end{cases} \tag{49}$$

نسبت ِ جمله‌های یِ اختلالی یِ فوق (در تصحیح ِ مرتبه‌یِ اول) به صورت ِ زیر خواهد بود

$$\left|\frac{<f|\mathcal{H}_1|i>}{<f|\mathcal{H}_2|i>}\right|=\frac{\omega}{\nu}. \tag{50}$$

با کمی محاسبات به ساده‌گی می‌توان نسبت ِ جمله‌های یِ اختلالی (در تصحیح ِ مرتبه‌یِ دوم) را نوشت

$$\left|\frac{<f|\mathcal{H}_1|i>}{<f|\mathcal{H}_2|i>}\right|^2=\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2. \tag{51}$$

8 مرجع‌ها

[1] R. Shankar; “Principle of Quantum Mechanics”, 2rd edition (Plenum Press, 1994) chapter 5.

[2] M.O. Scully, M.S. Zubairy; “Quantum Optics”, (Cambridge University Press, 1997) Chapter 5.

[3] W.E. Lamb et all “Matter-Field Intraction in atomic physics and quantum optics” Phys. Rev. A Vol 36, pp 2763 (1987).

[4] ابراهیمِ کریمی، « مطالعه‌یِ سرمایشِ لیزری و به تله انداختنِ اتم‌های خنثی» پایان نامه‌یِ کارشناس ارشد — مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه‌یِ زنجان، ۱۳۸۲ فصل ۲ُ م

9 اسم‌ها یِ خاص

[a] Bethe

[b] Schrödinger