معادله‌هایِ بنیادی‌یِ مکانیکِ کوانتمی[1]

پ. ا. ام. دیراک [a]

دانش‌جویِ ارشدِ پژوهشی‌یِ نمایش‌گاهِ 1851، کالِجِ سَنت جان، کمبریج [b]

§۱. مقدمه

همه می‌دانند که واقعیت‌هایِ آزمایشی‌یِ فیزیکِ اتمی ناگزیرمان می‌کند برایِ توصیفِ پدیده‌هایِ اتمی از نظریه‌هایِ الکترودینامیکِ کلاسیک دور شویم. در نظریه‌یِ بور [c]، این دور شدن به شکلِ فرض‌هایِ خاصی است؛ یکی وجودِ حالت‌هایِ پایایِ اتم که در آن حالت‌ها اتم تشعشع نمی‌کند، و دیگری قاعده‌هایِ خاصی، به نامِ شرایطِ کوانتمی، که حالت‌هایِ کوانتمی و بسامدهایِ تابشِ گسیل شده در گذارِ بینِ آن‌ها را تثبیت می‌کند. این فرض‌ها با نظریه‌یِ کلاسیک کاملاً بیگانه‌اند، اما در توصیفِ بخشِ محدودی از پدیده‌هایِ اتمی خیلی موفق‌اند. تنها جایی که از نظریه‌یِ کلاسیکی استفاده شده در این فرض است که قوانینِ کلاسیک برایِ توصیفِ حرکت در حالت‌هایِ پایا معتبر اند، اگر چه برایِ توصیفِ گذار کاملاً در می‌مانند، به علاوه‌یِ فرضی که اصلِ تناظر نامیده می‌شود ــ این که نظریه کلاسیکی در حدّی که کنش در هر چرخه بسیار بزرگ‌تر از ثابتِ پلانک (h) است نتایجِ درست می‌دهد ــ به علاوه‌یِ حالت‌هایِ خاصِ دیگری.

اخیراً هایزنبرگ [d] در مقاله‌ای [1] [2] نظریه‌ای جدید ارائه می‌دهد، نظریه‌ای که می‌گوید این معادله‌هایِ مکانیکِ کلاسیک نیستند که اشتباه اند، بل‌که عملیاتِ ریاضی‌ای که به وسیله‌یِ آن‌ها نتایجِ فیزیکی به دست می آیند باید اصلاح شوند. به این ترتیب در نظریه‌ی جدید از تمامِ اطلاعاتی که نظریه‌یِ کلاسیکی تامین می‌کند می‌توان استفاده کرد.

§۲. جبرِ کوانتمی

[1] این مقاله ترجمه‌ای است از
P. A. M. Dirac, "The Fundamental Equations of Quantum Mechanics", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 109, no. 752 (Dec 1, 1925), pp. 642 - 653
در حروف چینی‌یِ مقاله سعی شده نمادگذاری‌یِ نویسنده تاحدِّ امکان حفظ شود؛ در متنِ اصلی ارجاع‌ها به شکلِ پانوشت بوده‌اند، اما در ترجمه در پایانِ مقاله آمده‌اند. ترجمه‌یِ امیر آقامحمّدی

[2] ترجمه‌یِ این مقاله در گاما، شماره‌یِ ۲، بهارِ ۸۳، صفحه‌یِ ۲۵ چاپ شده. در ضمن در همان شماره محمد خرمی در صفحه‌یِ ۴۱ مقاله‌ای دارد تحتِ عنوانِ "تولدِ کوانتم‌مکانیک جدید به زبانِ امروزی" برایِ توصیفِ مقاله‌یِ هایزنبرگ به زبان امروزی.

یک سیستم دینامیکی‌یِ چندگانه‌دوره‌ای‌یِ ناتبه‌گنِ با u درجه‌یِ آزادی را در نظر بگیرید که با معادله‌هایی تعریف می‌شود که مختصات و مشتق‌هایِ زمانی‌یِ آن‌ها را به هم مربوط می‌کنند. در نظریه‌یِ کلاسیک می‌توانیم مسئله را به شکلِ زیر حل کنیم. فرض کنید هر مختصه‌یِ x را بتوان به شکل سری‌یِ فوریه‌ای چندگانه در زمانِ t بسط داد، به این شکل

$$x = \sum\nolimits_{\alpha_1\cdots\alpha_u} x(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_u)\exp.i(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\cdots+\alpha_u\omega_u)t$$
$$= \sum\nolimits_{\alpha} x_\alpha \exp.i(\alpha\omega)t,$$

که رابطه‌یِ آخر شکلِ خلاصه است. این‌ها را در معادله‌هایِ حرکت جاگذاری کنیم، و ضرایبِ هر جمله‌یِ هم‌آهنگ در دو طرف را برابر بگذاریم. معادله‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند (که آن‌ها را معادله‌هایِ $\mathbf{A}$ خواهیم نامید) دامنه‌هایِ x_α و بسامدهایِ $(\alpha\omega)$ را تعیین می‌کنند (بسامدهایی که بر حسبِ رادیان بر زمان اندازه‌گیری می‌شوند). جواب یک‌تا نیست. بی‌نهایت جوابِ u گانه هست که می‌توان آن‌ها را با دادنِ دامنه‌ها و بسامدها به عنوان توابعی از u ثابتِ $\kappa_1\cdots\kappa_u$ دسته‌بندی کرد. حالا هر x_α و $(\alpha\omega)$ ای تابعی از دو دسته عدد است، α ها و κ ها، و می‌توان آن‌ها را به شکلِ $x_{\alpha\kappa}$ و $(\alpha\omega)_\kappa$ نوشت.

مطابقِ روشِ هایزنبرگ، در حلِّ کوانتمی‌یِ مسئله هنوز فرض می‌کنیم که هر مختصه را می‌توان با مؤلفه‌هایِ هم‌آهنگی به شکلِ $\exp.i\omega t$ نمایش داد که دامنه و بسامدِ هر کدام به دو دسته عددِ صحیحِ $n_1\cdots n_u$ و $m_1\cdots m_u$ بستگی دارند و می‌توان آن‌ها را به شکلِ $x(nm)$، و $\omega(nm)$ نوشت. تفاضل‌هایِ $n_r - m_r$ متناظرند با α_r هایِ قبلی، اما نه هیچ‌کدام از n ها و نه هیچ تابعی از n ها و m ها نقشِ κ هایِ قبلی را که نشان می‌دادند هر مؤلفه‌یِ هم‌آهنگ مالِ کدام جواب است را ندارد. مثلاً نمی‌توانیم همه‌یِ مؤلفه‌هایی را که برایِ آن‌ها n ها یک دسته مقدارِ معین می‌گیرند را گرد بیاوریم و بگوییم این دسته به تنهایی یک جواب کاملِ برایِ معادله‌هایِ حرکت است. جواب‌هایِ کوانتمی همه به‌هم‌بافته‌اند، و باید آن‌ها را یک کلِ واحد در نظر گرفت. اثرِ ریاضی‌یِ این [درهم تنیده بودنِ جواب‌هایِ کوانتمی] این است که با آن که در حالتِ کلاسیک هر یک از معادله‌هایِ $\mathbf{A}$ رابطه‌ای است بینِ دامنه‌ها و بسامدهایِ یک دسته‌یِ خاص از κ ها، دامنه‌ها و بسامدهایی که در معادله‌یِ کوانتمی‌یِ $\mathbf{A}$ ظاهر می‌شوند یک دسته مقدارِ خاص برایِ n ها، یا هر تابعی از n ها و m ها، نیستند؛ بل‌که n ها و m هایِ آن‌ها به شکلِ خاصی که بعداً خواهیم دید به هم مربوط اند.

در نظریه‌یِ کلاسیک رابطه‌یِ واضحِ زیر را داریم

$$(\alpha\omega)_\kappa + (\beta\omega)_\kappa = (\alpha+\beta,\omega)_\kappa.$$

به پی‌روی از هایزنبرگ، فرض می‌کنیم رابطه‌ی متناظر در نظریه‌یِ کوانتمی

$$\omega(n, n-\alpha) + \omega(n-\alpha, n-\alpha-\beta) = \omega(n, n-\alpha-\beta)$$

یا

$$\omega(nm) + \omega(mk) = \omega(nk) \tag{1}$$

باشد. این یعنی آن که $\omega(nm)$ به شکلِ $\Omega(n) - \Omega(m)$ است، که Ω ها ترازِ بسامدها هستند. در نظریه‌یِ بور[c] این‌ها $2\pi/h$ برابرِ انرژی‌یِ ترازها هستند، اما ما لازم نیست این را فرض بکنیم.

در نظریه‌یِ کلاسیک می‌توانیم دو مؤلفه‌یِ هم‌آهنگِ وابسته به یک دسته از κ ها را به صورتِ زیر در هم ضرب کنیم:—

$$a_{\alpha\kappa} \exp .i(\alpha\omega)_\kappa t \ . \ b_{\beta\kappa} \exp .i(\beta\omega)_\kappa t = (ab)_{\alpha+\beta.\kappa} \exp .i(\alpha+\beta, \omega)_\kappa t$$

که

$$(ab)_{\alpha+\beta.\kappa} = a_{\alpha\kappa} b_{\beta\kappa}.$$

به طریقی مشابه، در نظریه‌یِ کوانتمی می‌توانیم یک مؤلفه‌یِ (nm) و یک مؤلفه‌یِ $(m\kappa)$ را ضرب کنیم

$$a(nm) \exp .i\omega(nm)t \ . \ b(m\kappa) \exp .i\omega(m\kappa)t = ab\,(n\kappa) \exp .i\omega(n\kappa)t$$

که

$$ab(n\kappa) = a(nm) \ b(m\kappa).$$

به این ترتیب سوق داده می‌شویم به این که حاصلِ‌ضربِ دامنه‌هایِ مؤلفه‌یِ (nm) در مؤلفه‌یِ (mk) را به صورتِ دامنه‌یِ (nk) در نظر بگیریم. این، به هم‌راهِ قاعده‌ای که می‌گوید در یک معادله‌یِ [کوانتمی‌یِ] $\mathbf{A}$ تنها دامنه‌هایی که به یک دسته از اعداد مربوط اند می‌توانند با هم جمع شوند، جای‌گزینِ قاعده‌یِ کلاسیکی می‌شود که می‌گوید κ یِ تمام دامنه‌هایی که در یک معادله‌یِ $\mathbf{A}$ ظاهر می‌شوند یکی است.

حالا در موقعیتی هستیم که عملیاتِ جبری‌یِ عادی را رویِ متغیرهایِ کوانتمی انجام دهیم. جمعِ x و y با معادله‌هایِ

$$\{x+y\}(nm) = x(nm) + y(nm)$$

داده می‌شود، و ضرب آن‌ها با

$$xy(nm) = \sum\nolimits_k x(nk) \ y(km) \tag{2}$$

که مشابه، ضربِ کلاسیکی‌یِ

$$(x\,y)_{\alpha\kappa} = \sum\nolimits_r x_{rk}\, y_{\alpha-r,\kappa}\,.$$

است. حالا یک تفاوتِ مهم بینِ دو جبر رخ می‌دهد. در حالتِ کلّی

$$x\,y\;(nm) \neq y\,x\;(nm)$$

و ضربِ کوانتمی جابه‌جایی نیست، هر چند به سادگی می‌توان نشان داد که شرکت‌پذیر و توزیع‌پذیر هست. کمیتی با مؤلفه‌هایِ $xy\;(nm)$ که در (2) تعریف شد را ضربِ‌هایزنبرگی‌یِ x و y می‌نامیم و به صورتِ ساده‌یِ xy می‌نویسیم. هر وقت دو کمیتِ کوانتمی در هم ضرب شوند، منظور ضربِ هایزنبرگی است. البته در موردِ بسامدها و دیگر کمیت‌هایِ وابسته به n ها که صراحتاً بیان خواهد شد، ضربِ عادّی منظور خواهد بود.

معکوسِ یک کمیتِ کوانتمی را می‌توان با هر یک از رابطه‌هایِ زیر تعریف کرد.

$$1/x \cdot x = 1 \quad \text{or} \quad x \cdot 1/x = 1. \tag{3}$$

این دو معادله هم‌ارز اند، زیرا اگر هر دو طرفِ اولی را از چپ در x ضرب و از راست بر x تقسیم کنیم دومی به دست می‌آید. به همین صورت جذرِ x را هم می‌شود تعریف کرد

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x. \tag{4}$$

واضح نیست که همیشه (3) و (4) حل دارند. به‌خصوص، ممکن است برایِ توصیفِ $\sqrt{x}$ لازم باشد زیرهم‌آهنگ‌هایی وارد کنیم، یعنی ترازهای بسامدی‌یِ میانی ای. این مشکلات را می‌توان با گویا کردن و ضرب کردنِ هر یک از معادله‌ها، پیش از تعبیرِ کوانتمی و به دست آوردنِ معادله‌هایِ $\mathbf{A}$، برطرف کرد.

اکنون می‌توانیم هر یک از معادله‌هایِ حرکتِ سیستم را به شکلِ کوانتمی در آوریم، به شرطِ آن که بتوانیم تصمیم بگیریم که ترتیبِ کمیت‌ها در ضرب‌ها چه باشد. هر معادله ای را می‌توان به نظریه‌یِ کوانتمی بُرد، مشروط بر آن که بتوان آن را با عملیاتِ جبری‌ای که شاملِ جابه‌جایی‌یِ فاکتورهایِ ضرب نیست، یا انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری نسبت به t از معادله‌هایِ حرکت به دست آورد. به‌خصوص، به این ترتیب می‌توان از پسِ معادله‌یِ انرژی بر آمد.

معادله‌هایِ حرکت برایِ حلّ ِ مسئله‌یِ کوانتمی کافی نیستند. در نظریه‌یِ کلاسیک معادله‌هایِ حرکت $x_{\alpha\kappa}$، $(\alpha\omega)_\kappa$ را به عنوانِ تابعی از κ تعیین نمی‌کنند، مگر آن که برایِ تعریفِ κ ها چیزی در موردِ آن‌ها فرض کنیم. اگر بخواهیم می‌توانیم با انتخابِ κ ها طوری که $\partial \mathrm{E}/\partial\kappa_r = \omega_r/2\pi$ باشد حل را کامل کنیم. در این جا E انرژی‌یِ سیستم است که باعث می‌شود κ_r برابر با متغیرِ کنش J_r باشد. در نظریه‌یِ کوانتمی باید معادله‌هایِ متناظری باشند، و این‌ها می‌شوند شرط‌هایِ کوانتمی.

§۳. مشتق‌گیری‌یِ کوانتمی

تا این جا تنها مشتق‌گیری‌ای که در نظریه‌یِ کوانتمی در نظر گرفتیم نسبت به زمان t بود. حالا شکلِ کلی‌ترین عملِ کوانتمی d/dv را تعیین می‌کنیم که قوانینِ زیر را برآورده کند.

$$\frac{d}{dv}(x+y) = \frac{d}{dv}x + \frac{d}{dv}y, \qquad \text{I}$$

$$\frac{d}{dv}(xy) = \frac{d}{dv}x \cdot y + x \cdot \frac{d}{dv}y. \qquad \text{II}$$

(دقت کنید که ترتیبِ x و y در معادله‌یِ آخر حفظ شده است.)

اولین قانون مستلزمِ این است که دامنه‌هایِ مؤلفه‌هایِ dx/dv تابع‌هایی خطی از دامنه‌هایِ مؤلفه‌هایِ x باشند، یعنی

$$dx/dv(nm) = \sum\nolimits_{n\,m} a(nm;\, n'm')\, x(n'm'). \qquad (5)$$

برایِ هر دسته مقدارِ صحیحِ n، m، n'، و m' یک ضریبِ $a(nm;\, n'm')$ هست. قانونِ دوم شرط‌هایی رویِ a ها اعمال می‌کند. مقادیرِ ضرایبِ دیفرانسیلی در II را مطابقِ رابطه‌یِ (5) جاگذاری کنید و مؤلفه‌هایِ (nm)ِ دو طرف را مساوی قرار دهید. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{n'm'k} a(nm;\ n'm')\, x(n'k)\, y(km') \quad &= \quad \sum\nolimits_{kn'k'} a(nk;\ n'k')\, x(n'k')\, y(km) \\ &\quad + \sum\nolimits_{kk'm} x(nk)\, a(km;\ k'm')\, y(k'm').\end{aligned}$$

این باید برایِ همه‌یِ مقادیرِ x و y درست باشد، پس می‌توانیم ضرایبِ $x(n'k)\, y(k'm')$ در دو طرف را مساوی قرار دهیم. با استفاده از نمادِ δ_{mn} که برایِ $m = n$ مقدارش یک است (یعنی برایِ هر $m_r = n_r$) و برایِ $m \neq n$ صفر است، به دست می‌آوریم

$$\delta_{kk'}\, a(nm\,;\, n'm') = \delta_{mm'}\, a(nk'\,;\, n'k) + \delta_{nn'}\, a(km\,;\, k'm').$$

برایِ آن که جلوتر برویم باید حالت‌هایِ مختلفِ مساوی و نامساوی‌یِ بودنِ kk'، mm' و nn' را به طورِ مجزا بررسی کنیم.

اول حالتِ $k = k'$، $m \neq m'$ ، $n \neq n'$ را در نظر می‌گیریم. این می‌دهد

$$a(nm\,;\, n'm') = 0.$$

پس همه‌یِ $a(nm;\ n'm')$ ها صفر اند به جز آن‌هایی که یا $n = n'$ و یا $m = m'$ (یا هر دو). حالت‌هایِ $k \neq k'$، $m = m'$، $n \neq n'$ و $k \neq k'$، $m \neq m'$، $n = n'$ چیز جدیدی نمی‌دهند. حالا حالتِ $k = k'$، $m = m'$، $n \neq n'$ را در نظر بگیریم، که می‌دهد:

$$a(nm\,;\,n'm) = a(nk\,;\,n'k).$$

پس اگر $n \neq n'$ باشد، $a(nm;\,n'm)$ مستقل از m است. مشابهاً، موردِ $k = k'$، $m \neq m'$، $n \neq n'$ هم می‌گوید $a(nm\,;nm')$ مستقل از n است، مشروط بر آن که $m \neq m'$ باشد. حالتِ $k \neq k'$ ، $m = m'$، $n = n'$ می‌دهد

$$a(nk';\,nk) + a(km;\,k'm) = 0.$$

اگر $k \neq k'$ باشد، می‌توان این نتیجه‌ها را با گذاشتنِ

$$a(nk'\,;\,nk) = a(kk') = -a(km\,;\,k'm), \tag{6}$$

خلاصه کرد. نمادِ دو—شاخصه‌یِ $a(kk')$ فقط بستگی به عددهایِ صحیحِ k و k' دارد. تنها حالتِ باقی‌مانده $k = k'$، $m = m'$، $n = n'$ است، که می‌دهد

$$a(nm\,;\,nm) = a(nk\,;\,nk) + a(km\,;\,km).$$

این یعنی می‌توانیم بگذاریم

$$a(nm\,;\,nm) = a(mm) - a(nn). \tag{7}$$

معادله‌یِ (7) با تعریفِ $a(kk')$ وقتی $k = k'$ است معادله‌یِ (6) را کامل می‌کند.

حالا معادله‌یِ (5) تقلیل پیدا می‌کند به

$$\begin{aligned} dx/dv(nm) &= \sum\nolimits_{m' \neq m} a(nm\,;\,nm')\,x(nm') + \sum\nolimits_{n' \neq n} a(nm;\,n'm)\,x(n'm) \\ &\qquad\qquad + a(nm\,;\,nm)\,x(nm) \\ &= \sum\nolimits_{m' \neq m} a(m'm)\,x(nm') - \sum\nolimits_{n' \neq n} a(nn')\,x(n'm) \\ &\qquad\qquad + \{a(mm) - a(nn)\}\,x(nm) \\ &= \sum\nolimits_{k} \{x(nk)\,a(km) - a(nk)\,x(km)\} \end{aligned}$$

پس

$$dx/dv = xa - ax. \tag{8}$$

به این ترتیب کلی‌ترین عملی که می‌توان بر یک متغیّرِ کوانتمی اعمال کرد و قوانینِ I و II را برآورده کند، تفاضلِ ضرب‌هایِ هایزنبرگی‌یِ آن متغیّر با متغیرهایِ کوانتمی‌یِ دیگر است. به آسانی می‌توان دید که نمی‌توان ترتیبِ مشتق‌گیری را عوض کرد، مثلاً

$$\frac{d^2x}{du\ dv} \neq \frac{d^2x}{dv\ du}.$$

به عنوانِ مثالی در مشتق‌گیری‌یِ کوانتمی، می‌توانیم حالتی را در نظر بگیریم که (a) ثابت است، بنا بر این، جز برایِ $n = m$، $a(nm) = 0$ است. می‌بینیم

$$dx/dv(nm) = x(nm)\, a(mm) - a(nn)\, x(nm).$$

به خصوص، اگر $ia(nm) = \mathbf{\Omega}(m)$ باشد ــ ترازِ بسامدی که پیش‌تر تعریف شد ــ داریم

$$dx/dv(nm) = i\omega\ (nm)\, x(nm),$$

و مشتق‌گیری‌یِ ما نسبت به v همان مشتق‌گیری‌یِ عادی نسبت به t می‌شود.

§۴. شرط‌هایِ کوانتمی

حالا به این خواهیم پرداخت که عبارتِ $(xy - yx)$ متناظر با چه‌چیزی در نظریه‌یِ کلاسیک است. برایِ این کار فرض کنیم $x(n, n-\alpha)$ با تغییرِ n به‌کندی تغییر کند، n ها عددهایی خیلی بزرگ باشند، و α ها کوچک باشند، طوری که بتوانیم بگذاریم

$$x(n, n-\alpha) = x_{\alpha\kappa}$$

که در این جا κ_r برابر است با $n_r\, h$ یا $(n_r + \alpha_r)h$، این‌ها عملاً معادل اَند. حالا داریم

$$\begin{aligned} x(n, n-\alpha)\, y(n-\alpha, n-\alpha-\beta) - y(n, n-\beta)\, x(n-\beta, n-\alpha-\beta) \\ = \{x(n, n-\alpha) - x(n-\beta, n-\beta-\alpha)\}\, y(n-\beta, n-\alpha-\beta)) \\ -\{y(n, n-\beta) - y(n-\alpha, n-\alpha-\beta)\}\, x(n-\beta, n-\alpha-\beta)) \\ = h\sum\nolimits_r \left\{\beta_r \frac{\partial x_{\alpha\kappa}}{\partial \kappa_r}\, y_{\beta\kappa} - \alpha_r \frac{\partial y_{\beta\kappa}}{\partial \kappa_r} x_{\alpha\kappa}\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

حالا

$$2\pi i\beta_r y_\beta \exp \cdot i(\beta\omega)t = \frac{\partial}{\partial w_r}\{y_\beta \exp \cdot i(\beta\omega)t\}$$

که w_r متغیرِ زاویه و برابرِ با $\omega_r t/2\pi$ است. از این رو مولفه‌یِ (nm) اُمِ $(xy - yx)$ در نظریه‌یِ کلاسیک متناظر است با

$$\frac{ih}{2\pi}\sum\nolimits_{\alpha+\beta=n-m}\sum\nolimits_r \left\{ \frac{\partial}{\partial\kappa_r}\{x_\alpha \exp\cdot i(\alpha\omega)t\}\frac{\partial}{\partial w_r}\{y_\beta \exp\cdot i(\beta\omega)t\} \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial\kappa_r}\{y_\beta \exp\cdot i(\beta\omega)t\}\frac{\partial}{\partial w_r}\{x_\alpha \exp\cdot i(\alpha\omega)t\} \right\}$$

یا این‌که خودِ $(xy-yx)$ متناظر است با

$$-\frac{ih}{2\pi}\sum\nolimits_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial\kappa_r}\frac{\partial y}{\partial w_r} - \frac{\partial y}{\partial\kappa_r}\frac{\partial x}{\partial w_r} \right\}.$$

اگر κ_r را مساوی‌یِ متغیرِ کنش J_r بگیریم، این $ih/2\pi$ برابرِ عبارتِ کروشه‌پواسُن (یا ژاکوبی) می‌شود.

$$[x,y] = \sum\nolimits_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial w_r}\frac{\partial y}{\partial \mathrm{J}_r} - \frac{\partial y}{\partial w_r}\frac{\partial x}{\partial \mathrm{J}_r} \right\} = \sum\nolimits_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_r}\frac{\partial y}{\partial p_r} - \frac{\partial y}{\partial q_r}\frac{\partial x}{\partial p_r} \right\}$$

که p ها و q ها هر دسته‌ای از متغیرهایِ کانونیکِ سیستم اند.

برایِ ترکیب‌هایِ مختلفِ p ها q ها، عبارت‌هایِ کروشه‌یِ پواسنِ بنیادی این‌ها هستند:

$$\left.\begin{aligned} &[q_r,q_s]=0, \quad [p_r,p_s]=0, \\ &[q_r,p_s]=\delta_{rs} \quad =0 \qquad (r\neq s) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad =1. \qquad (r=s) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

عبارت‌هایِ عامِ کروشه‌پواسن قوانینِ I و II را برآورده می‌کنند، که می‌شوند

$$[x,z]+[y,z]=[x+y,z], \qquad \mathrm{I_A}$$

$$[x\,y,z]=[x,z]\,y+x\,[y,z]. \qquad \mathrm{II_A}$$

اگر x و y توابعی جبری از p_r و q_r باشند، با استفاده از این قوانین، هم‌راه با $[x,y]=-[y,x]$ می‌توان $[x,y]$ را بر حسبِ $[q_r,q_s]$، $[p_r,p_s]$ و $[q_r,p_s]$ نوشت و در نتیجه محاسبه کرد، بدونِ این که از قانونِ جابه‌جاییِ ضرب‌ها استفاده کنیم (جز این که تا این‌جا در محاسبه‌یِ اثباتِ $\mathrm{II_A}$ به‌طورِ ضمنی از آن استفاده شده است). به این ترتیب وقتی x و y متغیرهایِ کوانتمی هستند، اگر عبارت‌های کروشه‌یِ بنیادی هنوز با (10) داده شوند، عبارتِ کروشه‌یِ $[x,y]$ در نظریه‌یِ کوانتمی معنی دارد.

ما این فرضِ بنیادی را می‌کنیم که تفاضلِ بینِ ضربِ هایزنبرگی‌یِ دو کمیتِ کوانتمی برابر است با $ih/2\pi$ برابرِ کروشه‌یِ پواسنِ آن‌ها. به طورِ نمادین،

$$xy-yx = ih/2\pi\cdot[x,y]. \tag{11}$$

دیدیم که در حدّ ِ نظریه‌یِ کلاسیک، این معادل است با این که کمیّت‌هایِ دل‌خواهِ κ_r را، که حل‌ها را برچسب می‌زنند، برابرِ J_r بگیریم، و معقول به نظر می‌رسد که (11) را به عنوان شرط‌هایِ عامِ کوانتمی بگیریم.

واضح نیست که همه‌یِ اطلاعاتی که از (11) به دست می‌آید سازگار باشد. از آن جا که کمیت‌هایِ دو طرفِ (11) قوانینِ یک‌سانِ I و II یا $\mathrm{I_A}$ و $\mathrm{II_A}$ را برآورده می‌کنند، تنها شرط‌هایِ مستقلّی که از (11) می‌ماند آن‌هایی است که x و y، p یا q هستند، یعنی

$$\left.\begin{aligned} q_r\, q_s - q_s\, q_r &= 0, \\ p_r\, p_s - p_s\, p_r &= 0 \\ q_r\, p_s - p_s\, q_r &= \delta_{rs}\ ih/2\pi \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

اگر تنها مبنا برایِ باورِ این که روابطِ (12) با هم و با معادلاتِ حرکت سازگار اند سازگاری در حدّ ِ $h \to 0$ بود، حکم خیلی قوی نمی‌بود، زیرا باید بتوان ناسازگاری‌یِ $h = 0$ را نتیجه گرفت، چیزی که در حد $h \to 0$ ناسازگار نیست. اما، از آن جا که عمل‌هایِ کلاسیک تابعِ همان قانون‌هایِ کوانتمی هستند، شاهدِ بسیار قوی‌تری هست ــــ این که اگر با اعمالِ عمل‌هایِ کوانتمی بتوان به ناسازگاری رسید، با اعمالِ عمل‌هایِ کلاسیک به همان طریق باید به ناسازگاری برسیم. اگر دنباله‌ای از عمل‌های کلاسیک به معادله‌یِ $0 = 0$ منجر شود، دنباله‌یِ متناظرِ عمل‌هایِ کوانتمی هم باید به معادله‌یِ $0 = 0$ منجر شود و نه به معادله‌ی $h = 0$، زیرا نمی‌توان با عمل‌هایی کوانتمی رویِ متغیّرهایِ کوانتمی کمیّتی کوانتمی به دست آورد که صفر نباشد، امّا همان عملِ کلاسیک با متغیّرهای کلاسیک به کمیّتی برابر با صفر منجر شود. به این ترتیب، امکانی که بالاتر برشمردیم، این که با عمل‌هایِ کوانتمی به ناسازگاری‌یِ $h = 0$ برسیم، محتمل نیست. تناظرِ بینِ نظریه‌هایِ کلاسیک و کوانتمی بیش‌تر در این است که عمل‌هایِ ریاضی‌یِ دو نظریه در بسیاری موارد تابعِ یک دسته قانون هستند، تا این که در حدِ $h \to 0$ متناظر باشند.

برایِ سیستمی با یک درجه‌یِ آزادی، اگر بگیریم $p = m\,\dot{q}$، تنها شرطِ کوانتمی هست

$$2\pi m\,(q\,\dot{q} - \dot{q}\,q) = ih.$$

اگر بخشِ ثابتِ سمتِ چپ را برابرِ ih بگذاریم خواهیم داشت

$$4\pi m \sum\nolimits_k q(nk)\, q(kn)\, \omega(kn) = h.$$

این معادل است با شرطِ کوانتمی‌یِ هایزنبرگ (معادله‌یِ (16)ِ مرجعِ [1]). با صفر گذاشتنِ بقیه‌یِ مؤلفه‌هایِ سمتِ چپ، روابطِ بیش‌تری به دست می‌آوریم که از نظریه‌یِ هایزنبرگ به دست نمی‌آید.

شرایطِ کوانتمی‌یِ (12)، در خیلی از حالت‌ها، مشکلاتی را حل می‌کنند که مربوط اند به این که کمیت‌ها در معادلاتِ حرکتِ به دست آمده به چه ترتیب در هم ضرب می‌شوند. جز وقتی که p_r و q_r در هم ضرب می‌شوند ترتیب مهم نیست، و این هم هرگز در سیستم‌هایی که تابعِ انرژی‌یِ پتانسیل فقط به q ها بستگی دارد و انرژی‌یِ جنبشی فقط به p ها، رخ نمی‌دهد.

باید خاطرنشان کرد که کمیتِ کلاسیکی‌ای که در نظریه‌یِ کرامرز [e] و هایزنبرگ [2] برای پراکندگی از اتم‌ها ظاهر می‌شود مؤلفه‌هایی دارد که به شکلِ (8) هستند (با $\kappa_r = \mathrm{J}_r$)، و در نظریه‌یِ کوانتمی به نحوی تعبیر می‌شوند که با نظریه‌یِ حاضر سازگار است. هیچ عبارتِ کلاسیکی‌ای را که شاملِ ضرایبِ دیفرانسیلی باشد نمی‌توان به صورتِ نظریه‌یِ کوانتمی تفسیر کرد مگر این که بتوان به این شکل درآورد.

§۵. خواصِ عبارت‌هایِ کروشه‌پواسنِ کوانتمی

در این بخش می‌خواهیم نتایجی را به دست آوریم که مستقل از فرضِ شرط‌هایِ کوانتمی‌یِ (11) یا (12) هستند.

در نظریه‌یِ کلاسیک، عبارت‌هایِ کروشه‌یِ پواسن اتحادِ

$$[x, y, z] \equiv [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \tag{13}$$

را برآورده می‌کنند. در نظریه‌یِ کوانتمی وقتی x و y و z، p یا q هستند این نتیجه به‌وضوح درست است. هم‌چنین از $\mathrm{I_A}$ و $\mathrm{II_A}$ داریم

$$[x_1 + x_2, y, z] = [x_1, y, z] + [x_2, y, z]$$
$$[x_1\, x_2, y, z] = x_1\, [x_2, y, z] + [x_1, y, z]\, x_2.$$

پس، تا وقتی x و y و z به شکلی بر حسبِ حاصلِ‌جمع یا حاصلِ‌ضرب p ها و q ها قابلِ‌بیان هستند، نتیجه باید هنوز در نظریه‌یِ کوانتمی درست باشد، پس باید به‌طورِ کلّی درست باشد. به خاطر داشته باشیم که اتحادِ متناظر با (13) وقتی به جایِ کروشه‌یِ پواسن بگذاریم تفاضلِ ضربِ هایزنبرگی‌یِ $(xy - yx)$، به وضوح درست است، پس هیچ ناسازگاری‌ای با معادله‌یِ (11) نیست.

اگر H تابعِ همیلتونی‌یِ سیستم باشد، معادله‌هایِ حرکتِ کلاسیکی را می‌شود به شکلِ

$$\dot{p}_r = [p_r, \mathrm{H}] \qquad \dot{q}_r = [q_r, \mathrm{H}]$$

نوشت. این معادلات در نظریه‌یِ کوانتمی برایِ سیستم‌هایی که ترتیبِ عامل‌هایِ ضربی‌ای که در معادلاتِ حرکت ظاهر می‌شوند بی‌اهمیت باشد درست است. برایِ سیستم‌هایی که این ترتیب‌ها مهم است، اگر بتوان ترتیبی برای عامل‌هایِ H اختیار کرد می‌توان این معادله‌ها را درست کرد. از قوانینِ $\mathrm{I_A}$ و $\mathrm{II_A}$ در نظریه‌یِ کوانتمی برایِ هر x ی به دست می‌آید

$$\dot{x} = [x, H]. \tag{14}$$

اگر A یک ثابتِ‌حرکتِ نظریه‌یِ کوانتمی باشد

$$[\mathrm{A}, H] = 0.$$

البته متغیرهایِ کنش باید این شرط را برآورده بکنند. اگر A_1 و A_2 دو ثابتِ‌حرکت باشند با کاربردی ساده از (13) نتیجه می‌شود

$$[\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2] = \mathrm{const}.$$

درست مثلِ حالتِ کلاسیک.

در نظریه‌ی کلاسیک، شرطِ آن که یک دسته متغیرِ P_r، Q_r کانونیک باشند این است که

$$[\mathrm{Q}_r, \mathrm{Q}_s] = 0 \qquad [\mathrm{P}_r, \mathrm{P}_s] = 0$$
$$[\mathrm{Q}_r, \mathrm{P}_s] = \delta_{rs}.$$

این معادلات را می‌توان در نظریه‌یِ کوانتمی به عنوانِ شرطِ کانونیک بودنِ متغیرهایِ P_r و Q_r به کار بُرد.

در نظریه‌یِ کلاسیک می‌توانیم دسته متغیرهایِ کانونیکِ ξ_r و η_r را معرفی کنیم که با روابطِ زیر به متغیرهایِ یک‌نواخت‌کننده‌یِ J_r و w_r مربوط اند.

$$\xi_r = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{J}_r^{\frac{1}{2}} \exp \cdot 2\pi i w_r, \qquad \eta_r = -i(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{J}_r^{\frac{1}{2}} \exp \cdot -2\pi i w_r.$$

احتمالاً در نظریه‌یِ کوانتمی دسته‌یِ متناظری از متغیرهایِ کانونیک هست که هر کدام فقط یک نوع مؤلفه دارند، طوری که $\xi_r(nm) = 0$، جز وقتی‌که $m_r = n_r - 1$ و $m_s = n_s$ باشد $(s \neq r)$، و $\eta_r(nm) = 0$، جز وقتی‌که $m_r = n_r + 1$ و $m_s = n_s$ باشد $(s \neq r)$. می‌توان وجودِ چنین‌متغیرهایی را به عنوانِ شرطِ چنددوره‌ای بودنِ سیستم درنظریه‌یِ کوانتمی در نظر گرفت. مؤلفه‌هایِ ضربِ هایزنبرگی‌یِ ξ_r و η_r رابطه‌یِ

$$\xi_r\, \eta_r(nn) = \xi_r(nm)\, \eta_r(mn) = \eta_r(mn)\, \xi_r(nm) = \xi_r\, \eta_r(mm) \tag{15}$$

را برآورده می‌کنند که m ها به وسیله‌یِ فرمول‌هایِ $m_r = n_r - 1$ و $m_s = n_s$ به n ها مربوط اند $(s \neq r)$.

ξ_r ها و η_r هایِ کلاسیکی $\xi_r\eta_r = -i/2\pi \cdot \mathrm{J}_r$ را برآورده می‌کنند. این رابطه لزوماً برایِ ξ_r ها و η_r هایِ کوانتمی درست نیست. رابطه‌یِ کوانتمی ممکن است، مثلاً، $\eta_r\xi_r = -i/2\pi \cdot \mathrm{J}_r$ یا $\frac{1}{2}(\xi_r\eta_r + \eta_r\xi_r) = -i/2\pi \cdot \mathrm{J}_r$ باشد. برایِ هر سیستمِ دینامیکی‌یِ خاص، یک بررسی‌یِ مفصّل لازم است تا بفهمیم این‌ها چه هستند. اگر رابطه‌یِ آخر درست باشد می‌توانیم دسته متغیرهایِ کانونیکِ ξ'_r و η'_r را به صورتِ

$$\xi'_r = (\xi_r + i\eta_r)/\sqrt{2}, \qquad \eta'_r = (i\xi_r + \eta_r)/\sqrt{2},$$

تعریف کنیم و در آن صورت داریم

$$\mathrm{J}_r = \pi({\xi'}_r^2 + {\eta'}_r^2).$$

این واقعاً چیزی است که برایِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ اتفاق می‌اُفتد. در حالتِ کلّی حتّی لازم نیست J_r یک تابعِ گویا از ξ_r و η_r باشد، مثال اش چرخنده‌یِ صُلبی است که هایزنبرگ مطالعه کرده.

§٦. حالت‌هایِ پایا

کمیتِ C، که با زمان تغییر نمی‌کند، مؤلفه‌هایِ (nm) اَش صفر است، جز آن‌هایی که برایِ‌شان $n = m$ است. پس مناسب است که فرض کنیم هر دسته‌ای از n ها به یک حالتِ خاصِ اتمی مربوط است، مثلِ نظریه‌یِ بور؛ پس هر $C(nn)$ مالِ یک حالتِ خاص است، دقیقاً به همان شکل که هر کمیتی که در نظریه‌یِ کلاسیک ظاهر می‌شود مالِ یک پیکربندی‌یِ خاص است. امّا، مؤلفه‌هایِ یک کمیتِ متغیرِ کوانتمی چنان به‌هم‌آمیخته اند که ممکن نیست بتوان به جمعِ مشخصی از آن‌ها یک حالتِ معین نسبت داد.

وقتی همه‌یِ کمیت‌ها ثابت اند، رابطه‌یِ بینِ کمیت‌هایِ کوانتمی تقلیل پیدا می‌کند به رابطه‌ای بینِ $C(nn)$ هایِ متعلق به یک حالتِ پایایِ معینِ n. با این فرض که قوانینِ کلاسیک برایِ توصیفِ حالت‌هایِ پایا برقرار اند، این رابطه همان رابطه‌یِ نظریه‌یِ کلاسیک خواهد بود؛ به خصوص، انرژی همان تابعی از J ها خواهد بود که در نظریه‌یِ کلاسیک هست. در این جا استدلالی برایِ فرضِ بور در موردِ ماهیتِ مکانیکی‌یِ حالتِ پایا داریم. هر چند لازم به ذکر است که، دامنه‌ها و بسامدهایِ حرکتِ مداری، کمیت‌هایِ متغیرِ وابسته به یک حالتِ پایایِ نظریه‌یِ بور، هیچ معنایِ فیزیکی و اهمیتِ ریاضی‌ای ندارند.

اگر معادله‌یِ بنیادی‌یِ (11) را برایِ کمیت‌هایِ x و H به‌کار ببریم، به کمکِ (14) به دست می‌آوریم

$$x(nm)\,\mathrm{H}(mm) - \mathrm{H}(nn)\,x(nm) = ih/2\pi \cdot \dot{x}(nm) = -h/2\pi \cdot \omega(nm)\,x(nm),$$

یا

$$\mathrm{H}(nn) - \mathrm{H}(mm) = h/2\pi \cdot \omega(nm).$$

این همان معادله‌یِ بور است که بسامد را به اختلافِ انرژی‌ها مربوط می‌کند.

اعمالِ شرطِ کوانتمی‌یِ (11) به متغیرهایِ کوانتمی‌یِ ξ_r و η_r که قبلاً تعریف شدند، می‌دهد

$$\xi_r\,\eta_r(nn) - \eta_r\,\xi_r(nn) = ih/2\pi \cdot [\xi_r, \eta_r] = ih/2\pi.$$

ترکیبِ این معادله و (15) نشان می‌دهد که

$$\xi_r\,\eta_r(nn) = -n_r\,ih/2\pi + \mathrm{const}.$$

به لحاظِ فیزیکی می‌دانیم که اتم حالتِ عادّی‌ای دارد که در آن تابش نمی‌کند. در این نظریّه، این [ویژگی] را می‌توان با این فرضِ هایزنبرگ توجیه کرد که همه‌یِ دامنه‌هایِ $C(nm)$ ی که n_r یا m_r ِ منفی دارند صفر اند، یا اصلاً وجود ندارند. این باعث می‌شود وقتی $n_r = 0$ باشد، بنا بر معادله‌یِ (15) $\xi_r\,\eta_r(nn)$ صفر شود. از این‌رو در حالتِ کلّی

$$\xi_r\,\eta_r(nn) = -n_r\,ih/2\pi.$$

اگر $\xi_r\,\eta_r = -i/2 \cdot \mathrm{J}_r$ آن‌وقت $\mathrm{J}_r = n_r\,h$ است. این همان قاعده‌یِ عادّی برایِ کوانتشِ حالت‌هایِ پایا است، پس در این حالت بسامدهایِ سیستم همان است که در نظریه‌یِ بور داده می‌شود. اگر $\frac{1}{2}(\xi_r\,\eta_r + \eta_r\,\xi_r) = -i/2\pi \cdot \mathrm{J}_r$ باشد، آن وقت $\mathrm{J}_r = (n_r) + \frac{1}{2})h$. از این‌رو در حالتِ کلّی در این حالت برایِ آن‌که بسامدهایِ درستی با نظریه‌یِ بور بدهند، اعدادِ کوانتمی‌یِ نیمه‌صحیح باید استفاده شوند [3].

تا این‌جا تنها سیستم‌هایِ چندگانه‌دوره‌ای را بررسی کردیم. امّا، به نظر نمی‌رسد هیچ دلیلی وجود داشته باشد که نتوان معادلاتِ بنیادی‌یِ (11) و (12) را برایِ سیستم‌هایِ غیرِدوره‌ای هم به کار برد، سیستم‌هایی که هیچ‌یک از ذراتِ سازنده‌شان به بی‌نهایت نمی‌رود، مثلاً یک اتمِ عام. کسی انتظار ندارد حالت‌هایِ پایایِ چنین سیستمی دسته‌بندی شوند، جز احتمالاً وقتی که حرکت‌های دوره‌ای دارند، و بنا بر این مجبوریم مطابقِ یک برنامه‌یِ دل‌بخواه به هر حالتِ پایا یک عددِ مجزایِ n نسبت بدهیم. متغیرهایِ کوانتمی‌یِ ما هنوز مؤلفه‌هایِ هم‌آهنگ دارند، هر کدام به دو n مربوط اند، و ضربِ هایزنبرگی باید درست مثلِ قبل انجام شود. بنا بر این هیچ ابهامی در توصیفِ معادلاتِ (12) یا معادلاتِ حرکت نیست.

دوست دارم تشکرِ خود را نسبت به آقایِ آر. اِچ. فاؤلر [f] (عضوِ انجمنِ سلطنتی) برای پیش‌نهادهایِ باارزشی که در نوشتنِ این مقاله داشت، ابراز کنم.

۱ یادداشت‌ها

[1] Heisenberg, 'Zeits. f. Phys.,' vol 33, p. 879 (1925)

[2] Kramers and Heisenberg,'Zeits. f. Phys.,' vol. 31, p. 681, equation (18), (1925).

[۳] در حالتِ خاصِ نوسان‌گرِ پلانک، از آن‌جا که انرژی تابعی خطّی از J است، بسامد در هر صورت درست در می‌آید.

اسامیِ خاص:

[a] P.A.M. Dirac, [b] 1851 Exhibition Senior Research Student, St. John's College, Cambridge. [c] Heisenberg, [d] Bohr, [e] Kramers, [f] R. H. Fowler