حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ مغناطیسی یِ تقریباً هم‌گن [1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-019 (2003/09/29)

اثر ِ ناهم‌گنی‌ها یِ کوچک ِ یک میدان ِ مغناطیسی، بر حرکت ِ یک ذره یِ باردار در آن میدان بررسی می‌شود. معلوم می‌شود تا مرتبه یِ اول نسبت به ناهم‌گنی، حرکت ِ ذره به شکل ِ مارپیچی دور ِ خط ِ میدان است که یک سوق به آن اضافه شده. ضمناً سرعت ِ ذره آن در راستا یِ میدان تغییر می‌کند: هر چه میدان شدیدتر شود، این سرعت کم‌تر می‌شود.

0 مقدمه

حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ مغناطیسی یِ یک‌نواخت ساده است: ذره مارپیچ ی را می‌پیماید که محور ِ آن موازی با میدان است. مئلفه یِ موازی‌بامیدان ِ سرعت ِ ذره ثابت است، و تصویر ِ حرکت ِ ذره در صفحه یِ عمود بر میدان یک حرکت ِ دایره‌ای یِ یک‌نواخت است. بس‌آمد ِ زاویه‌ای یِ این حرکت ِ دایره‌ای

$$\omega := \frac{q\,B}{m\,\gamma(v)} \tag{1}$$

است، که q بار ِ ذره، m جرم ِ آن، B اندازه یِ میدان ِ مغناطیسی، v اندازه یِ سرعت ِ ذره، و γ ضریب ِ لُرِنتس [a] است:

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{2}$$

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-019.pdf

c سرعتِ نور است. (1) در سیستمِ SI نوشته شده. برا یِ تبدیل به سیستمِ گاؤس [b] یا لُرِنتس [a]ـ هِوی‌ساید [c]، کافی است به جا یِ B بگذاریم (B/c). میدانِ مغناطیسی بر ذره یِ باردار کار انجام نمی‌دهد. پس سرعتِ ذره ثابت می‌ماند. به این ترتیب، اثرِ نسبیتِ خاص بر حرکتِ یک ذره یِ باردار در یک میدانِ مغناطیسی (حتا اگر این میدان هم‌گن نباشد)، فقط این است که جرمِ m به یک جرمِ مؤثرِ ثابتِ $m_{\rm eff}$ تبدیل می‌شود:

$$m_{\rm eff} := m\,\gamma(v). \tag{3}$$

این مطالب را می‌شود مثلاً در [1] پیدا کرد.

در [1]، حرکتِ یک ذره یِ باردار در یک میدانِ مغناطیسی یِ اندکی‌ناهم‌گن هم بررسی شده است. نتیجه آن است که ناهم‌گنی یِ میدانِ مغناطیسی باعث می‌شود به حرکتِ مارپیچی یِ ذره یک سوق اضافه شود، و ضمناً مئلفه یِ موازی‌بامیدانِ سرعت ثابت نماند. این‌جا می‌خواهیم همین حکم‌ها را با حلِ اختلالی یِ معادله یِ حرکت به دست آوریم. پارامترِ اختلال، ناهم‌گنی یِ (یعنی مشتقِ) میدانِ مغناطیسی است.

1 حلِ اختلالی یِ معادله یِ حرکت

نقطه ی که حرکتِ ذره در نزدیکی یِ آن را بررسی می‌کنیم را مبدئ، (x, y, z) را مختصاتِ دکارتی، و محورِ z را هم‌جهت با میدانِ مغناطیسی در مبدئ می‌گیریم. با تعریفِ

$$\omega := \frac{q\,\mathbf{B}}{m_{\rm eff}}, \tag{4}$$

و با فرضِ این که میدانِ مغناطیسی در نزدیکی یِ مبدئ هم‌وار است، نتیجه می‌شود تا مرتبه یِ یک نسبت به بردارِمکانِ $\mathbf{r}$،

$$\omega(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{0}) + D\,\mathbf{r}, \tag{5}$$

که D ماتریسِ مشتقِ ω نسبت به مکان، در مبدئ است:

$$\begin{aligned} D_{ij} &:= \frac{\partial \omega_i}{\partial r^j}(\mathbf{0}), \\ &= \frac{q}{m_{\rm eff}}\,\frac{\partial B_i}{\partial r^j}(\mathbf{0}). \end{aligned} \tag{6}$$

چون تک‌قطبی یِ مغناطیسی نداریم، رد ِ D صفر است:

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0. \tag{7}$$

معادله یِ حرکت ِ ذره یِ باردار

$$\ddot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}\times\omega \tag{8}$$

است. شکل ِ مئلفه‌ای یِ این معادله، با استفاده از (5) می‌شود

$$\begin{aligned}\ddot{x}-\omega\,\dot{y}\;&=\;+\dot{y}\,(D_{31}\,x+D_{32}\,y+D_{33}\,z)-\dot{z}\,(D_{21}\,x+D_{22}\,y+D_{23}\,z),\\ \ddot{y}+\omega\,\dot{x}\;&=\;-\dot{x}\,(D_{31}\,x+D_{32}\,y+D_{33}\,z)+\dot{z}\,(D_{11}\,x+D_{12}\,y+D_{13}\,z),\\ \ddot{z}\;&=\;+\dot{x}\,(D_{21}\,x+D_{22}\,y+D_{23}\,z)-\dot{y}\,(D_{11}\,x+D_{12}\,y+D_{13}\,z).\end{aligned} \tag{9}$$

ω مئلفه یِ سه‌وم ِ ω در مبدئ است. با معرفی یِ متغیرها یِ مختلط ِ

$$\begin{aligned}\xi\;&:=\;x+i\,y,\\ \bar{\xi}\;&:=\;x-i\,y,\end{aligned} \tag{10}$$

(9) می‌شود

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}+i\,\omega\,\dot{\xi}\;=\;&\frac{D_{12}-D_{21}+i\,(D_{11}+D_{22})}{2}\,\dot{z}\,\xi-i\,D_{33}\,z\,\dot{\xi}\\ &+(i\,D_{13}-D_{23})\,z\,\dot{z}+\frac{D_{32}-i\,D_{31}}{2}\bar{\xi}\,\dot{\xi}\\ &+\frac{-D_{12}-D_{21}+i\,(D_{11}-D_{22})}{2}\,\dot{z}\,\bar{\xi}+\frac{-D_{32}-i\,D_{31}}{2}\,\xi\,\dot{\xi},\end{aligned} \tag{11}$$

و

$$\begin{aligned}\ddot{z}\;=\;&(D_{21}-D_{12})\,\frac{\dot{\bar{\xi}}\,\xi+\bar{\xi}\,\dot{\xi}}{4}+(D_{11}+D_{22})\,\frac{\dot{\bar{\xi}}\,\xi-\bar{\xi}\,\dot{\xi}}{4\,i}\\ &+2\mathrm{Re}\left(\frac{D_{23}+i\,D_{13}}{2}\,\dot{\xi}\,z\right)+2\mathrm{Re}\left[\frac{D_{21}+D_{12}+i\,(D_{11}-D_{22})}{4}\,\xi\,\dot{\xi}\right].\end{aligned} \tag{12}$$

جواب ِ مرتبه یِ صفر ِ (11) و (12)

$$\xi_0(t) = a\,\exp(-i\,\omega\,t),$$
$$z_0(t) = V\,t, \tag{13}$$

است، که a و V ثابت اند. این یک حرکت ِ مارپیچی است؛ ذره در $t=0$ در صفحه ي $z=0$ است، مئلفه يِ موازی‌بامیدان ِ سرعت ِ ذره V، محور ِ مارپیچ محور ِ z، و شعاع ِ مارپیچ $|a|$ است.

برا يِ حل ِ اختلالی يِ (11) و (12)، باید (13) را در طرف ِ راست ِ (11) و (12) بگذاریم. دو جمله يِ اول ِ طرف ِ راست ِ (11) مضرب ِ $\exp(-i\,\omega\,t)$ و $t\,\exp(-i\,\omega\,t)$ اند، که جمله يِ شاخصی اند؛ چون $(-i\,\omega)$ ریشه يِ معادله يِ مشخصه يِ متناظر با شکل ِ مختل‌نشده يِ (11) است. برا يِ درنظرگرفتن ِ اثر ِ آن‌ها، می‌گیریم

$$\xi = \xi_{\rm i} + \xi_{\rm n}, \tag{14}$$

که

$$\ddot{\xi}_{\rm i} + i\,\omega\,\dot{\xi}_{\rm i} = \frac{[D_{12} - D_{21} + i\,(D_{11} + D_{22})]\,V}{2}\,\xi_{\rm i} - i\,D_{33}\,V\,t\,\dot{\xi}_{\rm i},$$

$$\ddot{\xi}_{\rm n} + i\,\omega\,\dot{\xi}_{\rm n} = (i\,D_{13} - D_{23})\,V^2\,t + \frac{(-i\,D_{32} - D_{31})\,|a|^2\,\omega}{2}$$

$$+c_1\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2\,\exp(-i\,2\omega t), \tag{15}$$

که c_1 و c_2 ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه يِ یک) اند. نهاده ای به شکل ِ

$$\xi_{\rm i} = a\,\exp[-i\,\omega\,t - i\,\phi(t)] \tag{16}$$

را در نظر می‌گیریم. این نهاده را در معادله يِ اول ِ (15) می‌گذاریم و فقط جمله‌ها يِ خطی را نگه می‌داریم. نتیجه می‌شود

$$-\,i\,\ddot{\phi} - \omega\,\dot{\phi} = \frac{[D_{12} - D_{21} + i\,(D_{11} + D_{22})]\,V}{2} - \omega\,D_{33}\,V\,t. \tag{17}$$

جواب ِ این معادله

$$\dot{\phi}(t) = D_{33}\,V\,t + \frac{(D_{21} - D_{12})\,V}{2\omega} - \frac{i\,D_{33}}{2\omega}\,V + c\,\exp(i\,\omega\,t) \tag{18}$$

است، که c ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه ي ِ یک) است. بخش ِ حقیقی ي ِ $\dot{\phi}$ تغییر ِ بس‌آمد ِ زاویه‌ای ي ِ حرکت ِ مارپیچی، و بخش ِ موهومی ي ِ $\dot{\phi}$ نشان‌دهنده ي ِ تغییر ِ نسبی ي ِ شعاع ِ مارپیچ است. پس تا جا یی که متوسط ِ زمانی ي ِ بس‌آمد ِ زاویه‌ای و تغییر ِ شعاع (هردو رو ي ِ یک دوره متناظر با بس‌آمدِزاویه‌ای ي ِ ω) موردِنظر است، مقدار ِ c مهم نیست و می‌شود آن را صفر گذاشت. از این‌جا،

$$\xi_{\rm i} \;=\; a\,\exp\left(-\frac{D_{33}\,V}{2\omega}\,t\right)\,\exp\left[-i\,\left(\omega'\,t+\frac{D_{33}\,V}{2}\,t^2\right)\right],$$

$$=:\; a(t)\,\exp\left[-i\,\int_0^t \mathrm{d}t'\;\omega''(t')\right], \tag{19}$$

که

$$a(t) := a\,\exp\left(-\frac{D_{33}\,V}{2\omega}\,t\right), \tag{20}$$

و

$$\omega'' \;:=\; \omega' + D_{33}\,V\,t,$$

$$:= \omega + \frac{(D_{21}-D_{12})\,V}{2\omega} + D_{33}\,V\,t. \tag{21}$$

از معادله ي ِ دوم ِ (15) نتیجه می‌شود

$$\xi_{\rm n}(t) \;=\; \frac{(D_{13}+i\,D_{23})\,V^2}{2\omega}\,t^2 + \left[\frac{(i\,D_{13}-D_{23})\,V^2}{\omega^2} + \frac{(i\,D_{31}-D_{32})\,|a|^2}{2}\right]\,t$$

$$+c_1'\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2'\,\exp(-i\,2\omega\,t),$$

$$=\; \frac{A}{2}\,t^2 + V_{\rm d}\,t + c_1'\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2'\,\exp(-i\,2\omega\,t), \tag{22}$$

که c_1' و c_2' ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه ي ِ یک) اند،

$$A := \frac{(D_{13}+i\,D_{23})\,V^2}{\omega}, \tag{23}$$

و

$$V_{\rm d} \ := \ \frac{(i\,D_{13}-D_{23})\,V^2}{\omega^2}+\frac{(i\,D_{31}-D_{32})\,v_{\rm t}^2}{2\omega^2},$$

$$v_{\rm t} \ := \ |a|\,\omega. \tag{24}$$

از (14)، (19)، و (22)، نتیجه می‌شود

$$\xi(t)=\frac{A}{2}\,t^2+V_{\rm D}\,t+a(t)\,\exp\left[-i\int_0^t {\rm d}t'\ \omega''(t')\right]+c'_1\,\exp(i\,\omega\,t)+c'_2\,\exp(-i\,2\omega\,t). \tag{25}$$

حل ِ اختلالی یِ (12) از این معادله به دست می‌آید.

$$\ddot{z} \ = \ \frac{(D_{11}+D_{22})\,|a|^2\,\omega}{2}$$

$$+2{\rm Re}\left[\frac{(-i\,D_{23}+D_{13})\,a\,V\,\omega}{2}\,t\,\exp(-i\,\omega t)\right]+$$

$$+2{\rm Re}\left[c_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)\right], \tag{26}$$

که c_3 ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه یِ یک) است. جواب ِ این معادله می‌شود

$$z(t) \ = \ V\,t-\frac{D_{33}\,|a|^2\,\omega}{4}\,t^2$$

$$-2{\rm Re}\left[\frac{(-D_{13}+i\,D_{23})\,a\,V}{2\omega}\ \left(1+\frac{2}{i\,\omega\,t}\right)\,t\,\exp(-i\,\omega\,t)\right]$$

$$+2{\rm Re}\left[c'_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)\right],$$

$$= \int_0^t {\rm d}t'\ V(t')-{\rm Re}\left[\frac{A^*\,a}{V}\ \left(1+\frac{2}{i\,\omega\,t}\right)\,t\,\exp(-i\,\omega\,t)\right]$$

$$+2{\rm Re}\left[c'_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)\right], \tag{27}$$

که c'_3 ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه یِ یک) است، و

$$V(t) := V - \frac{D_{33}\,|a|^2\,\omega}{2}\,t. \tag{28}$$

(25) و (27)، حل ِ اختلالی ِ معادله ی دیفرانسیل ِ حرکت اند.

2 توصیف ِ جواب

(25) و (27) را به این شکل می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \Xi_0(t) + \Xi_{\mathrm{d}}(t) + \xi_{\mathrm{t}}(t) + c_1'\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2'\,\exp(-i\,2\omega\,t), \\ z(t) &= Z_0(t) + z_{\mathrm{t}}(t) + 2\mathrm{Re}\left[c_3'\,\exp(-i\,2\omega\,t)\right], \end{aligned} \tag{29}$$

که

$$\begin{aligned} \Xi_0(t) &:= A\,t^2/2, \\ Z_0(t) &:= \int_0^t \mathrm{d}t'\;V(t'), \\ \Xi_{\mathrm{d}}(t) &:= V_{\mathrm{d}}\,t, \\ \xi_{\mathrm{t}}(t) &:= a(t)\,\exp\left[-i\int_0^t \mathrm{d}t'\;\omega''(t')\right], \\ z_{\mathrm{t}}(t) &:= -\mathrm{Re}\left[\frac{A^*\,a}{V}\,\left(1+\frac{2}{i\,\omega\,t}\right)\,t\,\exp(-i\,\omega\,t)\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

$(\dot{\Xi}_0, \dot{Z}_0)$ سرعت ی موازی با میدان ِ مغناطیسی را نشان می‌دهد. برا یِ دیدن ِ این، کافی است توجه کنیم

$$\begin{aligned} \dot{\Xi}_0 &= A\,t, \\ &= \dot{Z}_0\,\frac{(D_{13}+i\,D_{23})\,Z_0}{\omega}, \\ &= \dot{Z}_0\,\frac{\omega_1+i\,\omega_2}{\omega_3}. \end{aligned} \tag{31}$$

این سرعت را با $\mathbf{V}_0$ نشان می‌دهیم. اندازه یِ این سرعت ثابت نیست، و از (28) داریم

$$\dot{V} = -\frac{|a|^2}{4}\,\partial_3(\omega\cdot\omega), \tag{32}$$

که به شکل ِ مستقل‌ازمختصات می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0) = -\frac{|a|^2}{2}\,\mathbf{V}_0\cdot\nabla(\omega\cdot\omega). \tag{33}$$

$(\dot{\Xi}_{\mathrm{d}}, 0)$ سرعت ی در راستا یی عمود بر میدان ِ مغناطیسی را نشان می‌دهد. با استفاده از (24)، شکل ِ مستقل‌ازمختصات ِ این سرعت ($\mathbf{V}_{\mathrm{d}}$) می‌شود

$$\mathbf{V}_{\mathrm{d}} = \frac{\omega\times(\omega\cdot\nabla\omega)}{(\omega\cdot\omega)^2}\,\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0 + \frac{\omega\times\nabla(\omega\cdot\omega)}{4\,(\omega\cdot\omega)^2}\,v_{\mathrm{t}}^2. \tag{34}$$

این رابطه نشان می‌دهد اثر ِ v_{t} در $\mathbf{V}_{\mathrm{d}}$ ناشی از یک‌نواخت‌نبودن ِ اندازه یِ میدان است؛ در حال ی که اثر ِ V در $\mathbf{V}_{\mathrm{d}}$ ناشی از یک‌نواخت‌نبودن ِ جهت ِ میدان است. در واقع جمله یِ اول ِ $\mathbf{V}_{\mathrm{d}}$ را می‌شود بر حسب ِ انحنا یِ اصلی یِ خط ِ میدان نوشت:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{d}} = \frac{\omega\times\kappa}{\omega\cdot\omega}\,\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0 + \frac{\omega\times\nabla(\omega\cdot\omega)}{4\,(\omega\cdot\omega)^2}\,v_{\mathrm{t}}^2, \tag{35}$$

که

$$\kappa := \kappa\,\hat{\mathbf{n}}, \tag{36}$$

و κ عکس ِ شعاع ِ انحنا یِ خم و $\hat{\mathbf{n}}$ قائم ِ اصلی یِ خم است (مثلاً [2]).

به این ترتیب، برا یِ جمله‌ها یِ غیرِنوسانی یِ مکان ِ ذره یِ باردار ($\mathbf{R}$) می‌شود نوشت

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_{\mathrm{d}}, \tag{37}$$

که در هر نقطه $\mathbf{V}_0$ با میدان موازی است و تغییرات ِ اندازه اَش از (33) به دست می‌آید، و $\mathbf{V}_{\mathrm{d}}$ بر میدان عمود است و از (34) به دست می‌آید. در (34)، به جا یِ $\mathbf{V}_0$ می‌شود $\dot{\mathbf{R}}$ هم گذاشت، چون اختلاف ِ این‌دو از مرتبه یِ یک است.

(33)، (24)، و (37)، برا یِ به دست‌آوردن ِ $\mathbf{R}$ کافی نیستند، چون در آن‌ها v_{t} (یا $|a|$) هم ظاهر شده. مشتق ِ $|a|$ را می‌شود از (20) حساب کرد:

$$\frac{\mathrm{d}|a|}{\mathrm{d}t} = -\frac{|a|}{4\omega\cdot\omega}\,\mathbf{V}_0\cdot\nabla(\omega\cdot\omega), \tag{38}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$|a|^2\sqrt{\omega\cdot\omega}=\alpha, \tag{39}$$

که α ثابت است. با استفاده از این، (33) می‌شود

$$\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0=\beta-\alpha\sqrt{\omega\cdot\omega}, \tag{40}$$

که β ثابت است، و (34) می‌شود

$$\mathbf{V}_{\rm d}=\frac{\omega\times(\omega\cdot\nabla\omega)}{(\omega\cdot\omega)^2}\,(\beta-\alpha\sqrt{\omega\cdot\omega})+\frac{\omega\times\nabla(\omega\cdot\omega)}{4\,(\omega\cdot\omega)^2}\,(\alpha\sqrt{\omega\cdot\omega}). \tag{41}$$

دیده می‌شود ثابت ـ β، مجذور ـ سرعت ـ کل است، که باید ثابت بماند، چون میدان ـ مغناطیسی کار ی بر ذره انجام نمی‌دهد:

$$\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0+v_{\rm t}^2=\beta. \tag{42}$$

در رابطه یِ بالا اثر ـ $\mathbf{V}_{\rm d}$ در نظر گرفته نشده. علت آن است که $\mathbf{V}_{\rm d}$ از مرتبه یِ یک، و بر $\mathbf{V}_0$ عمود است. پس تنهاجمله یِ مرتبه‌یِ‌یک ی که به خاطر ـ آن در مجذور ـ سرعت می‌ماند، حاصلِ‌ضرب ـ آن در بخش ـ نوسانی یِ سرعت است، و میان‌گین ـ این حاصلِ‌ضرب صفر است.

(35)، (40)، و (41)، بردار ـ $\dot{\mathbf{R}}$ را بر حسب ـ $\mathbf{R}$ می‌دهند.

$(\xi_{\rm t},z_{\rm t})$ حرکت ی نوسان ی با دامنه و بس‌آمد ـ متغیر است. این حرکت رو یِ دایره ای به شعاع ـ $|a|$ انجام می‌شود، که صفحه یِ آن بر میدان ـ مغناطیسی عمود است. برا یِ نشان‌دادن ـ این، حاصلِ‌ضرب ـ داخلی یِ $\mathbf{V}_0$ در این بردار $(\mathbf{r}_{\rm t})$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{r}_{\rm t}\;&=\;\mathrm{Re}(\dot\Xi_0^*\,\xi_{\rm t})+\dot Z_0\,z_{\rm t},\\&=\;\mathrm{Re}[A^*\,t\,a\,\exp(-i\,\omega\,t)]-\mathrm{Re}[A^*\,t\,a\,\exp(-i\,\omega\,t)],\\&=\;0.\end{aligned} \tag{43}$$

این محاسبه تا مرتبه یِ یک انجام شده؛ ضمناً در آن از یک در برابر ـ $\omega\,t$، صرفِ‌نظر شده. در واقع برا یِ این که دایره یِ حرکت خوش‌تعریف باشد، لازم است ω بزرگ باشد تا پیش از این که مشخصات ـ دایره تغییر ـ چشم‌گیر ی کند، ذره چندین بار دایره را دور بزند. (39) می‌گوید شار ـ مغناطیسی یِ گذرنده از این دایره ثابت است.

بردار ـ سرعت ـ زاویه‌ای یِ ذره $-\omega''$ است، که

$$\omega''=\omega+\frac{\omega\cdot\nabla\times\omega}{2\,\omega\cdot\omega}\,\mathbf{V}_0. \tag{44}$$

جمله‌ها یِ باقی‌مانده در (29)، جمله‌ها یی نوسانی اند که بس‌آمدها پشان هم‌آهنگ‌ها یِ بس‌آمد ِ اصلی یِ نوسان است. می‌شود این چنین تعبیر کرد که این جمله‌ها مشخصات ِ دایره یِ نوسان را تغییر می‌دهند، اما چنان که میان‌گین ِ این تغییرات صفر است.

در نقطه ای که کرل ِ میدان ِ مغناطیسی صفر باشد، (34) یا (35)، و (44) ساده‌تر می‌شوند. اگر

$$\nabla \times \omega = 0, \tag{45}$$

آن‌گاه،

$$\omega \cdot \nabla\omega = \frac{1}{2}\,\nabla(\omega \cdot \omega), \tag{46}$$

و از آن‌جا،

$$\mathbf{V}_{\mathrm{d}} = \frac{\omega \times \kappa}{\omega \cdot \omega}\,\left(\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{v_{\mathrm{t}}^2}{2}\right). \tag{47}$$

هم‌چنین، (45) رابطه یِ (44) را هم ساده می‌کند:

$$\omega'' = \omega. \tag{48}$$

در این حالت، سرعت ِ زاویه‌ای یِ حرکت ِ دایره‌ای مستقل از حرکت ِ ذره در راستا یِ میدان است.

3 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 12

[2] David W. Henderson; “Differential geometry: a geometric introduction”, (Prentice Hall, 1998) chapter 2

4 اسم‌ها یِ خاص

[a] Lorentz

[b] Gauss

[c] Heaviside