تعبیرِ فیزیکیِ دینامیکِ کوانتومی

پ. ا. م. دیراک

کالجِ سنت‌جان، کمبریج؛ موسسه‌ی فیزیک نظری، کپنهاگ.

(فرستنده: ر. ه. فاولر، عضو انجمن سلطنتی — دریافت 2 دسامبرِ 1926.)[1]

§ 1. مقدمه و خلاصه.

مکانیکِ کوانتومیِ جدید شاملِ شکلی از معادلات است که بسیار مشابهِ معادلاتِ مکانیکِ کلاسیک هستند، با این تفاوتِ اساسی که متغیرهای دینامیکی از قانونِ جابه‌جاییِ ضرب پیروی نمی‌کنند، بلکه در روابطِ کوانتومیِ شناخته‌شده‌ای صدق می‌کنند. در نتیجه دیگر نمی‌توان متغیرهای دینامیکی را اعدادِ عادی (اعدادِ c) فرض کرد، بلکه شاید بتوان آن‌ها را نوعِ به‌خصوصی از اعداد (اعدادِ q) نامید. نظریه نشان می‌دهد که در حالتِ کلی این اعدادِ q را می‌توان با ماتریس‌هایی که عناصرش از نوعِ اعدادِ c (و توابعی از یک پارامترِ زمانی) هستند نشان داد.

وقتی محاسبات با اعدادِ q انجام گرفت و همه‌ی ماتریس‌های موردِ نیاز به دست آمد، آن‌گاه این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان از این نظریه نتایجِ فیزیکی به دست آورد، یعنی، چگونه می‌توان از نظریه c عددهایی را به دست آورد که با مقادیرِ آزمایش‌گاهی قابلِ مقایسه باشند؟ تا کنون این کار به کمکِ فرض‌هائی خاص انجام گرفته است. در مکانیکِ ماتریسیِ اولیه‌ی هایزنبرگ فرض می‌شد که عناصرِ ماتریسِ قطری‌شده‌ای که نماینده‌ی انرژی است سطوحِ انرژیِ سیستم هستند، و عناصرِ ماتریسِ قطبشِ کل، که توابعِ دوره‌ای از زمان هستند، همانندِ نظریه‌ی کلاسیکی، بسامدها و شدت‌های خطوطِ طیف هستند. تصویرِ موجیِ شرودینگر برای مکانیکِ کوانتومی بر اساسِ این فرض که مربعِ دامنه‌ی تابعِ موج را در مواردِ خاص می‌توان به صورتِ یک احتمال تعبیر کرد، راه‌های جدیدی برای حصولِ نتایجِ فیزیکی از این نظریه ارائه داده است. از این فرض، برای مثال، می‌توان در یک سیستم احتمالِ یک انتقال (یا در گردایه‌ای از سیستم‌های مشابه احتمالِ چند انتقال) توسطِ یک نیروی اختلالیِ

[1] این مقاله ترجمه ای است از
P. A. M. Dirac, "The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics", *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. CXIII.–A. (A113), no. 765, pp. 621 - 641

ترجمه ی مریم حاجی‌رحیمی

دلخواهِ خارجی را به دست آورد[2]، و بنابراین با این فرض که اختلال بر اثرِ تابشِ فرودی ایجاد شده باشد، مستقیماً می‌توان ضرایبِ B یِ اینشتن را به دست آورد. دوباره در روشِ بورن برای حلِ مسائلِ برخورد [3] فرض می‌شود که مربعِ دامنه‌ی تابعِ موجِ پراکنده در هر جهت احتمالِ پراکندگیِ الکترون (یا جسمِ دیگرِ) برخوردی در آن جهت را تعیین می‌کند.

اخیراً هایزنبرگ نقطه‌ی مشترکِ دیگری بینِ نظریه و آزمایش یافته است، که تا حدودی متفاوت است[4]. اگر مسئله‌ی دو سیستمِ اتمیِ در حالِ تشدید، یعنی با جهشِ انرژی از یک سیستم به دیگری، را در نظر بگیریم، می‌توانیم میان‌گینِ زمانیِ انرژیِ یکی از آن‌ها را، با این فرض که این میان‌گینِ زمانی با یک عنصرِ قطری از ماتریسِ نشان‌دهنده‌ی انرژیِ آن سیستم داده می‌شود، به دست آوریم. به طورِ مشابه می‌توان میان‌گینِ زمانیِ مربعِ انرژی، مکعبِ انرژی، و غیره را به دست آورد. هایزنبرگ نشان داده است که این میان‌گین‌های زمانیِ محاسبه شده دقیقاً برابرِ چیزی هستند که از این فرض که انرژی به طورِ گسسته از یک مقدارِ کوانتیده به مقدارِ دیگر تغییر می‌کند، قابلِ انتظار است. بنابراین نظریه را می‌توان برای نشان دادنِ این که انرژی عملاً به طورِ گسسته از یک مقدارِ کوانتیده به مقدارِ دیگر تغییر می‌کند به کار برد، و این ما را قادر به محاسبه‌ی کسری از زمانِ کلی می‌کند که در آن مدت انرژی یک مقدارِ خاص داشته است، اما البته این نظریه هیچ اطلاعی در موردِ زمانِ گذار نمی‌دهد.

این نتیجه را می‌توان به خیلی گستره‌ها تعمیم داد. می‌توان آن را به هر سیستمِ دینامیکی‌ای، نه لزوماً یک سیستمِ دو بخشیِ در تشدیدِ با سیستمی دیگر، و به هر متغیرِ دینامیکی‌ای، نه لزوماً متغیری با مقادیرِ کوانتیده، تعمیم داد. (گذشته از مشکلاتِ حاصل از تبه‌گنی) می‌توان میان‌گینِ زمانیِ هر متغیرِ دینامیکی، مثلِ g، را برای هر حالتِ پایای سیستم، و به طورِ مشابه میان‌گینِ زمانیِ g^2، g^3، و غیره را محاسبه کرد. اطلاعاتی که به این شکل در موردِ g به عنوانِ یک تابع از زمان حاصل شده است را می‌توان جمع زد و بیان کرد که چه کسری از زمانِ کل g بینِ دو مقدارِ عددیِ معلوم، مثلاً g' و g''، قرار دارد. در موردِ بازه‌های زمانی که در آن‌ها این شرط برقرار است چیزی جز این که چه کسری از زمانِ کل را تشکیل می‌دهند نمی‌توان گفت.

بنابراین دیده می‌شود که در نظریه ی کوانتومی هم مثلِ نظریه‌ی کلاسیکی، می‌توان به سؤالاتِ مشخصی که در نظریه‌ی کلاسیکی در موردِ یک سیستم مطرح است (مثلاً این پرسش: در چه کسری از زمانِ کل، g بینِ دو مقدارِ خاص قرار می‌گیرد؟) پاسخ‌های معلومِ واضح داد. در مقاله‌ی حاضر یک نظریه‌ی کلی از چنین سؤال‌هایی و روشِ یافتنِ پاسخِ آن‌ها ساخته می‌شود. این نظریه تمامِ اطلاعاتِ

[2] نگا. Schrödinger, 'Ann. d. Phys.', vol. 81, p. 112 (1926)؛ هم‌چنین بخشِ 5 از مقاله‌ی نویسنده 'Roy. Soc. Proc.', A, vol. 112, p. 661 (1926).

[3] Born,'Z. f. Physik', vol. 37, p. 803 (1926).

[4] از دکتر هایزنبرگ که مرا از این نتایج قبل از چاپشان مطلع کرد سپاسگزارم.

فیزیکی‌ای را که امیدواریم از دینامیکِ کوانتومی به دست آوریم نشان می‌دهد، و یک روشِ کلی برای یافتنِ آن اطلاعات ارائه می‌دهد که می‌تواند جای‌گزینِ همه‌ی فرض‌های خاصی شود که قبلاً به کار می‌رفت، و شاید هم پیش‌تر برود. پرسش‌های بالا در موردِ کسری از زمانِ کل که در آن زمان شرایطِ خاصی برقرار هستند، نقطه‌ی مناسبی برای این تحقیق نیستند، زیرا تنها برای سیستم‌های ناتبه‌گن می‌توان به این پرسش‌ها پاسخِ مشخصی داد، و یک سیستم همواره وقتی دو یا بیش از دو تا از انتگرال‌های اولیه‌ی آن بتوانند مقادیرِ پیوسته بگیرند تبه‌گن است. پس از یک دیدگاهِ کلی‌تر به موضوع نزدیک می‌شویم.

پرسشِ کلی در مکانیکِ کلاسیک را به این صورت می‌توان فرمول‌بندی کرد: مقدارِ هر ثابتِ انتگرالِ[5] g برای یک سیستمِ دینامیکیِ معلوم و با شرایطِ اولیه‌ی داده‌شده، که با مقادیرِ عدديِ ${q_{r_0}}'$، ${p_{r_0}}'$ برایِ مثلاً مختصات و تکانه‌های اولیه‌ی q_{r_0}، p_{r_0} معلوم می‌شود، چیست؟ نظریه‌ی دینامیکی ما را قادر می‌کند که g را به صورتِ یک تابع از q_{r_0}، p_{r_0} بیان کنیم، و بنابراین تنها باید برای q_{r_0}، p_{r_0} مقادیرِ عدديِ ${q_{r_0}}'$ و ${p_{r_0}}'$ را جای‌گزین کنیم تا پاسخِ این سؤال را بیابیم. در نظریه‌ی کوانتومی هم می‌توانیم برای g یک عبارت بر حسبِ q_{r_0} و p_{r_0} به دست آوریم، ولی حالا q_{r_0} و p_{r_0} دیگر از قانونِ جابه‌جاییِ ضرب پیروی نمی‌کنند، به طوری که اگر مقادیرِ عددی را به جای آن‌ها قرار دهیم جواب در حالتِ کلی به ترتیبِ قرارگیریِ اولیه‌ی آن‌ها بستگی دارد. پس در نظریه‌ی کوانتومی نمی‌توان جوابِ بی‌ابهامی به این سؤال داد.

در نظریه‌ی کوانتومی به هیچ سؤالی که به مقادیرِ عدديِ هر دوی q_{r_0} و p_{r_0} ارجاع می‌دهد نمی‌توان پاسخ داد. با این حال انتظار می‌رود که بتوان به سؤالاتی پاسخ داد که در آن‌ها تنها q_{r_0} یا تنها p_{r_0} مقادیرِ عددی دارند، یا به طورِ کلی‌تر وقتی که مجموعه‌ای از ثوابتِ انتگرال‌گیريِ ξ_r که با هم جابه‌جا می‌شوند دارای مقادیرِ عددی باشند. اگر η_r ها متغیرهای هم‌یوغِ کانونيِ ξ_r ها باشند، آن‌گاه می‌خواهیم بدانیم وقتی این مقادیرِ عددی را برای ξ_r داریم، در موردِ g به عنوانِ تابعی از η_r چه می‌توانیم بگوییم. نشان خواهیم داد که کسری از فضای η که در آن g بینِ هر دو مقدارِ عدديِ معلوم قرار دارد را می‌توان بدونِ ابهام تعیین کرد. به طورِ کلی‌تر، اگر g_1، g_2 ... یک مجموعه از ثابت‌هایِ انتگرالی باشند که با هم جابه‌جا می‌شوند، کسری از فضای η_r که در آن هر g_r بینِ دو عددِ معلوم قرار می‌گیرد را می‌توان تعیین کرد. بنابراین اگر یک مجموعه از دستگاه‌های مشابه با مقادیرِ عدديِ یکسان برای ξ_r داشته باشیم، و فرض کنیم که این دستگاه‌ها به طورِ یک‌نواخت در فضای η پخش شده باشند، می‌توان تعدادِ دستگاه‌هایی را که هر یک از g_r های آن‌ها بینِ مقادیرِ عدديِ مشخصی قرار دارند تعیین کرد. به نظر

[5] عبارت‌هایِ ثابتِ انتگرال شاملِ مقادیری از یک مختصه یا تکانه در یک زمانِ معلومِ $t = t_0$ هم هستند. در مکانیکِ کوانتومی این "مقدار" باید یک عددِ q باشد، البته t_0 یک عددِ c است.

می‌رسد سؤالاتی از این نوع تنها پرسش‌هایی هستند که نظریه‌ی کوانتومی می‌تواند به آن‌ها یک پاسخِ معین بدهد، و احتمالاً این‌ها تنها سؤالاتی هستند که فیزیک‌دان باید به آن‌ها پاسخ بدهد.

برای پاسخ به پرسش‌هایی که در آن‌ها ξ_r ها مقادیرِ عددی می‌گیرند، نیاز به شکلی از ماتریس‌ها داریم که سطرها و ستون‌هایشان مقادیرِ عدديِ ξ_r ها را نشان دهند. در بیشترِ مسائلِ اتمی الکترون‌ها در ابتدا در مدارهای مشخصی قرار گرفته‌اند. برای چنین مسائلی باید ξ_r را برابر با مقادیرِ اولیه‌ی متغیرهای کنشِ J_r (یا انتگرال‌هايِ اولِ دیگری که مدارها را تعیین می‌کنند) گرفت، آن‌گاه می‌توان، به کمکِ نمایشِ ماتريسيِ معمولی، کسری از فضای w را پیدا کرد که در آن شرایطِ تعیین‌شده‌ی مشخصی برقرار است. با این حال مسائلِ خاصی وجود دارند که در آن‌ها الکترون‌ها در زمانِ اولیه در مدارهای معینی قرار ندارند (برای مثال مسئله‌ی برهم‌کنشِ ذره‌ی β ی گسیل شده از یک اتمِ رادیواکتیو با الکترون‌های مدارِ اتمی، که در آن ذره‌ی β در ابتدا درونِ هسته بوده است). برای حلِ چنین مسائلی نیاز به یک نمایشِ ماتریسی از متغیرهای دینامیکی داریم که سطرها و ستون‌هایش نشان‌گرِ ثوابتِ انتگراليِ دیگری غیر از متغیرهای دینامیکی باشد، به طوری که بتوان شرایطِ اولیه را برحسبِ مقادیرِ عدديِ مشخص شده برای این ثوابتِ انتگرالی بیان کرد. (در مثالِ ذره‌ی β احتمالاً مناسب است که سطرها و ستون‌های ماتریس، مختصاتِ ذره‌ی β را در زمانِ تابش، مثلاً $t = t_0$، را نشان دهند. پس تنها به سطرها و ستون‌هایی از ماتریس علاقه‌مند هستیم که نشان می‌دهد ذره‌ی β در زمانِ $t = t_0$ درونِ هسته بوده است، و می‌توانیم گستره‌ای از تکانه‌ی اولیه‌ی ذره را حساب کنیم که برای رخ دادنِ انواعِ خاصی از برهم‌کنش، که با مقادیرِ عددی برای ثوابتِ انتگرالِ خاص مشخص می‌شوند، لازم است. پس باید، با این فرض که همه‌ی جهاتِ تابش به یک اندازه محتمل هستند، احتمالِ آن نوع برهم‌کنش را حساب کنیم.)

بنابراین به یک نظریه از شکل‌های کلی‌ترِ نمایشِ ماتریسی نیاز داریم، که در آن سطرها و ستون‌ها نشان‌گرِ هر مجموعه‌ای از ثوابتِ انتگرالی هستند که با هم جابه‌جا می‌شوند، و نیز قوانینِ تبدیل از یکی از این شکل‌ها به دیگری را لازم داریم. این کار در بخش‌های 3 الی 5 انجام گرفته است. این نظریه را می‌توان به صورتِ تعمیمی از نظریه‌ی میدانِ لانچُز در نظر گرفت[6]، نمایشِ میدان در نظریه‌ی لانچُز واقعاً همانندِ نمایشِ ماتریسی با ماتریس‌هایی است که به جای مجموعه‌های گسسته‌ی معمولی، بازه‌های پیوسته‌ای از سطر و ستون دارد.

در بخشِ 6 نظریه‌ی تبدیل در بررسيِ روشِ کليِ به دست آوردنِ نتایجِ فیزیکی از مکانیکِ ماتریسی به کار گرفته می‌شود، و در بخشِ 7 نشان داده می‌شود که این روشِ کلی با فرضیه‌های خاصی که قبلاً استفاده می‌شد در توافق است.

[6] Lanczos, 'Zeits. f. Phys.', vol. 35, p. 812 (1926).

در مکانیکِ ماتریسیِ معمولی برای نمایشِ متغیرهای دینامیکی، ماتریس‌هایی به دست می‌آیند که سطرها و ستون‌هایشان حالاتِ پایای سیستم را نشان می‌دهند. پس اگر α_1، $\alpha_2 \cdots \alpha_u$ انتگرال‌های اولِ معادلاتِ حرکت (متغیرهای کنش یا غیره) باشند که u تعدادِ درجاتِ آزادی است، هر سطر و ستون را می‌توان با مقادیرِ تعیین شده برای α_1، $\alpha_2 \cdots \alpha_u$، مثلاً $\alpha_1{}'$، $\alpha_2{}' \cdots \alpha_u{}'$ نام‌گذاری کرد، و می‌توانیم عناصرِ ماتریسیِ نشان‌دهنده‌ی هر متغیرِ دینامیکیِ g را به شکلِ $g(\alpha_1{}', \alpha_2{}' \cdots \alpha_u{}';\ \alpha_1{}'', \alpha_2{}'' \cdots \alpha_u{}'')$ یا به طورِ خلاصه به شکلِ $g(\alpha', \alpha'')$ بنویسیم. این عناصرِ ماتریسی فقط تابعی از زمان هستند. در این مقاله مکانیکِ نسبیتی را وارد نمی‌کنیم، و هر جا متغیرِ زمان ظاهر شود آن را تنها یک پارامتر (یک عددِ c) به حساب می‌آوریم.

پارامترهای نشان‌دهنده‌ی سطرها و ستون‌های ماتریس می‌توانند مجموعه‌های گسسته از مقادیر یا همه‌ی مقادیرِ درونِ بازه‌های پیوسته‌ی معلوم، یا شاید هر دو را اختیار کنند. اگر می‌خواستیم آن‌ها را با احتسابِ هر دو امکان بنویسیم، روابط بیش از حد پیچیده می‌شد. حالتِ با بازه‌های پیوسته از مقادیر یک حالتِ نوعی و کلی‌تر است. پس همه‌ی فرمول‌ها را چنان می‌نویسیم که انگار این پارامترها تنها بازه‌های پیوسته‌ی مقادیر را اختیار می‌کنند، معلوم است که اگر مجموعه‌های اعداد گسسته باشند باید تغییراتِ لازم را اعمال کرد. اکنون طبقِ قانونِ ضربِ ماتریس‌ها داریم

$$ab\ (\alpha'\ \alpha'') = \int a\ (\alpha'\ \alpha''')\ d\alpha''' \cdot b\ (\alpha'''\ \alpha''),$$

که $d\alpha'''$ به معنیِ $d\alpha_1{}''' \cdot d\alpha_2{}''' \cdots d\alpha_u{}'''$ است، و حدودِ انتگرال‌گیری روی همه‌ی مقادیرِ α''' است که سطرها و ستون‌های ماتریس‌ها را نشانه‌گذاری می‌کنند[7].

بدونِ نیاز به یک نمادگذاری برای تابعی از عددِ c یِ x که صفر است مگر این‌که x خیلی کوچک باشد، و نیز انتگرالِ آن روی بازه‌ی شاملِ $x = 0$ برابرِ یک است، نمی‌توان در بسط و گسترشِ نظریه‌ی ماتریس‌های با بازه‌های پیوسته از سطرها و ستون‌ها پیش رفت. ما نمادِ $\delta(x)$ را برای مشخص کردنِ این تابع برمی‌گزینیم، یعنی، $\delta(x)$ به صورتِ

$$\delta(x) = 0, \qquad \text{وقتی} \qquad x \neq 0,$$

و با

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1,$$

تعریف می‌شود. البته، واضح است که $\delta(x)$ تابعِ مناسبی از x نیست، اگرچه تنها به عنوانِ حدِ یک دنباله‌ی خاص از توابع می‌توان آن را در نظر گرفت. با وجودِ این می‌توان، بدونِ به دست آوردنِ نتایجِ

[7] هر جا حدودِ انتگرال‌گیری معین نشده باشند، همه‌ی بازه‌ی پارامترهایی که برای نام‌گذاریِ سطرها و ستون‌های ماتریس به کار می‌روند موردِ نظر است.

غلط، تابعِ $\delta(x)$ را همانندِ یک تابعِ مناسب عملاً برای همه‌ی اهدافِ مکانیکِ کوانتومی به کار برد. هم‌چنین می‌توان از مشتقاتِ $\delta(x)$، یعنی $\delta'(x)$، $\delta''(x)\cdots$، که حتی گسسته‌تر و ' نامناسب‌تر ' از خودِ $\delta(x)$ هستند، استفاده کرد.

اکنون تعدادی از خصوصیاتِ اولیه‌ی این توابع بیان می‌شود تا بعداً مجبور به قطع کردنِ بحث نشویم. واضح است که می‌توانیم تساوی‌های $\delta(-x)=\delta(x)$، $\delta'(-x)=-\delta'(x)$، و غیره را به کار بریم. شرطِ $\delta(x)=0$ را، جز برای $x=0$، می‌توان به صورتِ معادله‌ی جبریِ $x\delta(x)=0$ بیان کرد. [این معادله را، همراه با معادله‌ی $\delta(x)\cdot x=0$، می‌توان در تعریفِ $\delta(x)$ وقتی x یک عددِ q یا ماتریس است به کار برد.] اگر $f(x)$ تابعِ منظمی از x بوده و a یک عددِ c باشد، آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(a-x)\ dx = f(a), \tag{1}$$

را داریم به طوری که عملِ ضرب در $\delta(a-x)$ و انتگرال گیری از آن نسبت به x با عملِ جای‌گذاریِ a به جای x معادل است. دوباره با انتگرال‌گیریِ جزءبه‌جزء داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta'(a-x)\ dx = \Big[-f(x)\delta(a-x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\ \delta(a-x)\ dx = f'(a), \tag{1$'$}$$

زیرا جمله‌ی انتگرال‌گیری شده در هر دو حدّ صفر می‌شود، و به طورِ کلی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta^{(n)}(a-x)\ dx = f^{(n)}(a), \tag{1$''$}$$

به طوری که عملِ ضرب در $\delta^{(n)}(a-x)$ و انتگرال‌گیری نسبت به x با عملِ n بار مشتق‌گیری نسبت به x و جاگذاریِ a به جای x معادل است.

اکنون نشان می‌دهیم که، اگر b یک عددِ c دیگر باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\ \delta(x-b)\ dx = \delta(a-b)\,. \tag{2}$$

اگر سمتِ چپ را تابعی از b بگیریم و آن را برابر با $\phi(b)$ قرار دهیم، در صورتی که اختلافِ b از a خیلی باشد آن گاه $\phi(b)$ صفر می‌شود، و نیز

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(b)\ db = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\ dx\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b)\ db = 1\,. \tag{2}$$

بنابراین $\phi(b)$ همه‌ی خصوصیاتِ $\delta(a-b)$ را دارد و می‌توان آن را برابر با $\delta(a-b)$ قرار داد. اگر در (1)، $f(x)$ را برابرِ $\delta(x-b)$ قرار داده بودیم هم معادله‌ی (2) را به دست می‌آوردیم. پس در این حالت می‌توان بدونِ یافتنِ نتیجه‌ی غلط، از $\delta(x-b)$ همانندِ یک تابعِ منظم از x استفاده کرد. یک حالتِ مشابهِ دیگر آن است که در $(1')$، $f(x)$ را برابرِ $\delta(x-b)$، یا به طورِ کلی‌تر، برابرِ $\delta^{(n)}(x-b)$ قرار دهیم، که منجر به معادلاتِ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(a-x)\ \delta(x-b)\ dx = \delta'(a-b), \tag{2'}$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(a-x)\ \delta^{(n)}(x-b)\ dx = \delta^{(n+1)}(a-b)\,. \tag{2''}$$

می‌شود. درستیِ معادله‌ی $(2')$ را می‌توان به طورِ مستقل با مشتقِ جزئی از (2) نسبت به a آزمود، و سپس با n بار مشتقِ جزئی از $(2')$ نسبت به b می‌توان درستیِ $(2'')$ را بررسی کرد.

از روی $(1')$ اگر $f(x)=x$ و $a=0$ را اختیار کنیم، معادله‌ی

$$\int_{-\infty}^{\infty} -x\ \delta'(x)\ dx = 1\,.$$

را به دست می‌آوریم. اما $-x\ \delta'(x)$، به صورتِ تابعی از x، به جز وقتی که $|x|$ خیلی کوچک است، صفر می‌شود. پس $-x\ \delta'(x)$ همه‌ی خصوصیاتِ $\delta(x)$ را دارد و می‌توانیم بنویسیم

$$-x\ \delta'(x) = \delta(x)\,. \tag{3}$$

هنگامِ استفاده از ماتریس‌هایی با بازه‌ی پیوسته از سطرها و ستون‌ها، برای توصیفِ عناصرِ ماتریسِ واحد نیاز به تابعِ $\delta(x)$ داریم. طبقِ تعریف ماتریسِ واحد باید به گونه‌ای باشد که حاصلِ ضربِ آن در هر ماتریسِ y برابر با آن ماتریس بشود، یعنی، باید داشته باشیم

$$\int 1\ (\alpha'\alpha''')\ d\alpha''' \cdot y(\alpha'''\alpha'') = y(\alpha'\alpha'')\,.$$

پس می‌بینیم که به اختصار،

$$1\ (\alpha'\alpha''') = \delta({\alpha_1}'-{\alpha_1}''')\,.\,\delta({\alpha_2}'-{\alpha_2}''')\ \ .\ .\ .\ \ \delta\ ({\alpha_u}'-{\alpha_u}''') = \delta(\alpha'-\alpha'''),$$

ماتریسِ قطریِ کلیِ $f(\alpha)$ دارای عناصرِ $f(\alpha')\cdot\delta(\alpha'-\alpha'')$ است. کمیت‌های $f(\alpha')$ را عناصرِ قطریِ این ماتریس می‌نامیم.

§ 3. معادلاتِ تبدیل.

راهِ حلِ یک مسئله‌ی مکانیکِ ماتریسیِ هایزنبرگ پیدا کردنِ شکلی از ماتریس‌ها برای نمایشِ متغیرهای دینامیکی است که در شرایطِ زیر صدق کند:

(i) شرایطِ کوانتومی، $q_r p_r - p_r q_r = ih$، و غیره.

(ii) معادلاتِ حرکت، $g\mathrm{H} - \mathrm{H}g = ih\dot{g}$، یا اگر g بستگیِ صریح به زمان داشته باشد $g\mathrm{H} - \mathrm{H}g + ih\ \partial g/\partial t = ih\dot{g}$.

(iii) ماتریسِ هامیلتونیِ H باید یک ماتریسِ قطری باشد.

(iv) ماتریس‌های متغیرهای حقیقی باید هرمیتی باشند.

به طورِ کلی یک شکلِ یکتا از ماتریس‌ها که در این شرایط صدق کند، وجود ندارد. اگر روی هر ماتریس، مثلاً g، تبدیلِ کانونیکِ

$$\mathrm{G} = bgb^{-1}, \tag{4}$$

را انجام دهیم که در آن b ماتریسِ دل‌خواه است، ماتریسِ جدیدِ G در همه‌ی روابطِ جبریِ ماتریسِ قبلی صدق می‌کند؛ به ویژه شرایطِ کوانتومی را ارضا می‌کنند. هم‌چنین، اگر عناصرِ ماتریسِb تابعِ زمان نباشند، و داشته باشیم $\dot{\mathrm{G}} = b\dot{g}b^{-1}$، آن‌گاه ماتریس‌های جدید در معادلاتِ حرکت صدق می‌کنند. به علاوه، اگر b با H جابه‌جا شود، ماتریسِ جدیدِ نماینده‌ی هامیلتونی هم یک ماتریسِ قطری خواهد بود، و اضافه بر این هرگاه عناصرِ ماتریس‌های b و b^{-1} چنان باشند که $b(\alpha'\alpha'')$ هم‌یوغِ موهومیِ $b^{-1}(\alpha''\alpha')$ باشد، اگر g هرمیتی باشد ماتریسِ G یِ متناظر با آن هم هرمیتی خواهد بود. بدین ترتیب وقتی این شرایط ارضا شوند ماتریس‌های جدید در شرایطِ (i) تا (iv) صدق خواهند کرد، و برای نمایشِ متغیرهای دینامیکی به خوبیِ ماتریس‌های اولیه هستند. ما نظریه‌ی این تبدیلات، و نیز تبدیلاتِ کلی‌ترِ شکلِ ماتریس‌هایی که کافی است فقط شرایطِ (i) و (ii) را برآورده می‌کنند، یعنی کافی است عناصرِ ماتریسیِ b و b^{-1} تنها مستقل از زمان باشند، را بررسی می‌کنیم.

معادله‌ی (4) را می‌توان به شکلِ

$$G(\alpha'\alpha'') = \int\int b(\alpha'\alpha''')\ d\alpha'''\ .\ g(\alpha'''\alpha^{(4)})\ d\alpha^{(4)}\ .\ b^{-1}(\alpha^{(4)}\alpha''), \tag{5}$$

نوشت. وقتی چنین تبدیلی انجام می‌دهیم می‌توانیم هر نوع جابه‌جایی را به طورِ هم‌زمان روی سطرهای ماتریسِ جدیدِ G و ستون‌های آن انجام دهیم بدون آن که در هیچ یک از شرایطِ (i) ... (iv) اشکالی ایجاد کنند. بنابراین هیچ ارتباطِ یک به یکی بینِ سطرها و ستون‌های ماتریس‌های جدید و ماتریس‌های

اولیه وجود ندارد. نمادگذاریِ معادله‌ی (5) خوب نیست زیرا به طورِ ضمنی بر این ارتباط دلالت دارد، نمادِ یکسانِ α' یا $(\alpha_1{}'\alpha_2{}'\cdots\alpha_u{}')$ برای تعیینِ سطر و ستونِ هر دو ماتریسِ G و g به کار رفته است. پس نمادگذاری را اصلاح می‌کنیم و بنابراین معادله‌ی (5) را به شکلِ

$$G(\xi_1{}'\xi_2{}'\cdots\xi_u{}';\ \xi_1{}''\xi_2{}''\cdots\xi_u{}'') = G(\xi'\xi'')$$
$$= \int\int b(\xi'\alpha')\ d\alpha'\,.\,g(\alpha'\alpha'')\ d\alpha''\,.\,b^{-1}(\alpha''\xi''), \qquad (5')$$

می‌نویسیم که پارامترهای جدیدِ $\xi_r{}'$ کاملاً مستقل از α' ها هستند. در حقیقت، ξ' ها ممکن است در بازه‌های مقادیری کاملاً متفاوت از α' ها قرار بگیرند، یا حتی می‌توان ξ' ها را تنها مجموعه‌های گسسته از اعداد اختیار کرد در حالی که α ها می‌توانند در بازه‌های پیوسته باشند، یا برعکس.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که چگونه باید سطرها و ستون‌های ماتریسِ جدیدِ G را نام‌گذاری کرد، یعنی، چگونه به هر سطر و ستونِ آن یک مجموعه مقادیرِ عددی برای پارامترهای $\xi_r{}'$ نسبت داد. برای انجامِ این کار به یک روشِ منطقی، باید توابعی از متغیرهای دینامیکی، مثلاً ξ_1، $\xi_2\cdots\xi_u$، را بیابیم که در نمایشِ جدیدِ ماتریسی به صورتِ ماتریس‌های قطری باشند، و سپس باید به هر سطر و ستونِ مربوطه، مقدارِ $\xi_r{}'$ از عنصرِ قطری را که در آن سطر و ستونِ هر ξ_r قرار دارد نسبت دهیم. پس نام‌گذاری به این صورت انجام می‌شود که هر ξ_r دارای عناصرِ ماتریسی به شکلِ

$$\xi_r(\xi'\xi'') = \xi_r{}'\delta(\xi_1{}'-\xi_1{}'')\ \ldots\ \delta(\xi_2{}'-\xi_2{}'')\ \ldots\ \delta(\xi_u{}'-\xi_u{}'') = \xi_r{}'\ \delta(\xi'-\xi''), \qquad (6)$$

باشد. متغیرهای دینامیکیِ ξ_r در نام‌گذاریِ سطرها و ستون‌های ماتریس‌های جدید دقیقاً همان‌طوری به کار می‌روند که متغیرهای دینامیکیِ α_r در نام‌گذاریِ سطرها و ستون‌های ماتریس‌های اولیه به کار می‌رفتند.

ξ_r ها باید ثوابتِ انتگرال باشند، زیرا عناصرِ ماتریسیِ آن‌ها شاملِ t نیستند. در ضمن باید با یک‌دیگر جابه‌جا شوند، زیرا ماتریس‌های قطری همیشه جابه‌جا می‌شوند. پس ξ_r ها یک مجموعه مختصاتِ کانونیک می‌سازند، و یک مجموعه تکانه‌ی هم‌یوغِ کانونیک، مثلاً η_1، η_2، ... η_u دارند.

ماتریس‌های b و b^{-1} در روابطِ $bb^{-1}=1$ و $b^{-1}b=1$، یا

$$\int b(\xi'\alpha')\ d\alpha'\cdot b^{-1}(\alpha'\xi'') = \delta(\xi'-\xi'')$$

و

$$\int b^{-1}(\alpha'\xi')\ d\xi'\cdot b(\xi'\alpha'') = \delta(\alpha'-\alpha'')$$

صدق می‌کنند. پس عناصرِ ماتریسیِ $b(\xi'\alpha')$ و $b^{-1}(\alpha'\xi')$ به عنوانِ توابعی از α' های تعیین شده توسطِ مقادیرِ پارامترهای ξ'، و یا به عنوانِ توابعی از ξ' ها که با مقادیرِ پارامترهای α' تعیین شده‌اند، دو دستگاهِ توابعِ متعامد و بهنجار هستند. هر جفت از این دستگاه‌های توابعِ متعامدِ بهنجار یک تبدیل به ماتریس‌های جدیدی را تعریف می‌کند که در شرایطِ (i) و (ii) صدق می‌کنند. اگر علاوه بر این، $b(\xi'\alpha')$ و $b^{-1}(\alpha'\xi')$ هم‌یوغِ موهومی هم باشند، ماتریس‌های جدید شرطِ (iv) را هم ارضا می‌کنند. برای آن که شکلِ جدید در شرطِ (iii) صدق کند، ξ ها باید با H جابه‌جا شوند. چون ξ ها ثوابتِ انتگرال هستند، در نتیجه آن‌ها باید توابعی از متغیرهای کانونیِ اولیه‌ی مستقل از t یعنی q_r و p_r باشند.

اکنون نمادگذاری را کمی ساده می‌کنیم. در معادله‌ی $(5')$ لازم نیست برای نشان دادنِ یک متغیرِ دینامیکی در نمای قدیم و جدید از دو علامتِ متفاوتِ g و G استفاده کنیم، زیرا پارامترها (بسته به مورد؛ ξ' و ξ'' یا α' و α'') به روشنی نشان می‌دهند که هر عنصرِ ماتریسی متعلق به چه نمایشی است. پس برای مشخص کردنِ هر متغیرِ دینامیکیِ خاص، همواره از یک علامت، مثلاً g، استفاده می‌کنیم، و عناصرِ ماتریسیِ آن را در نمایش‌های متفاوت به صورتِ $g(\alpha'\alpha'')$، یا $g(\xi'\xi'')$ می‌نویسیم. به علاوه، اگر توابعِ تبدیلِ $b(\xi'\alpha')$ و $b^{-1}(\alpha'\xi')$ را به سادگی به صورتِ (ξ'/α') و (α'/ξ') بنویسیم، برای تعریفِ آن‌ها کافی است. پس رابطه‌ی $(5')$ را به شکلِ ساده‌شده‌ی

$$g(\xi'\xi'') = \int\int (\xi'/\alpha')\ d\alpha'\ .\ g(\alpha'\alpha'')\ d\alpha''(\alpha''/\xi'') \qquad (5'')$$

می‌نویسیم. از این پس طبقِ قرارداد همواره حروفِ بدونِ پریم مثلِ g یا $\xi(r)$ را برای نشان دادنِ متغیرهای دینامیکی (یا اعدادِ q) به کار می‌بریم، و حروفِ پریم‌دار شبیهِ ξ' و α'' را برای نمایشِ پارامترها، که نشان‌دهنده‌ی سطرها و ستون‌های ماتریس اند و می‌توانند مقادیرِ عدديِ مشخصی بگیرند و عددِ c هستند، به کار می‌بریم.

معادله‌ی تبدیلِ $(5'')$ را به طورِ کاملاً معادل می‌توان به شکلِ مثلاً

$$\int\int (\alpha'/\xi')\ d\xi'\ .\ g(\xi'\xi'')\ d\xi''(\xi''/\alpha'') = g(\alpha'\alpha'')$$

و مثلاً

$$\left.\begin{aligned} \int g(\xi'\xi'')\ d\xi''(\xi''/\alpha') &= \int (\xi'/\alpha'')\ d\alpha'' \cdot g(\alpha''\alpha') = g(\xi'\alpha') \\ \int (\alpha'/\xi'')\ d\xi'' \cdot g(\xi''\xi') &= \int g(\alpha'\alpha'')\ d\alpha''(\alpha''/\xi') = g(\alpha'\xi') \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

نوشت، که (با نمادهای قدیمی) به ترتیب متناظر با معادلاتِ ماتریسیِ

$$b^{-1}\mathrm{G}b = g, \qquad \mathrm{G}b = bg, \qquad b^{-1}\mathrm{G} = gb^{-1},$$

هستند که مستقیماً از (4) نتیجه می‌شوند. جملاتِ $g(\xi'\alpha')$ و $g(\alpha'\xi')$ که در معادلاتِ (7) ظاهر شدند را می‌توان عناصرِ دو ماتریس در نظر گرفت که متغیرِ دینامیکیِ g را در دو نمای جدیدِ کلی‌تر نشان می‌دهند که در آن نما سطرها و ستون‌های ماتریس‌ها به دو چیزِ متفاوت اشاره دارد. اکنون دیگر بینِ سطرها و ستون‌ها ارتباطِ یک به یکی وجود ندارد به گونه‌ای که در این نمایش‌ها ماتریسِ قطری معنیِ خاصی ندارد. ماتریس‌های با عناصرِ (ξ'/α') و (α'/ξ') در نمایشِ مربوطه‌شان ماتریس‌های واحد هستند، زیرا معادلاتِ (7) نشان می‌دهند که حاصلِ ضربِ این ماتریس‌ها در ماتریسی که یک عددِ q دل‌خواهِ g را نشان می‌دهد، برابر است با ماتریس‌هایی که g را نشان می‌دهند.

اگر دو تبدیلِ کانونی با ماتریس‌های b_1 و b_2 را به دنبالِ هم انجام دهیم، یعنی،

$$\mathrm{G} = b_1 g {b_1}^{-1}, \qquad \mathrm{G}^* = b_2 \mathrm{G} {b_2}^{-1},$$

نتیجه شبیه به یک تبدیلِ یکتا با ماتریسِ b_2b_1 است، زیرا

$$\mathrm{G}^* = b_2 b_2 g {b_1}^{-1} {b_2}^{-1} = (b_2b_1)\ g\ (b_2b_1)^{-1}\,.$$

در نمادگذاریِ جدید، این مسئله به این صورت درمی‌آید که اگر دو تبدیلِ کانونی به ترتیب با توابعِ تبدیلِ (ξ'/α')، (α'/ξ') و (κ'/ξ')، (ξ'/κ') به دنبالِ هم اعمال شود، نتیجه همانندِ یک تبدیلِ یگانه با توابعِ تبدیلِ

$$(\kappa'/\alpha') = \int (\kappa'/\xi')\ d\xi' (\xi'/\alpha')$$

و

$$(\alpha'/\kappa') = \int (\alpha'/\xi')\ d\xi' (\xi'/\kappa')\,.$$

خواهد بود.

§ 4. چند ماتریسِ مقدماتی.

عناصرِ ماتریسیِ ξ ها با معادله‌ی (6) داده می‌شوند. اکنون باید عناصرِ ماتریس‌های هم‌یوغِ کانونیِ ξ ها را تعیین کنیم. می‌توان نشان داد که ماتریس‌های η_r که عناصرشان با

$$\eta_r(\xi'\xi'') = -ih\ \delta({\xi_1}' - {\xi_1}'')\ \ldots$$

$$\ldots\,\delta({\xi_{r-1}}' - {\xi_{r-1}}'')\,.\,\delta({\xi_r}' - {\xi_r}'')\,.\,\delta({\xi_{r+1}}' - {\xi_{r+1}}'')\ \ldots\ \delta({\xi_u}' - {\xi_u}''),\ \ (8)$$

تعریف می‌شوند، در روابطِ کانونیِ

$$\eta_r\eta_s - \eta_s\eta_r = 0, \qquad \xi_r\eta_s - \eta_s\xi_r = 0 \quad (r \neq s)$$

و

$$\xi_r\eta_r - \eta_r\xi_r = ih\,.$$

صدق می‌کنند. دو رابطه‌ی اول خیلی ساده با کمکِ $(2')$ و (2) اثبات می‌شوند. ما سومین رابطه را برای حالتِ با یک درجه‌ی آزادی $(u = 1)$ اثبات خواهیم کرد. اثباتِ حالتِ با چند درجه‌ی آزادی دقیقاً مشابهِ همین است ولی به این سادگی نوشته نمی‌شود.

برای یک درجه‌ی آزادی، روابطِ

$$\xi(\xi'\xi'') = \xi' \;\delta(\xi' - \xi'')$$

و

$$\eta(\xi'\xi'') = -ih \;\delta'(\xi' - \xi''),$$

را داریم به گونه‌ای که

$$\begin{aligned}(\xi\eta - \eta\xi)(\xi'\xi'') &= -ih\int\Big\{\xi' \;\delta(\xi' - \xi''')\,.\,\delta'(\xi''' - \xi'') \\ &\qquad -\delta'(\xi' - \xi''')\,.\,\xi''' \;\delta(\xi''' - \xi'')\Big\}\; d\xi''' \\ &= -ih\int\Big\{\xi' \;\delta(\xi' - \xi''')\,.\,\delta'(\xi''' - \xi'') \\ &\qquad -\delta(\xi' - \xi''')\frac{\partial}{\partial\xi'''}[\xi'''\delta(\xi''' - \xi'')]\Big\}\; d\xi'''\,.\end{aligned}$$

که در جمله‌ی دوم انتگرال‌گیریِ جزء‌به‌جزء انجام داده‌ایم، و بنابراین

$$\begin{aligned}(\xi\eta - \eta\xi)(\xi'\xi'') &= -ih\int\Big\{(\xi' - \xi''') \;\delta(\xi' - \xi''') \;\delta'(\xi''' - \xi'') \\ &\qquad -\delta(\xi' - \xi''') \;\delta(\xi''' - \xi'')\Big\}\; d\xi'''\end{aligned}$$

جمله‌ی اول در انتگرال صفر می‌شود زیرا $0 = (\xi' - \xi''') \;\delta(\xi' - \xi''')$، و جمله‌ی دوم را می‌توان به کمکِ (2) محاسبه کرد. اکنون همان طور که لازم است، رابطه‌ی

$$(\xi\eta - \eta\xi)(\xi'\xi'') = ih\delta(\xi' - \xi''')$$

را به دست می‌آوریم.

البته با داشتنِ ξ_r ها، متغیرهای هم‌یوغِ آن‌ها به طورِ یکتا تعیین نمی‌شوند، زیرا اگر η_r ها هم‌یوغِ ξ_r ها باشند آن‌گاه وقتی F تابعِ دل‌خواهی از ξ_r باشد؛ متغیرهای

$$\eta_r^* = \eta_r + \partial \mathrm{F}/\partial \xi_r, \tag{9}$$

نیز هم‌یوغِ ξ_r خواهند بود. این به خاطرِ این حقیقت است که با معلوم بودنِ متغیرهای ξ_r، که ماتریس‌های قطری بوده و سطرها و ستون‌ها را نام‌گذاری می‌کنند، یک نمایشِ ماتریسیِ یکتا تعیین نمی‌شود، زیرا می‌توان هر سطرِ (ξ') را در هر تابعِ $f(\xi')$ از پارامترِ $\xi_r{}'$ ضرب کرد و ستونِ متناظر با آن را بر همان کمیت تقسیم کرد، زیرا این فرایند بر درستیِ هر معادله‌ی ماتریسی اثر ندارد و ماتریس‌های قطری را عوض نمی‌کند. ولی، این کار ماتریس‌های η_r را که در (8) تعریف شده‌اند عوض می‌کند، ماتریس‌های جدید به شکلِ

$$\begin{aligned}
\eta_r^*(\xi'\xi'') &= \eta_r(\xi'\xi'')\ \frac{f(\xi')}{f(\xi'')} = \eta_r(\xi'\xi'') + \eta_r(\xi'\xi'')\ \frac{f(\xi') - f(\xi'')}{f(\xi'')} \\
&= \eta_r(\xi'\xi'') + \frac{\eta_r(\xi'\xi'')}{f(\xi')}\ \sum_s \frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_s{}'}\ (\xi_s{}' - \xi_s{}'')\,.
\end{aligned}$$

خواهند بود. به جز جمله‌ی $s = r$، همه‌ی جملاتِ جمع وقتی در $\eta_r(\xi'\xi'')$ ضرب شوند صفر می‌شوند، زیرا وقتی $s \neq r$ باشد حاصلِ ضربِ جمله‌ی $(\xi_s{}' - \xi_s{}'')$ در $\delta(\xi_s{}' - \xi_s{}'')$ که درونِ $\eta_r(\xi'\xi'')$ نهفته است، صفر می‌شود. از سوی دیگر ضریبِ $(\xi_r{}' - \xi_r{}'')$ ی جمله‌ی $s = r$ در ضریبِ $\delta'(\xi_r{}' - \xi_r{}'')$ ی درونِ $\eta_r(\xi'\xi'')$ ضرب می‌شود و حاصل، با کمکِ معادله‌ی (3)، دقیقاً برابر است با $-\delta(\xi_r{}' - \xi_r{}'')$. پس در نهایت داریم

$$\begin{aligned}
\eta_r^*(\xi'\xi'') &= \eta_r(\xi'\xi'') + \frac{ih}{f(\xi')}\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_r{}'}\ \delta(\xi' - \xi'') \\
&= \eta_r(\xi'\xi'') + \frac{ih}{f(\xi)}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_r}\ (\xi'\xi''),
\end{aligned}$$

که اگر $F = ih \log f$ را اختیار کنیم با (9) سازگار خواهد بود.

در حالتِ با یک درجه‌ی آزادی، با کمکِ $(2'')$، به راحتی درمی‌یابیم که عناصرِ ماتریسیِ η^2 برابرند با

$$\eta^2(\xi'\xi'') = (-ih)^2\ \int \delta'(\xi' - \xi''')\ d\xi'''\ .\ \delta(\xi''' - \xi'') = (-ih)^2 \delta''(\xi' - \xi''),$$

و به طورِ کلی‌تر، با استقراء، درمی‌یابیم که

$$\eta^n(\xi'\xi'') = (-ih)^n \delta^{(n)}(\xi' - \xi'')\,.$$

بنابراین، اگر a یک عددِ c دل‌خواه باشد، عناصرِ ماتریسِ $e^{ia\eta}$ به کمکِ قضیه‌ی بسطِ تیلور[8] با

$$e^{ia\eta}(\xi'\xi'') = \Sigma \frac{1}{n!}\ (ia\eta)^n(\xi'\xi'') = \Sigma \frac{1}{n!}\ (ah)^n \delta^{(n)}(\xi' - \xi'') = \delta(\xi' - \xi'' + ah),$$

[8] کاربردِ قضیه‌ی تیلور در تابعِ $\delta(x)$ قانونی به نظر می‌آید، زیرا $\delta(x)$ را می‌توان به صورتِ حدِ یک دنباله از توابع در نظر گرفت که برای هر یک از آن‌ها قضیه‌ی تیلور برقرار است.

داده می‌شوند. پس، چنان که انتظار می‌رود، ماتریسِ $e^{ia\eta}$ تنها شاملِ عناصری است که به "انتقال‌هایی" اشاره دارند که در آن‌ها ξ به اندازه‌ی ah تغییر می‌کند. نتایجِ مشابهی برای هر تعداد درجاتِ آزادی برقرار است ولی نوشتنِ اثباتِ آن به این سادگی نیست.

§ 6. نظریه‌ی تبدیل.

اکنون تبدیلِ بینِ هر دو شکلِ ماتریسی، اصطلاحاً (ξ) و (α)، را در نظر می‌گیریم که کافی است در شرایطِ (i) و (ii) از بخشِ 3 صدق کنند. داریم

$$\eta_1(\xi'\xi'') = -ih\ \delta'({\xi_1}' - {\xi_1}'')\ .\ \delta'({\xi_2}' - {\xi_2}'')\ .\ .\ .\ \delta'({\xi_u}' - {\xi_u}''),$$

و بنابراین با کمکِ معادلاتِ (1) و $(1')$،

$$\eta_1(\xi'\alpha') = \int \eta_1(\xi'\xi'')\ d\xi''(\xi''/\alpha') = -ih\frac{\partial(\xi'/\alpha')}{\partial {\xi_1}'},$$

و به طورِ کلی

$$\eta_r(\xi'\alpha') = -ih\frac{\partial(\xi'/\alpha')}{\partial {\xi_r}'}\ .$$

دوباره داریم

$$\xi_r(\xi'\alpha') = \int {\xi_r}'\ \delta(\xi' - \xi'')\ d\xi''\ (\xi''/\alpha') = {\xi_r}'(\xi'/\alpha'),$$

و به طورِ کلی‌تر، اگر $f(\xi_r)$ هر تابعی از تنها ξ_r باشد

$$f(\xi_r)\ (\xi'\alpha') = \int f({\xi_r}')\ \delta(\xi' - \xi'')\ d\xi''\ (\xi''/\alpha') = f({\xi_r}')\ (\xi'/\alpha')\,.$$

اکنون نشان می‌دهیم که اگر $f(\xi_r, \eta_r)$ هر تابعی از ξ_r و هم‌یوغ‌های کانونی‌شان یعنی η_r تعریف‌شده در (8)، باشد که مقدارِ گویا و درستی از η_r باشد، آن‌گاه

$$f(\xi_r, \eta_r)(\xi'\alpha') = f\left({\xi_r}',\ -ih\frac{\partial}{\partial {\xi_r}'}\right)\ (\xi'/\alpha'), \tag{10}$$

به طوری که عناصرِ ماتریسِ f در تصویرِ $(\xi'\alpha')$ با یک عملگرِ خاص داده می‌شوود که بر تابعِ تبدیلِ (ξ'/α') اثر می‌کند. کافی است ثابت کنیم که اگر قضیه برای هر دو تابع، مثلاً f_1 و f_2، درست باشد، آن‌گاه برای مجموعِ آن‌ها $f_1 + f_2$ و حاصلِ ضربشان $f_1 f_2$ هم درست است. موردِ جمع بدیهی است. برای ضرب داریم

$$\begin{aligned} &f_1(\xi_r,\ \eta_r)\, f_2(\xi_r,\ \eta_r)\ (\xi'\alpha') \\ &= \iint f_1(\xi_r,\ \eta_r)\ (\xi'\alpha'')\ d\alpha''\,.(\alpha''/\xi'')\ d\xi'' \cdot f_2(\xi_r,\ \eta_r)\ (\xi''\alpha') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\iint f_1\left(\xi_r{}',\ -ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}'}\right)\ (\xi'/\alpha'')\ d\alpha''\,.\,(\alpha''/\xi'')\ d\xi''\,.\,f_2\left(\xi_r{}'',\ -ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}''}\right)\ (\xi''/\alpha')\\
=&f_1\left(\xi_r{}',\ -ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}'}\right)\iint(\xi'/\alpha'')\ d\alpha''\,.\,(\alpha''/\xi'')\ d\xi''\,.\,f_2\left(\xi_r{}'',\ -ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}''}\right)\ (\xi''/\alpha')\\
=&f_1\left(\xi_r{}',\ -ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}'}\right)\ f_2\left(\xi_r{}',\ -ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}'}\right)\ (\xi'/\alpha')
\end{aligned}
$$

که همان نتیجه‌ی موردِ انتظار است. به روشِ مشابه می‌توان نشان داد که

$$
f(\xi_r,\ \eta_r)\ (\alpha'\xi') = f\left(\xi_r{}',\ ih\frac{\partial}{\partial\xi_r{}'}\right)\ (\alpha'/\xi')\,. \tag{10'}
$$

فرمولِ (10) یک روشِ قوی برای به دست آوردنِ یک تصویرِ ماتریسی، برای تبدیلِ هر تابعِ معلوم از متغیرهای دینامیکی به یک ماتریسِ قطری، ارائه می‌دهد. برای مثال، فرض کنید که یک تابع از ξ ها و η ها، یعنی $\mathrm{F}(\xi_r,\eta_r)$، داریم و به دنبالِ یک شکلِ ماتریسی، مثلاً (α)، هستیم که F را تبدیل به ماتریسِ قطری کند، یعنی می‌خواهیم

$$
\mathrm{F}(\alpha'\alpha'') = \mathrm{F}(\alpha')\,.\,\delta(\alpha'-\alpha'')
$$

را داشته باشیم که $\mathrm{F}(\alpha')$ تابعی از مجموعه‌ی تک پارامتریِ α' است. فرمولِ (10) نشان می‌دهد که

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}\left(\xi_r,\ -ih\ \frac{\partial}{\partial\xi_r}\right)\ (\xi'/\alpha') = \mathrm{F}(\xi_r,\eta_r)\ (\xi'\alpha') &= \int(\xi'/\alpha'')\ d\alpha''\,.\,\mathrm{F}(\alpha''\alpha')\\
&= \mathrm{F}(\alpha')\ (\xi'/\alpha').
\end{aligned} \tag{11}
$$

این یک معادله دیفرانسیلِ معمولی برای (ξ'/α') است، اگر (ξ'/α') را تابعی از ξ' ها در نظر بگیریم، و پاسخ‌های مختلفِ آن با مقادیرِ متفاوتِ پارامترهای α' معلوم می‌شوند. آن‌گاه به سادگی می‌توانیم عناصرِ ماتریسیِ (α) را برای هر متغیرِ دینامیکِ $f(\xi_r,\eta_r)$ از رابطه‌ی

$$
f(\xi_r,\eta_r)\ (\alpha'\alpha'') = \int\int(\alpha'/\xi')\ d\xi'\cdot f\left(\xi_r{}',\ -ih\ \frac{\partial}{\partial\xi_r{}'}\right)\ (\xi'/\alpha'')\,.
$$

به دست آوریم. مقادیرِ مشخصه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل، که با $\mathrm{F}(\alpha')$ نشان داده می‌شوند، عناصرِ نمایشِ قطریِ ماتریسِ F اند.

اگر ξ ها و η ها را q ها و p های معمولیِ دستگاه در یک زمانِ مشخص و F را هامیلتونی بگیریم، آن‌گاه معادله‌ی (11) همان معادله‌ی موجِ شرودینگر است، و می‌توانیم از روشِ شرودینگر برای حلِ یک مسئله‌ی دینامیکی در نظریه‌ی کوانتومی استفاده کنیم. ویژه توابعِ معادله‌ی موجِ شرودینگر همان توابعِ تبدیل (یا عناصرِ ماتریسِ تبدیل که قبلاً با b نشان می‌دادیم) هستند که ما را قادر به تبدیلِ شکلِ (q) برای نمایشِ ماتریسی به یک شکلِ جدید می کند که هامیلتونی در آن یک ماتریسِ قطری است.

برای دستگاه‌هایی که در آن‌ها هامیلتونی صریحاً دارای زمان هستند، به طورِ کلی هیچ شکلِ ماتریسی وجود ندارد که H در آن یک ماتریسِ قطری باشد، زیرا هیچ مجموعه‌ای از ثوابتِ انتگرال وجود ندارد که صریحاً دارای زمان نباشد. در این موارد باید یک معادله‌ی موجِ کلی‌تر از معادله‌ی (11) پیدا کنیم. ابتدا نشان خواهیم داد که اگر $q_{r\tau}$ مقدارِ هر q_r در زمانِ $t=\tau$ باشد، و اگر α ها یک مجموعه از ثوابتِ انتگرال باشد که بتوان آن‌ها را به صورتِ توابعی از q ها، p ها و t در زمانِ دل‌خواهِ t نشان داد که دارای پارامترِ τ نباشند، آن‌گاه

$$\mathrm{H}(q_\tau{}'\alpha') = ih\frac{\partial}{\partial\tau}(q_\tau{}'/\alpha')\,.$$

این شرط که α' ها باید در آن صدق کنند، چنان است که

$$\frac{df}{d\tau}\ (\alpha'\alpha'') = \frac{\partial}{\partial\tau}\ \left[\ f(\alpha'\alpha'')\ \right],$$

که f هر تابعی از p_τ ها و q_τ ها است. به علاوه، اگر f صریحاً وابسته به τ نباشد، باید تساویِ $ih\ df/d\tau = f\mathrm{H}_\tau - \mathrm{H}_\tau f$ برقرار باشد، که در آن H_τ هامیلتونی در زمانِ τ را نشان می‌دهد. بنابراین

$$\begin{aligned}
(f\mathrm{H}_\tau - \mathrm{H}_\tau f)\ \ (\ \ q_\tau{}'\alpha') & \\
&= ih\frac{df}{d\tau}(q_\tau{}'\alpha') = ih\int(q_\tau{}'/\alpha'')\ d\alpha''\,.\,\frac{df}{d\tau}(\alpha''\alpha') \\
&= ih\frac{\partial}{\partial\tau}\int(q_\tau{}'/\alpha'')\ d\alpha''\,.\,f(\alpha''\alpha') - ih\int\frac{\partial}{\partial\tau}(q_\tau{}'/\alpha'')\,.\,d\alpha''\,.\,f(\alpha''\alpha') \\
&= ih\frac{\partial}{\partial\tau}\int f(q_\tau{}'q_\tau{}'')\ dq_\tau{}''\cdot(q_\tau{}''/\alpha') - ih\int\frac{\partial}{\partial\tau}(q_\tau{}'/\alpha'')\,.\,d\alpha''\,.\,f(\alpha''\alpha') \\
&= ih\int f(q_\tau{}'q_\tau{}'')\ dq_\tau{}''\,.\,\frac{\partial}{\partial\tau}(q_\tau{}''/\alpha') - ih\int\frac{\partial}{\partial\tau}(q_\tau{}'/\alpha'')\,.\,d\alpha''\,.\,f(\alpha''\alpha'),
\end{aligned}$$

زیرا، وقتی f بدونِ وابستگیِ صریح به τ تابعی از p_τ ها و q_τ ها است، $f(q_\tau{}'q_\tau{}'')$ باید مستقل از τ باشد. دوباره، رابطه‌ی زیر را داریم:

$$(f\mathrm{H}_\tau - \mathrm{H}_\tau f)(q_\tau{}'\alpha') = \int f(q_\tau{}'q_\tau{}'')\ dq_\tau{}''\,.\,\mathrm{H}_\tau(q_\tau{}''\alpha') - \int \mathrm{H}_\tau(q_\tau{}'\alpha'')\ d\alpha''\,.\,f(\alpha''\alpha')\,.$$

با مقایسه‌ی این دو عبارت برای $(f\mathrm{H}_\tau - \mathrm{H}_\tau f)(q_\tau{}'\alpha')$، ار آن‌جایی که این دو برای هر تابعِ f درست هستند، می‌بینیم که باید

$$\mathrm{H}_\tau(q_\tau{}'\alpha') = ih\ \partial(q_\tau{}'/\alpha')/\partial\tau\,.$$

اگر t را برای τ و q را برای q_τ به کار بریم، این رابطه به شکلِ

$$\mathrm{H}(q'\alpha') = ih\ \partial(q'/\alpha')/\partial t\,.$$

درمی‌آید که با فرمولی که قبلاً به دست آوردیم، یعنی

$$p_r(q'\alpha') = -ih\ \partial(q'/\alpha')/\partial q_r'\ .$$

قابلِ مقایسه است. اکنون داریم

$$H\Big(q_r,\ -ih\ \frac{\partial}{\partial q_r}\Big)(q'/\alpha') = H(q_r,\ p_r)(q'\alpha') = ih\ \frac{\partial}{\partial t}(q'/\alpha'), \tag{12}$$

که معادله‌ی موجِ شرودینگر برای هامیلتونی‌هایی است که وابستگیِ صریح به زمان دارند.

در مکانیکِ کلاسیک، می‌توان، معادلاتِ یک تبدیلِ نقطه‌ایِ پیوسته از یک مجموعه متغیرهای کانونیِ η_r، ξ_r به یک مجموعه‌ی α_r، β_r را به شکلِ ساده‌ی

$$\eta_r = \partial \mathrm{S}/\partial \xi_r, \qquad \beta_r = \partial \mathrm{S}/\partial \alpha_r, \tag{13}$$

درآورد که S می‌تواند هر تابعی از ξ ها و α ها باشد. جوردن [9] نشان داده است که می‌توان معادلاتِ تبدیل را در مکانیکِ کوانتومی هم به این شکل نوشت، مشروط به این که S به شکلِ

$$\mathrm{S} = \sum f(\xi_r)\ g(\alpha_r),$$

نوشته شود، یعنی، همه‌ی ξ ها در ضرب‌های درونِ S باید جلوی همه‌ی α ها قرار گیرند (درکِ این نکته لازم است که این ترتیب باید هنگامِ گرفتنِ مشتق‌های جزئی حفظ شود.) این نتیجه به راحتی از نظریه‌ی حاضر به دست می‌آید. داریم

$$\begin{aligned} f(\xi_r)\ g(\alpha_r)\ (\xi'\alpha') &= \int\int f(\xi_r)(\xi'\xi'')\ d\xi''\ (\xi''/\alpha'')\ d\alpha''\ .\, g(\alpha_r)(\alpha''\alpha') \\ &= \int\int f(\xi_r{}')\ \delta(\xi'-\xi'')\ d\xi''\ (\xi''/\alpha'')\ d\alpha''\ .\, g(\alpha_r)\ \delta(\alpha''-\alpha') \\ &= f(\xi_r{}')\ g(\alpha_r{}')\,.\,(\xi'/\alpha') \end{aligned}$$

و بنابراین برای هر مجموعه از توابعِ $f(\xi_r)$ و $g(\alpha_r)$ داریم

$$\sum f(\xi_r)\ g(\alpha_r)\ (\xi'\alpha') = \sum f(\xi_r{}')\ g(\alpha_r{}')\,.\,(\xi'/\alpha') \tag{14}$$

جاگذاریِ زیر را انجام می‌دهیم

$$(\xi'/\alpha') = \exp.\ i\mathrm{S}/h,$$

و فرض می‌کنیم که S به شکلِ $\sum\ f(\xi')\ g(\alpha')$ نوشته شود. اکنون از (14) داریم

[9] Jordan, ‘Z. f. Physik’, vol. 38, p. 513 (1926).

$$\eta_r(\xi'\alpha') = -ih\ \frac{\partial}{\partial \xi_r{}'}(\xi'/\alpha') = \frac{\partial \mathrm{S}(\xi',\ \alpha')}{\partial \xi_r{}'} \cdot (\xi'/\alpha') = \frac{\partial \mathrm{S}(\xi,\ \alpha)}{\partial \xi_r}(\xi'\alpha')$$

که مشروط به آن است که $\partial \mathrm{S}\ (\xi,\ \alpha)/\partial \xi_r$ هم به شکلِ $\sum\ f(\xi)\ g(\alpha)$ نوشته شود. به طورِ مشابه می‌توان نشان داد که

$$\beta_r(\xi'\alpha') = \frac{\partial \mathrm{S}(\xi,\ \alpha)}{\partial \alpha_r}(\xi'\alpha')$$

این‌ها همان معادلاتِ (13) هستند که به صورتِ روابطِ بینِ عناصرِ ماتریسی نوشته شده‌اند.

§ 6. تعبیرِ فیزیکیِ ماتریس‌ها.

برای به دست آوردنِ نتایجِ فیزیکی از نظریه‌ی ماتریسی، تنها باید فرض کنیم که عناصرِ قطریِ یک ماتریس، که [شماره] سطرها و ستون‌هایش مثلاً به ξ ها اشاره دارد، یک ثابتِ انتگرال‌گیریِ مثلِ g یِ دستگاهِ دینامیکی را نماینده‌گی می‌کند، و مقادیرِ میان‌گینِ تابعِ $g(\xi_r, \eta_r)$ روی همه‌ی فضای η را برای هر مجموعه‌ی مشخص از مقادیرِ عددیِ ξ ها را، به همان روشی که در حالتِ حدیِ اعدادِ کوانتومیِ بزرگ انجام می‌دهد، تعیین می‌کند. پس اگر

$$g(\xi'\xi'') = g(\xi')\,.\,\delta(\xi' - \xi'')$$

وقتی ξ'' ها تقریباً برابرِ ξ' ها هستند، فرض می‌کنیم که $g(\xi')$ مقدارِ میان‌گینِ g روی همه‌ی فضای η در حالتِ $\xi_r = \xi_r{}'$ باشد. در حالتی که عناصرِ قطریِ ماتریسِ g (بدونِ نیاز به حذفِ ضریبِ $(\delta(\xi' - \xi'')$ متناهی هستند، فرضِ مربوطه این خواهد بود که عنصرِ قطریِ $g(\xi'\xi')$ با حاصلِ ضربِ $(2\pi h)^{-1}$ در انتگرالِ $g(\xi_r, \eta_r)$ روی همه‌ی فضای η در حالتِ $\xi_r = \xi_r{}'$ برابر باشد.

البته، این فرض ما را قادر می‌کند که متوسطِ η ئی برای هر تابعِ g را هم تعیین کنیم، و به علاوه، اگر g_1، g_2، ... g_u یک مجموعه از g ها باشند که با یک‌دیگر جابه‌جا می‌شوند و توابعِ مستقلی از ξ ها و η ها باشند، می‌توانیم متوسطِ η ئیِ هر تابعی از این g ها را تعیین کنیم. (g ها باید جابه‌جا شوند، زیرا اگر چنین نباشد ما، برای مثال، در می‌یابیم که متوسطِ η ئیِ g_1g_2 با میان‌گینِ g_2g_1 متفاوت است، و نمی‌توانیم تعبیرِ فیزیکی برای این میان‌گین‌ها پیدا کنیم.) این اطلاع همه‌ی آن چیزی است که امیدواریم بتوانیم در موردِ g ها به صورتِ توابعی از η ها برای مقادیرِ عددیِ معلومِ ξ ها به دست آوریم.

همه‌ی این اطلاعات با هم جمع می‌شود اگر بتوانیم کسری از همه‌ی فضای η (یا وقتی این کسر صفر است، حجمِ کلِ فضای η) را به دست آوریم که در آن g_r بینِ هر دو مقدارِ عددیِ معلوم قرار

می‌گیرد، مثلاً کسری از حجم که در آن $g_r' < g_r < g_r''$. برای این کار باید ماتریسی را بیابیم که نماینده‌ی، مثلاً به طورِ خلاصه،

$$\delta(g_1 - g_1') \,.\, \delta(g_2 - g_2') \;\ldots\; \delta(g_u - g_u') = \delta(g - g'),$$

باشد. آن‌گاه اگر از این ماتریس نسبت به پارامترهای g' انتگرال بگیریم، نتیجه، یعنی

$$\int_{g'}^{g''} \delta(g - g')\ dg',$$

ماتریسی خواهد بود که نشان‌دهنده‌ی تابعی از g ها است که وقتی $g_r' < g_r < g_r''$، برابر با یک باشد، و در غیرِ این صورت صفر شود. پس عناصرِ قطریِ این ماتریسِ میان‌گینِ η ئیِ این تابع را به دست می‌دهد، که دقیقاً برابر با کسری از فضای η است که در آن $g_r' < g_r < g_r''$ (یا در غیرِ این صورت، آن‌ها انتگرالِ این تابع روی کلِ فضای η را می‌دهد، که دقیقاً برابر با حجمِ کلِ فضای η است که در آن $g_r' < g_r < g_r''$).

ماتریسِ $\delta(g - g')$ باید، به ازای هر r، در شرایطِ [10]

$$(g_r - g_r') \cdot \delta(g - g') = \delta(g - g') \cdot (g_r - g_r') = 0$$

صدق کند و

$$\int \delta(g - g')\ dg' = 1\,.$$

به سادگی ثابت می‌شود که ماتریسِ با عناصرِ

$$\delta(g - g')(\xi'\xi'') = (\xi'/g')\,.\,(g'/\xi'')$$

این شرایط را برآورده می‌کند. واضح است که شرطِ آخر به خاطرِ خصوصیاتِ تعامد و بهنجار بودنِ توابعِ (ξ'/g') و (g'/ξ'') برقرار است، در حالی که برای اثباتِ بقیه‌ی شرایط داریم

$$\begin{aligned} g_r\ \delta(g - g')(\xi'\xi'') &= \int g_r(\xi'\xi''')\ d\xi'''\,.\,(\xi'''/g')\ (g'/\xi'') = g_r(\xi'g')\,.\,(g'/\xi'') \\ &= g_r'\,.\,(\xi'/g')\,.\,(g'/\xi'') = g_r'\ \delta(g - g')\ (\xi'\xi''), \end{aligned}$$

و به طورِ مشابه

$$\delta(g - g')\ g_r(\xi'\xi'') = g_r'\ \delta(g - g')\ (\xi'\xi'')\,.$$

اکنون حجمِ فضای η که در آن برای $\xi_r = \xi_r'$، g ها بینِ مقادیرِ عدديِ معلومشان قرار دارند، با

$$\int_{g'}^{g''} (\xi'/g')\ dg'\ (g'/\xi')\,.$$

---

[10] وقتی در یک فرمول g_r' مثلِ یک ماتریس به کار می‌رود بدین معنی است که ماتریسِ قطری، با عناصرِ $g_r'(\xi'\xi'') = g_r'(\xi' - \xi'')$، است که نماینده‌ی c ـ عددِ g_r' است.

داده می‌شود.

بلافاصله می‌بینیم که این حجم صفر می‌شود مگر آن که بازه‌ی انتگرال‌گیریِ هر g_r دارای یک مقدارِ مشخصه از آن g_r باشد [یعنی، مقداری که به صورتِ یک عنصرِ قطری از ماتریسِ نماینده‌ی g_r در شکلِ g ی نمایشِ ماتریسی ظاهر می‌شود]، زیرا در غیرِ این صورت توابعِ تبدیلِ (ξ'/g') و (g'/ξ') در طولِ بازه‌ی انتگرال‌گیری صفر می‌شوند. این نشان می‌دهد که مقادیرِ مشخصه‌ی هر ثابتِ انتگرال‌گیریِ g مقادیری (کوانتیده یا غیره) هستند که این عددِ q عملاً می‌تواند بپذیرد. (به خصوص، مقادیرِ مشخصه‌ی H سطوحِ انرژیِ دستگاه هستند.) تقارنِ بینِ ξ' و g' در عنصرِ قطریِ (ξ')، یعنی $(\xi'/g')(g'/\xi')$، در ماتریسِ $\delta(g-g')$ ما را قادر به فرمول‌بندیِ یک قضیه‌ی دوجانبه از دینامیکِ کوانتومی می‌کند، که تنها در موردی کاربرد دارد که توابعِ تبدیلِ (ξ'/g') و (g'/ξ') توابعِ پیوسته از ${\xi_r}'$ و ${g_r}'$ هستند (که لازم می‌دارد که مقادیرِ مشخصه‌ی ξ_r و g_r می‌توانند بازه‌های پیوسته‌ای از مقادیر را بگیرند) این قضیه چنین است:— حجمِ فضای η که در آن $\xi_r = {\xi_r}'$ و ${g_r}' < g_r < {g_r}' + \varepsilon$ برقرار باشد، برابر است با حجمِ فضای متغیرهای هم‌یوغِ کانونیِ g ها که در آن $g_r = {g_r}'$ و ${\xi_r}' < \xi_r < {\xi_r}' + \varepsilon$، که ε_r ها عددهایِ c یِ کوچکِ مثبت هستند. در حقیقت، هر یک از فضاها دقیقاً برابر با $\varepsilon\ (\xi'/g')(g'/\xi')$ است، که ε حاصلِ ضربِ همه‌ی ε_r ها است.

§ 8. مقایسه با روش‌های قبلی.

اکنون نشان می‌دهیم که روشِ فعلی برای به دست آوردنِ نتایجِ فیزیکی از نظریه‌ی ماتریسی با فرض‌های پیشین مبنی بر این که مربعِ دامنه‌ی تابعِ موج در مواردِ خاص احتمال را تعیین می‌کند، سازگار است. یک سیستمِ دینامیکی را در نظر بگیرید که، هامیلتونیِ آن تا وقتی مختل نشده است به زمان بستگیِ صریح ندارد، و وقتی به آن اختلال وارد می‌شود یک جمله‌ی اضافی با بستگیِ صریح به زمان در هامیلتونیِ آن ظاهر می‌شود. طبقِ روشِ قبلی برای یافتنِ احتمال‌های انتقالِ ناشی از اختلال، باید ابتدا ویژه توابعِ دستگاهِ غیرِ اختلالی، یعنی $\psi_0(\alpha')$، پیدا شوند، (α ها ثوابتِ انتگرالِ دستگاهِ غیرِ اختلالی هستند)، و سپس ویژه‌توابعی که در معادله‌ی موجِ دستگاهِ اختلالی صدق می‌کنند و دارای مقادیرِ اولیه‌ی $\psi_0(\alpha')$ هستند، یعنی $\psi_t(\alpha')$ ها، را بیابیم. آن‌گاه باید ψ_t ها را بر حسبِ ψ_0 ها بسط دهیم، پس

$$\psi_t(\alpha') = \int \psi_0(\alpha'')\, d\alpha''\ c(\alpha''\alpha'), \tag{15}$$

که در این جا ضرایبِ $c(\alpha''\alpha')$ تنها توابعی از زمان هستند. سپس برای اتمی که در ابتدا در حالتِ (α') بوده، فرض می‌شود که در زمانِ t عبارتِ $|c(\alpha''\alpha')|^2 d\alpha''$ احتمالِ حضورِ آن اتم در حالتی باشد که هر

α_r در آن حالت بینِ $\alpha_r{}''$ و $\alpha_r{}'' + d\alpha_r{}''$ قرار گیرد.

برای تعیینِ این احتمال به کمکِ روشِ کلیِ این مقاله، باید توابعِ تبدیلِ $(\alpha_t{}'/\alpha_0{}')$ و $(\alpha_0{}'/\alpha_t{}')$ را بیابیم که مقادیرِ α_t از متغیرهای α در زمانِ t را (که فرض می‌شود توابعی از p و q های مستقل از زمان هستند) به مقادیرِ اولیه‌ی α_0 یشان ارتباط دهند، اگر t را یک زمانِ معلوم در نظر بگیریم هر دوی α_t ها و α_0 ها ثوابتِ انتگرالِ دستگاهِ اختلالی هستند. احتمالِ موردِ نظر عبارت خواهد بود از

$$(\alpha_0{}'/\alpha_t{}')\ d\alpha_t{}'\ (\alpha_t{}'/\alpha_0{}') = |(\alpha_t{}'/\alpha_0{}')|^2\ d\alpha_t{}'$$

اگر $(\alpha_0{}'/\alpha_t{}')$ و $(\alpha_t{}'/\alpha_0{}')$ هم‌یوغِ موهومی باشند، که اگر شکل‌های (α_t) و (α_0) ی نمایشِ ماتریسی در شرطِ (iv) از بخشِ 3 صدق کنند، این‌گونه است. اگر مقدارِ هر مختصه‌ی q در زمانِ مشخصِ t را با q_t نشان دهیم، داریم

$$(q_t{}'/\alpha_0{}') = \int (q_t{}'/\alpha_t{}')\ d\alpha_t{}'\ (\alpha_t{}'/\alpha_0{}')\,. \tag{15'}$$

حالا $(q_t{}'/\alpha_0{}')$ ویژه تابعی است که معادله‌ی موجِ اختلالی [به شکلِ (12)] را ارضا می‌کند، و وابستگیِ $(q_t{}'/\alpha_t{}')$، که تنها به روابطِ تحلیلی بینِ α ها با p ها و q ها بستگی دارد، به $q_t{}'$ ها و $\alpha_t{}'$ ها همان وابستگیِ $(q_0{}'/\alpha_0{}')$ به $q_0{}'$ ها (q های اولیه) و $\alpha_0{}'$ ها است، و بنابراین یک ویژه‌تابعِ سیستمِ غیرِ اختلالی است که بر حسبِ متغیرهای $q_t{}'$ و $\alpha_t{}'$ نوشته شده است. بنابراین معادله‌ی $(15')$ همان معادله‌ی (15) است، و توابعِ تبدیلِ $(\alpha_t{}'/\alpha_0{}')$ همان ضرایبِ معادله‌ی (15) هستند [که در واقع باید بر حسبِ $c(\alpha_t{}''\alpha_0{}')$ نوشته می‌شد]. بنابراین روشِ کلیِ حاضر نتایجی مشابهِ نتایجِ فرض‌های قبلی دارد.

اکنون موردِ برخوردهای بینِ، مثلاً، یک الکترون و یک سیستمِ اتمی را در نظر بگیرید. در روشِ حلِ مسئله‌ی بورن یک جوابِ معادله‌ی موجِ شرودینگر می‌یابیم که شاملِ موج‌های تختِ ورودی به نشانه‌ی الکترونِ نزدیک شونده است، که در آن موج‌ها از سیستمِ اتمی پراکنده می‌شوند. آن‌گاه فرض می‌کنیم که مربعِ دامنه‌ی موجِ پراکنده در هر جهت احتمالِ پراکندگیِ الکترون (با انرژی‌ای که از بسامدِ موج معلوم می‌شود) در آن جهت را تعیین می‌کند.

برای تعیینِ این احتمال با روشِ حاضر، باید تابعِ تبدیلِ $(p_{\mathrm{F}}{}'/p_{\mathrm{I}}{}')$ را بیابیم که مولفه‌های نهاییِ تکانه‌ی الکترون، p_{F}، را به مولفه‌های اولیه‌ی p_{I} ربط دهد. سپس احتمالِ پراکندگیِ الکترون با تکانه‌ای در بازه‌ی $dp_{\mathrm{F}}{}'$ برابرِ $(p_{\mathrm{I}}{}'/p_{\mathrm{F}}{}')\ dp_{\mathrm{F}}{}'(p_{\mathrm{F}}{}'/p_{\mathrm{I}}{}') = \left|(p_{\mathrm{F}}{}'/p_{\mathrm{I}}{}')\right|^2 dp_{\mathrm{F}}{}'$ خواهد بود. اگر مختصاتِ الکترون در زمانِ t برابر با x_t[11]، داریم

[11] البته می‌دانیم که اعدادِ q یِ x_t علاوه بر مختصاتِ x_t ی الکترونِ ورودی، شاملِ مختصاتِ سیستمِ اتمی، که صریحاً به آن اشاره نمی‌شود هم هست. به همین ترتیب p_{I} و p_{F} باید شاملِ متغیرهایی برای تعیینِ حالاتِ پایای سیستمِ اتمی باشد.

$$\left(x_t{}'/p_{\mathrm{I}}{}'\right) = \int (x_t{}'/p_{\mathrm{F}}{}')\ dp_{\mathrm{F}}{}'\ (p_{\mathrm{F}}{}'/p_{\mathrm{I}}{}')\,. \tag{16}$$

در این جا تابعِ تبدیلِ $(x_t{}'/p_{\mathrm{I}}{}')$ حلِ معادله‌ی موجِ شرودینگر متناسب با حالتِ یک الکترونِ فرودی با تکانه‌ی $p_{\mathrm{I}}{}'$، و بنابراین تابعِ موجِ نظریه‌ی بورن است. از سوی دیگر، تابعِ $(x_t{}'/p_{\mathrm{F}}{}')$ نشان‌دهنده‌ی امواجِ گسیلیِ مربوط به الکترون‌هایی با تکانه‌ی $p_{\mathrm{F}}{}'$ است (و هم چنین امواجِ ورودی که لزومی به احتسابِ آن‌ها نیست). پس معادله‌ی (16) تجزیه‌ی امواجِ خروجیِ ویژه‌تابعِ $(x_t{}'/p_{\mathrm{F}}{}')$ به مولفه‌های مختلفِ‌شان را می‌دهد، به طوری که دامنه‌های مولفه‌های مختلف با $\left|(p_{\mathrm{F}}{}'/p_{\mathrm{I}}{}')\right|$ برابر است. پس روشِ حاضر با نظریه‌ی بورن سازگار است.

اگر این مسائل را از نقطه نظرِ ماتریسی بنگریم، دیده می‌شود که باید بتوان متغیرهای دینامیکی را به طورِ معادل با ماتریس‌هایی که سطرها و ستون‌هایشان نشان‌گرِ مقادیرِ اولیه‌ی متغیرهای کنش (α_0 یا p_{I}، در هر دو مورد) یا مقادیرِ نهاییِ آن‌ها (α_t یا p_{F}) هستند نشان داد، و ضرایبی که ما را قادر به تبدیل از یک مجموعه ماتریس به مجموعه‌ای دیگر می‌کند همان‌هایی هستند که احتمال‌های انتقال را تعیین می‌کنند.

در پایان می‌توان به این نکته اشاره کرد که نظریه‌ی حاضر یک دیدگاه برای در نظر گرفتنِ پدیده‌های کوانتومی ارائه می‌دهد که با نظریه‌های معمولی نسبتاً متفاوت است. می‌توان فرض کرد که حالتِ اولیه‌ی یک سیستم به طورِ دقیق حالتِ سیستم در هر زمانِ پس از آن را تعیین می‌کند. اما، اگر حالتِ سیستم در یک زمانِ دل‌خواه را با معلوم کردنِ مقادیرِ عددی برای مختصات و تکانه‌ها توصیف کنیم، آن‌گاه عملاً نمی‌توان یک ارتباطِ یک‌به‌یک بینِ مقادیرِ این مختصات و تکانه‌های اولیه با مقادیرِ آن‌ها در یک زمانِ بعد بنا کرد. با این حال می‌توان اطلاعاتِ خوبی (از طبیعتِ میان‌گین‌ها) درباره‌ی این مقادیر در زمان‌های بعدی به صورتِ توابعی از مقادیرِ اولیه به دست آورد. نظریه‌ی احتمالات در توصیفِ نهاییِ فرایندهای مکانیک وارد نمی‌شود؛ تنها وقتی که اطلاعاتی مبنی بر یک احتمال داشته باشیم (یعنی این که همه‌ی نقاطِ فضای η برای نمایشِ سیستم به یک اندازه محتمل هستند)، می‌توانیم نتایجی مبنی بر احتمالات به دست آوریم.

یادداشتِ مترجم:

۱) اولین انتگرالِ $\delta(x)$ در متنِ اصلی به شکلِ $\int_{-\infty}^{\infty} x\ \delta(x) = 1$ آمده که قطعاً اشتباهِ چاپی است.

۲) در مقاله از ابتدا دو نوع عدد معرفی شده،

- اعدادِ نوعِ c، که عددهایِ معمولیِ جابه‌جاپذیر هستند. به نظر می‌رسد حرفِ c از اولِ classic یا classical گرفته شده است.

- اعدادِ نوعِ q، که عددهایِ نظریه‌ی کوانتومی هستند و می‌دانیم لزوماً جابه‌جا نمی‌شوند. به نظر می‌رسد حرفِ q از اولِ quantum گرفته شده است.

۳) در مقاله وقتی می‌گوید b و b^{-1} هم‌یوغِ موهومیِ هم هستند یعنی چیزی که ما امروزه می‌گوییم مزدوجِ مختلط.

فکر کنم نخستین بار ی که در باره ی ِ تابع ِ [دلتا ی ِ] دیراک چیز ی شنیدم در سال ِ دوّم ِ ENS بود[1]. یاد م می‌آید با هم‌راهی ی ِ دوست َ م مَرو[2]درس ی گرفته بودم که کاملاً حال ِ مان را به هم می‌زد، امّا آخر آن فرمول‌ها از نظر ریاضی آن قدر احمقانه بودند که اصلاً نمی‌شد پذیرفت ِ شان. حتّا به نظر نمی‌رسید که بشود یک جور ی توجیه ِ شان کرد. این ایده‌ها مال ِ 1935 بود، و در 1944، یعنی نه سال بعد، من توزیع‌ها را کشف کردم. ایده‌ها ی ِ اوّلیه هم‌راه ِ من مانده بودند، و بخش ی از پس‌زمینه ی ِ ذهن ِ من شده بودند و آن شب ی که توزیع‌ها را، در نوامبر ِ 1944 کشف کردم منفجر شدند. از کل ِ داستان دستِ‌کم این را می‌شود نتیجه گرفت: این چیز ِ خوب ی است که فیزیک‌پیشه‌ها ی ِ نظری برا ی ِ پیش‌بردن ِ نظریه‌ها شان منتظر ِ توجیه ِ ریاضی نمی‌شوند.

Laurent Schwartz, *A Mathematician Grappling with His Century*, Birkhäuser, 2001, p. 218

[1]ENS = Echole Normale Supérieure, [2]Raymond Marrot,