گاما، شماره ی ِ ۱۴، بهار ِ ۱۳۸۶

یون‌ها یِ هیدروژن‌گونه، و اسپینورها یِ کروی [1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-022 (2004/02/21)

معادله یِ دیرَک [a] بر حسب ِ اسپینورها یِ کروی نوشته می‌شود. برا یِ پتانسیل‌ها یِ کروی‌متقارن، بخش‌ها یِ زاویه‌ای و شعاعی یِ اسپینور از هم جدا می‌شوند و از آن‌جا، بخش ی از طیف ِ یون‌ها یِ هیدروژن‌گونه که متناظر با حالت‌ها یِ مقید است محاسبه می‌شود.

1 مقدمه

معادله یِ دیرَک [a] تقریب ی برا یِ توصیف ِ ذره‌ها یِ با اسپین ِ (1/2) در یک میدان ِ خارجی است. این تقریب آثار ِ نسبیتی را در بر دارد، اما تصحیح‌ها یِ تابشی را نَه. از جمله، با حل ِ معادله یِ دیرَک [a] برا یِ پتانسیل ِ مرکزی یِ متناسب با وارون ِ فاصله، می‌شود طیف ِ یون‌ها یِ هیدروژن‌گونه را (صرفِ‌نظر از تصحیح‌ها یِ تابشی) به دست آورد. برا یِ حل ِ معادله یِ دیرَک [a] در پتانسیل‌ها یِ مرکزی، معمولاً خود ِ اسپینور را به شکل ِ دِکَرتی نگه می‌دارند اما معادله را بر حسب ِ مختصات ِ کروی می‌نویسند. سپس بخش‌ها یِ زاویه‌ای و شعاعی را از هم جدا می‌کنند و دو معادله یِ دیفرانسیل ِ عادی یِ جفت‌شده یِ از مرتبه یِ یک به دست می‌آورند، که متغیر ِشان شعاع است. (این معادله‌ها برا یِ ویژه‌بردارها یِ انرژی اند.) برا یِ پتانسیل ِ متناسب با وارون ِ فاصله، می‌شود این معادله‌ها را حل کرد و طیف ِ انرژی را به دست آورد. این کار ی است، که در مثلاً [1] انجام شده است.

در این‌جا هدف آن است که معادله یِ دیرَک [a] از ابتدا در مختصات ِ کروی نوشته شود، یعنی نَه تنها اسپینور تابع ِ مختصات ِ کروی باشد، بل که هم‌وستارها یِ اسپینوری یِ مختصات ِ کروی هم در معادله وارد شوند. معلوم می‌شود اسپینورها یِ کروی یی که در این معادله ظاهر می‌شوند، با یک

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-022.pdf

تبدیل ِ لُرِنتس [b]ِ موضعی به اسپینورها یِ دِکَرتی مربوط اند. (اسپینورها یِ دِکَرتی آن‌ها یی اند که در معادله یِ دیرَک [a]ِ بدون ِ هم‌وستار ظاهر می‌شوند).

در ادامه، بخش‌ها یِ زاویه‌ای و شعاعی یِ اسپینورها یِ کروی از هم جدا می‌شوند و برا یِ پتانسیل‌ها یِ متناسب با وارون ِ فاصله، طیف ِ سیستم به دست می‌آید. طبعاً این طیف همان ی است که از معادله یِ دِکَرتی به دست می‌آید.

در سراسر ِ این نوشته در واحدها یی کار می‌کنیم که c (سرعت ِ نور) و $\hbar$ (ثابت ِ پْلانک [c] تقسیم بر 2π) یک اند، مگر صریحاً خلاف ِ آن گفته شود.

2 معادله یِ دیرَک در مختصات ِ (یا فضازمان‌ها یِ) ناتخت

معادله یِ دیرَک [a] برا یِ یک ذره یِ آزاد، عبارت است از

$$[\gamma^a(\partial_a+\Gamma_a)-\mu]\psi=0. \tag{1}$$

ψ اسپینور ِ دیرَک [a]، و μ جرم ِ ذره (عکس ِ طولِ‌موج ِ کامپتِن [d]ِ ذره) است. γ^a ها ماتریس‌ها یی ثابت اند، که تعداد ِشان برابر ِ بعد ِ فضازمان است و رابطه یِ جبر ِ کْلیفُرد [e] را بر می‌آورند:

$$\{\gamma^a,\gamma^b\}=\eta^{a\,b}. \tag{2}$$

ماتریس ِ η با شاخص ِ بالا وارون ِ ماتریس ِ η با شاخص ِ پایین است:

$$\eta^{a\,b}\,\eta_{b\,c}=\delta^a_c, \tag{3}$$

و $\eta_{a\,b}$ ها مئلفه‌ها یِ متریک در یک پایه یِ راست‌هنجار ِ فضا یِ مماس اند. این پایه را با $\{e_a\mid a\}$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\eta_{a\,b}&=e_a\cdot e_b,\\ \{\eta_{a\,b}\}&=\mathrm{diag}(-1,1,1,1).\end{aligned} \tag{4}$$

(این برا یِ فضازمان ِ $(3+1)$ بعدی است. برا یِ فضازمان ِ $(q+p)$ بعدی، تعداد ِ (-1) ها q و تعداد ِ $(+1)$ ها p است.) با η شاخص‌ها را بالا و پایین می‌بریم.

∂_a مشتق ِ سویی در راستا یِ e_a است. Γ_a ها هم هم‌وستارها یِ اسپینوری اند. برا یِ فضازمان ی با هم‌وستار ِ لِوی‌چیویتا [f]، Γ_a ها چنین محاسبه می‌شوند. پایه یِ دوگان ِ $\{e_a\mid a\}$ را $\{e^a\mid a\}$ می‌گیریم:

$$e^a(e_b) = \delta^a_b. \tag{5}$$

تک‌فرم‌ها یِ دیفرانسیل ـِ ${\Gamma^a}_b$ را چنان می‌گیریم که

$$\mathrm{d}e^a + {\Gamma^a}_b \wedge e^b = 0, \tag{6}$$

و

$$\Gamma_{a\,b} + \Gamma_{b\,a} = 0. \tag{7}$$

(این‌ها را می‌شود در مثلاً [2] یافت.) داریم

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\,{\Gamma^b}_a{}^c\,\sigma_{c\,b}, \tag{8}$$

که

$${\Gamma^b}_c =: {\Gamma^b}_{a\,c}\,e^a, \tag{9}$$

و ماتریس‌ها یِ $\sigma_{a\,b}$ مولدها یِ تبدیل ـِ لُرِنتس [b] برا یِ اسپینورها یند:

$$\sigma_{a\,b} := -\frac{1}{4}\,[\gamma_a, \gamma_b]. \tag{10}$$

این را می‌شود در مثلاً [3] یافت. $\sigma_{a\,b}$ ها این ویژه‌گی را دارند که اگر Λ ماتریس ـِ یک تبدیل ـِ لُرِنتس [b] با

$$\Lambda = \exp(\Xi) \tag{11}$$

باشد، که

$$\Xi^{a\,b} + \Xi^{b\,a} = 0, \tag{12}$$

و

$$S(\Lambda) := \exp\left(\frac{1}{2}\,\Xi^{a\,b}\,\sigma_{b\,a}\right), \tag{13}$$

آن‌گاه،

$$\gamma^a\,[S(\Lambda)] = [S(\Lambda)]\,\gamma^b\,{\Lambda^a}_b. \tag{14}$$

با استفاده از این و از رو یِ تعریف ـِ هم‌وستارها یِ اسپینوری، می‌شود نشان داد اگر ψ معادله یِ (1) را بر آورد، آن‌گاه

$$[\gamma^a(\partial_{a'}+\Gamma'_{a'})-\mu]\psi'=0, \tag{15}$$

که

$$\psi' := [S^{-1}(\Lambda)]\,\psi. \tag{16}$$

و $\partial_{a'}$ و $\Gamma'_{a'}$ مشتق ِ سویی و هم‌وستارِاِسپینوری یی اند که با پایه یِ راست‌هنجار ِ $\{e'_a \mid a\}$ تعریف می‌شوند:

$$e'_a =: \Lambda^b{}_a\, e_b, \tag{17}$$

و

$$\Gamma'_{a'} = \frac{1}{2}\,\Gamma'^{b'}{}_{a'}{}^{c'}\,\sigma_{c\,b}, \tag{18}$$

برا یِ اثبات ِ هم‌ارزی یِ (15) با (1)، داریم

$$\begin{aligned}[S(\Lambda)]\,\gamma^a\,(\partial_{a'}+\Gamma'_{a'})\,[S^{-1}(\Lambda)] &= (\Lambda^{-1})^a{}_b\,\gamma^b\,[S(\Lambda)]\,(\partial_{a'}+\Gamma'_{a'})\,[S^{-1}(\Lambda)],\\ &= \gamma^b\,[S(\Lambda)]\,(\partial_b+\Gamma'_b)\,[S^{-1}(\Lambda)].\end{aligned} \tag{19}$$

داریم

$$\Lambda^a{}_c\,(\Lambda^{-1})^d{}_b\,\Gamma'^{c'}{}_{d'}+\Lambda^a{}_c\,\mathrm{d}(\Lambda^{-1})^c{}_b=\Gamma^a{}_b. \tag{20}$$

این را می‌شود مثلاً از (6) و مانسته اَش برا یِ Γ':

$$\mathrm{d}e^{a'}+\Gamma'^{a'}{}_{b'}\wedge e^{b'}=0, \tag{21}$$

و نیز (7) و مانسته اَش برا یِ Γ'، و سرانجام (17) به دست آورد. با استفاده از (10) و (14)،

$$\sigma_{a\,b}\,[S(\Lambda)] = [S(\Lambda)]\,\sigma_{c\,d}\,\Lambda_a{}^c\,\Lambda_b{}^d. \tag{22}$$

از این رابطه و (20)، نتیجه می‌شود

$$[S(\Lambda)]\,\Gamma'\,[S^{-1}(\Lambda)]+\frac{1}{2}\,\Lambda^d{}_e\,\mathrm{d}(\Lambda^{-1})^{e\,c}\,\sigma_{c\,d}=\Gamma. \tag{23}$$

در رسیدن به این رابطه، از تعامد ِ ماتریس ِ Λ نسبت به η هم استفاده شده:

$$\Lambda^a{}_b\,\Lambda_{c\,b}=\delta^a_c. \tag{24}$$

سرانجام،

$$[S(\Lambda)]\,\mathrm{d}[S^{-1}(\Lambda)]=\frac{1}{2}\,\Lambda^d{}_e\,\mathrm{d}(\Lambda^{-1})^{e\,c}\,\sigma_{c\,d}. \tag{25}$$

اثبات ِ این رابطه برا یِ Λ نزدیک به همانی، به‌ساده‌گی از (11) و (13) نتیجه می‌شود. برا یِ Λ ها یِ دل‌بخواه هم، کافی است همین حکم برا یِ Λ ها یِ نزدیک به همانی، و نیز ویژه‌گی یِ هم‌ریختی یِ S:

$$[S(\Lambda)]\,[S(\Lambda')]=S(\Lambda\,\Lambda'), \tag{26}$$

را به کار ببریم. از (23) و (25) نتیجه می‌شود

$$[S(\Lambda)](\mathrm{d}+\Gamma')[S^{-1}(\Lambda)]=\mathrm{d}+\Gamma, \tag{27}$$

که نشان می‌دهد (15) با (1) هم‌ارز است.

3 اسپینورها یِ کروی

یک فضا یِ مینکُوْسکی [f] یِ $(3+1)$ بعدی را در نظر بگیرید. اسپینور ِ کروی متناظر با پایه یِ $\{e_a\mid a\}$:

$$e_0:=\hat{\mathbf{t}},\quad e_1:=\hat{\mathbf{r}},\quad e_2:=\hat{\boldsymbol{\theta}},\quad e_3:=\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{28}$$

را با ψ نمایش می‌دهیم. t مختصه یِ زمان، و (r,θ,ϕ) مختصات ِ کروی یِ فضا یند. داریم

$$\partial_0=\frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_1=\frac{\partial}{\partial r},\quad \partial_2=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \partial_3=\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{29}$$

پایه یِ دوگان ِ $\{e_a\mid a\}$ می‌شود $\{e^a\mid a\}$:

$$e^0:=\mathrm{d}t,\quad e^1:=\mathrm{d}r,\quad e^2:=r\,\mathrm{d}\theta,\quad e^3:=r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{30}$$

با استفاده از (6) و (7)، نتیجه می‌شود

$$\Gamma^{2\,1}\;=\;-\Gamma^{1\,2}=\frac{1}{r}\,e^2,$$

$$\Gamma^{3\,1} = -\Gamma^{1\,3} = \frac{1}{r}\,e^3,$$

$$\Gamma^{3\,2} = -\Gamma^{2\,3} = \frac{\cot\theta}{r}\,e^3, \tag{31}$$

و بقیه یِ هم‌وستارها صفر اند. از این‌جا،

$$\gamma^a(\partial_a + \Gamma_a) = \gamma^0\,\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\,\frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2\,\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\,\sigma_{1\,2}\right)$$
$$+\gamma^3\,\left(\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\,\sigma_{1\,3} + \frac{\cot\theta}{r}\,\sigma_{2\,3}\right),$$
$$= \gamma^0\,\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\,\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^2\,\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{2r}\right) + \gamma^3\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{32}$$

رابطه یِ اسپینور ِ کروی یِ ψ با اسپینور ِ دِکَرتی یِ ψ' معادله یِ (16) است. پایه یِ $\{e'_a \mid a\}$ را با

$$e'_0 := \hat{\mathbf{t}},\quad e'_1 := \hat{\mathbf{x}},\quad e'_2 := \hat{\mathbf{y}},\quad e'_3 := \hat{\mathbf{z}} \tag{33}$$

می‌گیریم، که (x, y, z) مختصات ِ دِکَرتی یِ فضا یند. داریم

$$\begin{aligned}
e'_0 &= e_0,\\
e'_1 &= e_1\,\sin\theta\,\cos\phi + e_2\,\cos\theta\,\cos\phi - e_3\,\sin\phi,\\
e'_2 &= e_1\,\sin\theta\,\sin\phi + e_2\,\cos\theta\,\sin\phi + e_3\,\cos\phi,\\
e'_3 &= e_1\,\cos\theta - e_2\,\sin\theta,
\end{aligned} \tag{34}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta\,\cos\phi & \sin\theta\,\sin\phi & \cos\theta\\ 0 & \cos\theta\,\cos\phi & \cos\theta\,\sin\phi & -\sin\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}^a{}_b,$$
$$= [\exp(\Xi_3)\,\exp(\Xi_2)\,\exp(\Xi_1)]^a{}_b, \tag{35}$$

که

$$
\begin{aligned}
(\Xi_1)^3{}_2 &= -(\Xi_1)^2{}_3 = \frac{\pi}{2},\\
(\Xi_2)^1{}_3 &= -(\Xi_2)^3{}_1 = \phi,\\
(\Xi_3)^2{}_1 &= -(\Xi_1)^1{}_2 = \frac{\pi}{2} - \theta,
\end{aligned} \tag{36}
$$

و بقیه یِ مئلفه‌ها یِ Ξ_i ها صفر اند. با تعریف ِ

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &:= 2i\,\sigma_{2\,3},\\
\Sigma_2 &:= 2i\,\sigma_{3\,1},\\
\Sigma_3 &:= 2i\,\sigma_{1\,2},
\end{aligned} \tag{37}
$$

داریم

$$
S(\Lambda) = \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\Sigma_3\right] \exp\left[-i\left(\frac{\phi}{2}\right)\Sigma_2\right]\, \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4}\right)\Sigma_1\right]. \tag{38}
$$

از جمله دیده می‌شود S تابع ی تک‌مقدار از فضا نیست، و تحت ِ تبدیل ِ $\phi \to (\phi + 2\pi)$ به شکل ِ $S \to (-S)$ عوض می‌شود، چون

$$
(\Sigma_2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \exp\left[-i\left(\frac{\phi + 2\pi}{2}\right)\Sigma_2\right] = -\exp\left[-i\left(\frac{\phi}{2}\right)\Sigma_2\right]. \tag{39}
$$

این یعنی اگر اسپینور ِ دِکَرتی تک‌مقدار باشد (که چنین فرض می‌شود) آن‌گاه،

$$
\phi \to (\phi + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \psi \to (-\psi). \tag{40}
$$

4 میدان ِ مرکزی

معادله یِ دیرَک [a] برا یِ یک ذره در یک پتانسیل ِ خارجی با جفتش ِ کمین، به همان شکل ِ (1) است، با این تفاوت که باید به جا یِ انرژی بگذاریم انرژی منها یِ انرژی یِ پتانسیل:

$$
[\gamma^a(\partial_a + i\,\delta_a^0\,V + \Gamma_a) - \mu]\psi = 0, \tag{41}
$$

که V انرژی یِ پتانسیل ِ خارجی است. (معادله یِ متناظر با یک ذره یِ با اسپین ِ (1/2) در یک میدان ِ الکترومغناطیسی با جفتش ِ کمین می‌شود

$$[\gamma^a(\partial_a - i\,q\,A_a + \Gamma_a) - \mu]\psi = 0, \tag{42}$$

که q بار ِ ذره و A پتانسیل ِ الکترومغناطیسی است.)

(41) را می‌شود به این شکل نوشت.

$$i\,\partial_0\psi = H\,\psi, \tag{43}$$

که

$$H := V + \mu\,\beta + \sum_{j\neq 0}\alpha^j[-i(\partial_j + \Gamma_j)], \tag{44}$$

و

$$\begin{aligned} \beta &:= i\,\gamma_0, \\ \alpha^j &:= \gamma_0\,\gamma^j = -i\,\beta\,\gamma^j. \end{aligned} \tag{45}$$

رابطه‌ ي (44) برا يِ حالت ی نوشته شده که Γ_0 صفر است. از جمله، برا يِ فضازمان ِ مینکُوْسکی [f] با مختصات ِ کروی داریم

$$\begin{aligned} H &= V + \mu\,\beta - i\left[\alpha^1\,\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \alpha^2\,\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{2r}\right) + \alpha^3\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right], \\ &= V + \mu\,\beta - i\,\alpha^1\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\beta\,K}{r}\right), \end{aligned} \tag{46}$$

که

$$\begin{aligned} K &:= \beta\left[\alpha^1\,\alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\,\cot\theta\right) + \frac{\alpha^1\,\alpha^3}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right], \\ &= i\,\beta\left[\Sigma_3\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\,\cot\theta\right) - \frac{\Sigma_2}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right], \\ &= i\,\beta\,\Sigma_3\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\,\cot\theta + \frac{i\,\Sigma_1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \end{aligned} \tag{47}$$

می‌گوییم میدان ِ خارجی مرکزی است، اگر V تابع ِ فقط r و t باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، آن‌گاه

$$[K, H] = 0. \tag{48}$$

اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، سیستم تقارن ِ کروی دارد و مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای یِ کل با همیلتنی (H) جابه‌جا می‌شوند. یک راه ِ ساده یِ دیدن ِ این (و به‌دست‌آوردن ِ مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای)، این است که با اسپینورها یِ دِکَرتی شروع کنیم. همیلتنی یِ متناظر با اسپینورها یِ دِکَرتی می‌شود

$$H' = V + \mu\,\beta - i\left(\alpha^1\,\frac{\partial}{\partial x} + \alpha^2\,\frac{\partial}{\partial y} + \alpha^3\,\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{49}$$

رابطه یِ H و H'

$$H = S\,H'\,S^{-1}, \tag{50}$$

است، که S همان $S(\lambda)$ در (38) است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد،

$$[J'_{j\,k}, H'] = 0, \qquad j, k \neq 0, \tag{51}$$

که

$$J'_{j\,k} = -i(x'_j\,\partial_{k'} - x'_k\,\partial_{j'}) + i\,\sigma_{j\,k}. \tag{52}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست تکانه یِ زاویه‌ای یِ مداری، و جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست تکانه یِ زاویه‌ای یِ ذاتی (اسپین) است. مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای، بر حسب ِ مختصات ِ کروی می‌شوند

$$\begin{aligned} J'_\pm &= \exp(\pm i\,\phi)\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{2}\,(\Sigma_1 \pm i\,\Sigma_2), \\ J'_3 &= -i\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\,\Sigma_3, \end{aligned} \tag{53}$$

که

$$\begin{aligned} J'_\pm &:= J'_{2\,3} \pm i\,J'_{3\,1}, \\ J'_3 &:= J'_{1\,2}. \end{aligned} \tag{54}$$

از تعریف ِ

$$J_{j\,k} := S\,J'_{j\,k}\,S^{-1}, \tag{55}$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} J_{\pm} \;&=\; \exp(\pm i\,\phi)\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\Sigma_1}{2\sin\theta}\right), \\ J_3 \;&=\; -i\,\frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{56}$$

از (51) یا با محاسبه یِ مستقیم، معلوم می‌شود اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، آن‌گاه

$$[J_{j\,k}, H] = 0, \qquad j,k \neq 0, \tag{57}$$

یا

$$[J_{\pm}, H] = [J_3, H] = 0. \tag{58}$$

5 جبر ِ گسترش‌یافته یِ دوران

اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، (48) و (58) برقرار اند. پس اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، K و مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای تقارن ِ سیستم اند. به جبر ِ ساخته‌شده با این‌ها جبر ِ گسترش‌یافته یِ دوران می‌گوییم. به‌ساده‌گی دیده می‌شود مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای جبر ِ آشنا یِ

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}] \;&=\; \pm J_{\pm}, \\ [J_+, J_-] \;&=\; 2J_3 \end{aligned} \tag{59}$$

را بر می‌آورند. این را می‌شود با محاسبه یِ مستقیم تحقیق کرد، یا از این‌جا نتیجه گرفت که کمیت‌ها یِ پریم‌دار ِ متناظر رابطه‌ها یِ مشابه ی را بر می‌آورند. هم‌چنین دیده می‌شود

$$[K, J_3] \;=\; 0, \tag{60}$$

$$[K, J_{\pm}] \;=\; 0. \tag{61}$$

با تعریفِ

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} &:= (J_{1\,2})^2+(J_{2\,3})^2+(J_{3\,1})^2,\\ &= (J_3)^2+\frac{1}{2}\,(J_+\,J_-+J_-\,J_+),\\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)+\frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\Sigma_1\,\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{4\sin^2\theta},\end{aligned}\tag{62}$$

معلوم می‌شود

$$K^2=\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}+\frac{1}{4}.\tag{63}$$

جبرِ گسترش یافته یِ دوران، اندک ی بزرگ‌تر از جبرِ دوران (جبرِ ساخته‌شده از فقط تکانه یِ زاویه‌ای) است: لازم نیست همه یِ توان‌ها یِ K را وارد کنیم، چون توان‌ها یِ زوجِ K را می‌شود بر حسبِ تکانه یِ زاویه‌ای نوشت.

از (60) نتیجه می‌شود K و J_3 را می‌شود هم‌زمان قطری کرد. ویژه‌بردارها یِ هم‌زمانِ J_3 و K را با $\mathcal{Y}_{\kappa\,m}$ نشان می‌دهیم:

$$K\,\mathcal{Y}_{\kappa\,m}\;=\;\kappa\,\mathcal{Y}_{\kappa\,m},\tag{64}$$

$$J_3\,\mathcal{Y}_{\kappa\,m}\;=\;m\,\mathcal{Y}_{\kappa\,m}.\tag{65}$$

از (63) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\,\mathcal{Y}_{\kappa\,m}=j(j+1)\,\mathcal{Y}_{\kappa\,m},\tag{66}$$

که

$$\kappa=\pm\left(j+\frac{1}{2}\right).\tag{67}$$

از (65) و (66) نتیجه می‌شود

$$(j-m)\in\mathbb{Z},\qquad j\ge|m|,\tag{68}$$

که $\mathbb{Z}$ مجموعه یِ عددها یِ صحیح است.

جوابِ (65) می‌شود

$$\mathcal{Y}_{\kappa\, m}(\theta, \phi) = \Theta_{\kappa\, m}(\theta) \exp(i\, m\, \phi). \tag{69}$$

از (40) نتیجه می‌شود m نصف ِ یک عدد ِ فرد است (و از این نتیجه می‌شود j نصف ِ یک عدد ِ فرد ِ مثبت است). برا یِ به‌دست‌آوردن ِ Θ ها، ابتدا $\Theta_{\kappa\, j}$ را حساب می‌کنیم. داریم

$$J_+\, \mathcal{Y}_{\kappa\, j} = 0, \tag{70}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - j\, \cot\theta + \frac{\Sigma_1}{2\sin\theta}\right) \Theta_{\kappa\, j} = 0 \tag{71}$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل ِ جداشدنی است، که جواب َ ش می‌شود

$$\begin{aligned}\Theta_{\kappa\, j}(\theta) \;&=\; \exp\left[j \ln(\sin\theta) + \frac{\Sigma_1}{4} \ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right] \Upsilon_{j\, u}, \\ &=\; \sin^j\theta\, \Omega(\theta)\, \Upsilon_{j\, u},\end{aligned} \tag{72}$$

که $\Upsilon_{j\, u}$ اسپینور ی مستقل از θ است،

$$u := \frac{\kappa}{|\kappa|}, \tag{73}$$

و

$$\begin{aligned}\Omega(\theta) :=\; &\exp\left[\frac{\Sigma_1}{4} \ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right], \\ =\; &\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \Sigma_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{74}$$

سرانجام، (64) می‌شود

$$i\,\beta\,\Sigma_3 \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\, \cot\theta - \frac{j\,\Sigma_1}{\sin\theta}\right) \Theta_{\kappa\, j} = \kappa\, \Theta_{\kappa\, j}, \tag{75}$$

یا با استفاده از (71)،

$$i\,\beta\,\Sigma_3 \left(j + \frac{1}{2}\right) \left(\cot\theta - \frac{\Sigma_1}{\sin\theta}\right) \Theta_{\kappa\, j} = \kappa\, \Theta_{\kappa\, j}. \tag{76}$$

با استفاده از (67)، (72)، و (73)،

$$i\,\beta\,\Sigma_3\left(\cot\theta-\frac{\Sigma_1}{\sin\theta}\right)\Omega(\theta)\,\Upsilon_{j\,u}=u\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_{j\,u}. \tag{77}$$

با استفاده از این که $\beta\,\Sigma_3$ با Σ_1 پادجابه‌جا می‌شود، (77) می‌شود

$$i[\Omega(\theta)]^{-1}\left(\cot\theta+\frac{\Sigma_1}{\sin\theta}\right)[\Omega(\theta)]^{-1}\,\beta\,\Sigma_3\,\Upsilon_{j\,u}=u\,\Upsilon_{j\,u}. \tag{78}$$

داریم

$$\{[\Omega(\theta)]^{-1}\}^2\;=\;\exp\left[-\frac{\Sigma_1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right],$$

$$=\;\frac{1}{\sin\theta}-\Sigma_1\cot\theta. \tag{79}$$

از این‌جا (78) می‌شود

$$i\,\Sigma_1\,\beta\,\Sigma_3\,\Upsilon_{j\,u}=u\,\Upsilon_{j\,u}, \tag{80}$$

یا

$$\beta\,\Sigma_2\,\Upsilon_{j\,u}=u\,\Upsilon_{j\,u}. \tag{81}$$

دیده می‌شود معادله‌ یِ ویژه‌مقداری یی که $\Upsilon_{j\,u}$ آن را بر می‌آورد، به j بسته‌گی ندارد. پس می‌شود نوشت

$$\Upsilon_{j\,u}=:N_j\,\Upsilon_u \tag{82}$$

که Υ_u اسپینور ی ثابت، و N_j یک ضریب ِ بهنجارش است. به این ترتیب،

$$\mathcal{Y}_{\kappa\,j}(\theta,\phi)=N_j\;\exp(i\,m\,\phi)\;\sin^j\theta\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_u. \tag{83}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ِ بقیه یِ $\mathcal{Y}_{\kappa\,m}$ ها، J_- را رو یِ $\mathcal{Y}_{\kappa\,j}$ اثر می‌دهیم. از (61) نتیجه می‌شود با این کار ویژه‌مقدار ِ K عوض نمی‌شود. از این‌جا،

$$\mathcal{Y}_{\kappa\,m}(\theta,\phi)=N_{j\,m}\,(J_-)^{j-m}\;\exp(i\,m\,\phi)\;\sin^j\theta\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_u, \tag{84}$$

که در آن $N_{j\,m}$ یک ثابت ِ بهنجارش ِ دیگر است. اگر بخواهیم طول ِ $\mathcal{Y}_{\kappa\,m}$ با طول ِ $\mathcal{Y}_\kappa$ برابر باشد،

$$N_{j\,m}=N_j\,\sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!\,(j-m)!}}. \tag{85}$$

6 معادله یِ شعاعی

معادله یِ (43) با همیلتنی یی به شکل ـِ (46) را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم میدان ـِ خارجی مرکزی است. دیده می‌شود

$$[K, H - i(\partial/\partial t)] = [J_3, H - i(\partial/\partial t)] = 0. \tag{86}$$

ψ را بر حسب ـِ ویژه‌بردارها یِ هم‌زمان ـِ K و J_3 بسط می‌دهیم:

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\kappa, m} R_{\kappa\, m}(t, r)\, \mathcal{Y}_{\kappa\, m}(\theta, \phi). \tag{87}$$

$R_{\kappa\, m}$ ماتریس‌ها یی اند که با K و مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای جابه‌جا می‌شوند. از این‌جا،

$$\left[\mu\, \beta + V - i\, \frac{\partial}{\partial t} - i\, \alpha^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa\, \beta}{r}\right)\right]\, R_{\kappa\, m}(t, r) = 0. \tag{88}$$

تعریف می‌کنیم

$$\varphi_{\kappa\, m}(t, r) := \frac{1 + \beta}{2}\, R_{\kappa\, m}(t, r),$$

$$\chi_{\kappa\, m}(t, r) := -i\, \alpha^1\, \frac{1 - \beta}{2}\, R_{\kappa\, m}(t, r). \tag{89}$$

$[(1+\beta)/2]$ و $[-i\, \alpha^1\, (1-\beta)/2]$ را از چپ در (88) ضرب می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} \mu + \left(V - i\, \dfrac{\partial}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\right) - \dfrac{\kappa}{r} \\ -\left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\right) - \dfrac{\kappa}{r} & -\mu + \left(V - i\, \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\kappa\, m} \\ \chi_{\kappa\, m} \end{pmatrix} = 0. \tag{90}$$

از جداسازی یِ معادله یِ دِکَرتی هم همین معادله برا یِ بسته‌گی یِ شعاعی و زمانی به دست می‌آید [1].

7 ویژه‌مقدارها یِ انرژی یِ یون‌ها یِ هیدروژن‌گونه، برا یِ حالت‌ها یِ مقید

در معادله یِ (90) می‌گذاریم

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{91}$$

که k ثابت ی مثبت است. هم‌چنین، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\varphi_{\kappa\, m}(t, r) &=: f(r)\, \exp(-i\, E\, t),\\ \chi_{\kappa\, m}(t, r) &=: g(r)\, \exp(-i\, E\, t).\end{aligned} \tag{92}$$

معادله یِ (90) می‌شود

$$\begin{pmatrix} \mu - \dfrac{k}{r} - E & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{\kappa}{r} \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \dfrac{1}{r} - \dfrac{\kappa}{r} & -\mu - \dfrac{k}{r} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0. \tag{93}$$

در r ها یِ بزرگ، این معادله می‌شود

$$\begin{pmatrix} \mu - E & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} & -\mu - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \sim 0. \tag{94}$$

یک جواب ِ این معادله

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \exp(v\, r) \tag{95}$$

است، که v ثابت است و F و G تابع‌ها یی کندتغییر اند. در این صورت (94) می‌شود

$$\begin{pmatrix} \mu - E & v \\ -v & -\mu - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \sim 0, \tag{96}$$

که نتیجه می‌دهد

$$-\mu^2 + E^2 + v^2 = 0. \tag{97}$$

اگر $\mu < |E|$، آن‌گاه v موهومی می‌شود، که این متناظر با حالت‌ها یِ نامقید است. برا یِ حالت‌ها یِ مقید، $|E| < \mu$. در این صورت، برا یِ جواب ی که در $r \to \infty$ خوش‌رفتار باشد،

$$v = -\sqrt{\mu^2 - E^2}. \tag{98}$$

نهاده یِ (95) را در (93) می‌گذاریم:

$$\begin{pmatrix} \mu - \dfrac{k}{r} - E & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \dfrac{1-\kappa}{r} + v \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \dfrac{1+\kappa}{r} - v & -\mu - \dfrac{k}{r} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = 0. \tag{99}$$

برا یِ جواب ِ این معادله، نهاده ای به شکل ِ یک سری یِ توانی می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{\infty} W_p \, r^{s+p}. \tag{100}$$

از این‌جا،

$$\sum_{p=0}^{\infty} C \, W_p \, r^{s+p} - \sum_{p=0}^{\infty} C_p \, W_p \, r^{s+p-1} = 0, \tag{101}$$

که،

$$C := \begin{pmatrix} \mu - E & v \\ -v & -\mu - E \end{pmatrix} \tag{102}$$

و

$$C_p := \begin{pmatrix} k & -s-p-1+\kappa \\ s+p+1+\kappa & k \end{pmatrix}. \tag{103}$$

معادله یِ (101) هم‌ارز است با

$$C_0 \, W_0 = 0, \tag{104}$$

و

$$C \, W_{p-1} - C_p \, W_p = 0, \qquad p > 0. \tag{105}$$

از (104) نتیجه می‌شود

$$k^2 - \kappa^2 + (s+1)^2 = 0. \tag{106}$$

شرط ِ این که تابع ِ موج در $r \to 0$ خوش‌رفتار باشد آن است که

$$\mathrm{Re}(s) > -1. \tag{107}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$s = -1 + \sqrt{\kappa^2 - k^2}, \tag{108}$$

و

$$|\kappa| > k. \tag{109}$$

(شرط ِ اخیر می‌گوید اگر $k > 1$، آن‌گاه تکانه ی ِ زاویه‌ای ی ِ حالت‌ها ی ِ مقید باید از حد ِ معین ی بیش‌تر باشد.)

ماتریس ِ C دو ویژه‌بردار ِ چپ دارد:

$$\begin{aligned} \xi\, C \,&=\, 0, \\ \eta\, C \,&=\, -2E\,\eta, \end{aligned} \tag{110}$$

که

$$\begin{aligned} \xi \,&:=\, (\, v \quad \mu - E\,)\,, \\ \eta \,&:=\, (\, v \quad \mu + E\,)\,. \end{aligned} \tag{111}$$

ξ را از چپ در (105) ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\xi\, C_p\, W_p = 0, \tag{112}$$

یا

$$W_p = w_p\, \zeta_p, \tag{113}$$

که w_p عدد است و ζ_p چنان است که

$$\xi\, C_p\, \zeta_p = 0. \tag{114}$$

از این‌جا،

$$\zeta_p := \begin{pmatrix} (s+p+1-\kappa)v - k(\mu - E) \\ k\, v + (s+p+1+\kappa)(\mu - E) \end{pmatrix}. \tag{115}$$

η را از چپ در (105) ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$-\,2E\,\eta\,\zeta_{p-1}\,w_{p-1} = \eta\, C_p\, \zeta_p\, w_p, \tag{116}$$

یا

$$w_p = \frac{2[k\,E + (s+p)v]}{\kappa^2 - k^2 - (s+p+1)^2}\, w_{p-1}. \tag{117}$$

اگر w_p ها از جا یی به بعد صفر نشوند، آن‌گاه

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p\,w_p}{w_{p-1}}=-2v, \tag{118}$$

که نتیجه می‌دهد

$$F(r),G(r)\sim\exp(-2v\,r),\qquad r\to\infty, \tag{119}$$

یا

$$f(r),g(r)\sim\exp(-v\,r),\qquad r\to\infty, \tag{120}$$

که قابلِ‌قبول نیست، چون v منفی است. پس w_p ها باید از جا یی به بعد صفر شوند. فرض کنید n' عدد ِ صحیح ِ نامنفی یی باشد که

$$w_{n'}\ne 0,\qquad w_{n'+1}=0. \tag{121}$$

در این صورت از (117) نتیجه می‌شود

$$k\,E+(s+n'+1)v=0. \tag{122}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود E مثبت است. با جاگذاری ِ v و s از (98) و (108)،

$$E=\frac{\mu}{\sqrt{1+\dfrac{k^2}{(n'+\sqrt{\kappa^2-k^2})^2}}}. \tag{123}$$

این رابطه را برا یِ یک یون ِ هیدروژن‌گونه با عدد ِ اتمی ِ Z می‌نویسیم و $\hbar$ و c را هم وارد می‌کنیم:

$$E_{n\,j}=\mu\,c^2\left\{1+(Z\,\alpha)^2\,\left[n+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-(Z\,\alpha)^2}-\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}\right\}^{-1/2}. \tag{124}$$

α ثابت ِ ساختارِریز، و n یک عدد ِ صحیح ِ مثبت (عدد ِ کوانتمی ِ اصلی) است:

$$n:=n'+j+\frac{1}{2}. \tag{125}$$

رابطه یِ (124) را می‌شود در مثلاً [1] یافت.

8 مرجع‌ها

[1] Leonard I. Schiff; "Quantum mechanics", 3rd edition (McGraw-Hill, 1968) section 53

[2] Mikio Nakahara; "Geometry, topology and physics", (Institute of Physics Publishing, 1995) chapter 7

[3] Theodore Frankel; "The geometry of physics an itroduction", (Cambridge University Press, 1999) chapter 19

9 اسم‌ها یِ خاص

[a] Dirac

[b] Lorentz

[c] Planck

[d] Compton

[e] Clifford

[f] Minkowski