کشند، جزر و مد، و حد ـ رُش

احمد ـ شریعتی

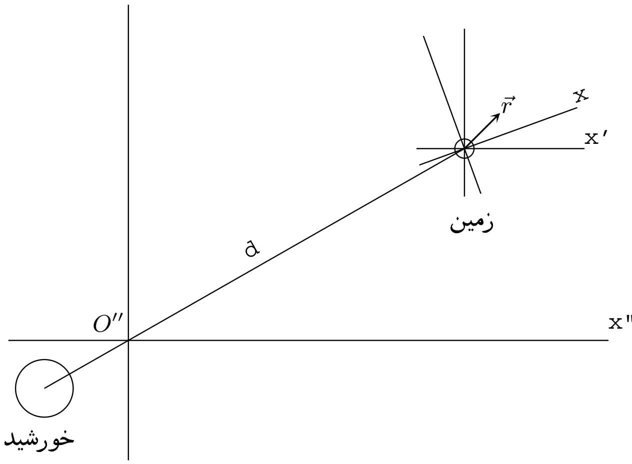
در این مقاله ی ـ آموزشی، معادله ی ـ حرکت ـ یک ذرّه ی ـ مادّی در اطراف ـ زمین، با در نظر گرفتن ـ حرکت ـ زمین به دور ـ خورشید و گرانش ـ خورشید (یا ماه) بررسی می‌شود. دیده می‌شود که در اطراف ـ زمین یک میدان ـ شتاب که به موضع ـ خورشید (یا ماه) در آسمان بسته‌گی دارد حس می‌شود. این میدان ـ شتاب، که منشاء ـ پدیده ی ـ جزر و مد است، به شکل ـ گرادیان ـ یک پتانسیل ـ نرده‌ای بیان می‌شود.

۱ مقدمه

جزر و مد، یعنی بالا و پایین رفتن ـ سطح ـ آب ـ دریاها پدیده ای است ناشی از گرانش ـ ماه و خورشید. درک ـ علّت ـ این پدیده، با استفاده از مکانیک و گرانش ـ نیوتنی ساده است، امّا البته توضیح ـ جزئیّات ـ این پدیده، مثلاً پیش‌بینی ی ـ مقدار ـ جزر یا مد در یک نقطه ی ـ خاص از زمین، نیازمند ـ محاسبه‌ها ی ـ بسیار پیچیده است. با آن که این پدیده چند قرن است که اساس ش به‌خوبی توضیح داده شده، به نظر می‌رسد حتّا در بین ـ دانش‌جوها ی ـ ارشد و دکترا ی ـ فیزیک ـ ما ضعف ـ عمده ای در فهم ـ آن هست.

وقت ی یک جسم در میدان ـ گرانش ـ ناشی از اجسام ـ دیگر آزادانه می‌اُفتد، یا به اصطلاح سقوط ـ آزاد می‌کند، ناظر ی که هم‌راه ـ جسم است میدان ـ گرانش ـ اجسام ـ دیگر را حس نمی‌کند، زیرا تمام ـ اجسام ـ دور و بر اَش با یک شتاب، که همان شتاب ـ گرانش است، می‌اُفتند.[1] به این علّت است که ما در تجربه‌ها ی ـ روزمرّه مان چنین احساس ی نداریم که خورشید اجسام را به سو ی ـ خود اش می‌کشد ـ طور ی که تازه سه قرن است که به این باور رسیده ایم، در حال ی که هزاران سال است که هر انسان ی بر اساس ـ تجربه‌ها ی ـ روزمرّه اش می‌داند که زمین همه چیز را به سو ی ـ خود اش می‌کشد. با این حال، به علّت ـ بزرگ بودن ـ زمین، گرانش ـ خورشید و حتّا ماه رو ی ـ زمین اثرها یی مشاهده‌پذیر دارد ـ جزر و مد، یا به اصطلاح ـ فنّی‌تر کشندها.

[1] این حس نشدن ـ میدان ـ گرانش برا ی ـ یک ناظر ـ آزاداُفتان اصطلاحاً اصل ـ هم‌ارزی نامیده می‌شود.



شکل ۱: دست‌گاه ِ K''، با محورها ی ِ دوزِبَردار دست‌گاه ِ لخت ی است با مبداء (O'') در مرکزِجرم ِ دو جسم. توجّه کنید که شکل با اغراق کشیده شده؛ عملاً O'' بسیار به مرکز ِ خورشید نزدیک است. دست‌گاه ِ K'، با محورها ی ِ زِبَردار دست‌گاه ی است نالخت که محورها ی ِ آن در امتداد ِ ستاره‌ها ی ِ ثابت است، و بنا بر این نمی‌چرخد. دست‌گاه ِ K، با محورها ی ِ بی‌زِبَر، متصل به زمین است، یعنی هم مبداء ِ آن همراه ِ زمین حرکت می‌کند، و هم در فضا می‌چرخد. $\vec{r}$ برداد ِ مکان ِ یک جسم نسبت به مرکز ِ زمین است.

برا ی ِ فهم ِ کشندها خوب است دو جسم در نظر بگیریم که بر اثر ِ گرانش ِ متقابل ِ شان حرکت می‌کنند. حرکت ِ هر کدام از دو جسم حتماً شتاب‌دار است. برا ی ِ مثال حرکت ِ زمین به دور ِ خورشید را در نظر بگیرید. دقّت کنید، تمام ِ بحث ی که پس از این می‌آید کاملاً عام است و به هیچ وجه خاص ِ سیستم ِ زمین ـ خورشید نیست. ما تنها برا ی ِ آسان‌تر شدن ِ نوشته از نام‌ها ی ِ زمین و خورشید استفاده می‌کنیم (و البتّه مقادیر ِ عددی را برا ی ِ این سیستم ِ خاص حساب می‌کنیم).

شتاب ِ ناشی از گرانش ِ خورشید در محل ِ زمین بردار ی است به اندازه ی ِ

$$\frac{G\,M_\odot}{d^2} = \frac{6.7\times 10^{-11}\times 2.0\times 10^{30}}{(1.5\times 10^{11})^2} \simeq 6\times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2} \qquad (1)$$

و به سمت ِ خورشید. اندازه و راستا ی ِ این شتاب هیچ ربط ی به این که سرعت ِ زمین چه قدر است ندارد. پس زمین، چه عمود بر این شتاب حرکت کند (که تقریباً همان وضعیّت ِ واقعی است) و چه مستقیماً به سمت ِ خورشید برود (که در این صورت پس از گذشت ِ مدّت ی به خورشید خواهد رسید)، در هر حال شتاب ِ حرکت ش بردار ی است به این اندازه و دقیقاً به سمت ِ خورشید.

حرکت ـِ یک ذرّه در کنار ـِ زمین را بررسی کنیم. برا یِ این کار باید تمام ـِ نیروها یِ وارد بر این ذرّه را بدانیم، و قانون ـِ دوّم ـِ نیوتن، یعنی معادله یِ $\vec{F} = m\,\vec{a}$ را در یک دست‌گاه ـِ لَخت بنویسیم.

دست‌گاه‌ها یِ زیر را معرفی می‌کنیم ــ شکل ـِ ۱ را ببینید.

۱) دست‌کاه ـِ K'' دست‌گاه ـِ لخت ی است که مبداء ـِ آن مرکزِجرم ـِ زمین و خورشید است، و محورها یِ آن نسبت به ستاره‌ها یِ ثابت ثابت اند.

۲) دست‌گاه ـِ K' دست‌گاه ـِ نالخت ی است که مبداء ـِ آن مرکز ـِ زمین است (یعنی هم‌راه ـِ زمین در فضا حرکت می‌کند)، و محورها یِ آن نسبت به ستاره‌ها یِ ثابت ثابت اند (موازی یِ محورها یِ K اند).

۳) دست‌گاه ـِ K دست‌گاه ـِ نالخت ی است که مبداء ـِ آن مرکز ـِ زمین است، و محورها یِ آن نسبت به زمین ثابت اند، یعنی به هم‌راه ـِ زمین در فضا می‌چرخند.

دوست داریم حرکت ـِ ذرّه را نسبت به این دست‌گاه ـِ K، که نالخت است بنویسیم، زیرا دوست داریم حرکت ـِ این ذرّه را نسبت به زمین ـِ ثابت بررسی کنیم. برا یِ این کار به دو مقدّمه یِ زیر نیاز داریم. هر دو یِ این مقدّمه‌ها مطالب ـِ استاندارد ی در درس ـِ مکانیک اند.

- محورها یِ دو دست‌گاه ـِ K'' و K' با هم موازی اند؛ K' با شتاب ـِ $\vec{A}$ نسبت به K'' حرکت می‌کند، پس بین ـِ شتاب ـِ یک ذرّه در K'' (که بردار ـِ $\vec{a}''$ است) با شتاب ـِ همان ذرّه در K' (که بردار ـِ $\vec{a}'$ است) رابطه یِ زیر برقرار است.

$$\vec{a}'' = \vec{A} + \vec{a}', \tag{2}$$

- اگر سرعت ـِ زاویه‌ای یِ وضعی یِ زمین $\vec{\omega}$ باشد داریم

$$\vec{a}' = \vec{a} + 2\,\vec{v} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,, \tag{3}$$

که در این جا $\vec{r}$ بردار ـِ مکان ـِ ذرّه در K، $\vec{v}$ بردار ـِ سرعت ـِ ذرّه در K، و $\vec{a}'$ بردار ـِ شتاب ـِ ذرّه در K' است.

به این ترتیب داریم

$$\vec{a}'' = \vec{A} + \vec{a} + 2\,\vec{v} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,, \tag{4}$$

پس اگر قانون ـِ دوّم ـِ نیوتن، یعنی $m\,\vec{a}'' = \vec{F}$ را بنویسیم، خواهیم داشت

$$m\,\vec{a} = \vec{F} - m\,\vec{A} - 2\,m\,\vec{v} \times \vec{r} - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,. \tag{5}$$

در این فرمول، $\vec{F}$ نیرو یِ واقعی یِ وارد بر ذرّه است، $-m\,\vec{A}$ نیرو یِ مجازی یِ ناشی از حرکت ِ مرکز ِ جرم ِ زمین به دور ِ خورشید است، $-2m\,\vec{v}\times\vec{r}$ نیرو یِ مجازی یِ کوریولی ای است که به علّت ِ چرخش ِ وضعی یِ زمین حس می‌شود، و $-m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ نیرو یِ مجازی یِ گریزازمرکز ی است که به علّت ِ چرخش ِ وضعی یِ زمین حس می‌شود.

اگر بردار ِ واصل ِ خورشید به زمین را با $\vec{d}$ نشان دهیم داریم

$$\vec{A} = -G\,M_\odot\,\frac{\vec{d}}{d^3}. \tag{6}$$

به این ترتیب قانون ِ حرکت ِ یک ذرّه یِ مادّی در نزدیکی یِ زمین به این شکل است:

$$\begin{aligned} m\,\vec{a} &= \vec{F} - m\,\vec{A} - 2\,m\,\vec{v}\times\vec{r} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\ &= \vec{F} + G\,M_\odot\,m\frac{\vec{d}}{d^3} - 2\,m\,\vec{v}\times\vec{r} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \end{aligned} \tag{7}$$

فرض کنیم جز زمین و خورشید جسم ِ گراننده یِ دیگر ی نیست. نیروها یی که بر ذرّه وارد می‌شوند عبارت اند از ۱) گرانش ِ زمین، ۲) گرانش ِ خورشید، ۳) نیرو یِ خارجی یِ $\vec{F}_{\rm ex}$ که مثلاً می‌تواند نیرو یِ رانش ِ یک موشک، یا مقاومت ِ هوا، یا کشش ِ یک نخ، یا هر چیز ِ دیگر ی باشد.

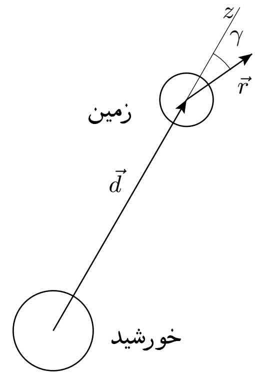
$$\vec{F} = \vec{F}_{\rm ex} - G\,M_\oplus\,m\,\frac{\vec{r}}{r^3} - G\,M_\odot\,m\frac{\vec{d}+\vec{r}}{\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^3}, \tag{8}$$

که در این جا $\vec{r}$ بردار ی است که مرکز ِ زمین را به آن جسم وصل می‌کند و $\vec{d}$ بردار ی است که مرکز ِ خورشید را به مرکز ِ زمین وصل می‌کند.

با جاگذاری یِ $\vec{F}$ و حذف ِ m معادله یِ حرکت ِ یک جسم در نزدیکی یِ زمین به این شکل در می‌آید (فرض بر این است که جز گرانش نیرو یِ دیگر ی به جسم وارد نمی‌شود).

$$\vec{a} = \vec{F}_{\rm ex} - G\,M_\oplus\frac{\vec{r}}{r^3}\underbrace{-G\,M_\odot\frac{\vec{d}+\vec{r}}{\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^3} + G\,M_\odot\,\frac{\vec{d}}{d^3}}_{\vec{a}_{\rm T}}-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\,\vec{v}\times\vec{r}. \tag{9}$$

جمله‌ها یِ سوّم و چهارم ِ سمت ِ راست را با هم در نظر می‌گیریم. دقّت کنید که جمله یِ سوّم، یعنی $-G\,m\,M_\odot\,\frac{\vec{d}+\vec{r}}{\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^3}$ نیرو یِ واقعی یِ گرانش ِ خورشید در نقطه یِ $\vec{r}$ نزدیک ِ زمین است، امّا جمله یِ چهارم، یعنی $G\,m\,M_\odot\frac{\vec{d}}{d^3}$ نیرو یی است مجازی، که به علّت ِ حرکت ِ زمین به دور ِ خورشید و این که دینامیک را در دست‌گاه ِ نالخت ِ متصل به زمین مطالعه می‌کنیم ظاهر شده. مجموع ِ این دو نیرو را «نیرو یِ کشند ِ خورشید» می‌نامیم. این نیرو را با $\vec{F}_{\rm T} = m\,\vec{a}_{\rm T}$ نشان می‌دهیم و $\vec{a}_{\rm T}$ را شتاب ِ کشندی یِ خورشید می‌نامیم.



شکل ۲: $\vec{d}$ برداری است که مرکزِ خورشید را به مرکزِ زمین وصل می‌کند؛ $\vec{r}$ بردارِ مکانِ ذرّه نسبت به مرکزِجرمِ زمین است، γ زاویه یِ بینِ این دو است. محورِ z را درامتدادِ $\vec{d}$ می‌گیریم.

شتابِ کشندی یِ خورشید را حساب کنیم. ابتدا بردارها یِ یکه یِ $\hat{d}$ و $\hat{r}$ را معرفی می‌کنیم، و زاویه یِ بینِ این دو را γ می‌نامیم (شکلِ ۲).

$$\cos\gamma = \hat{d}\cdot\hat{r}. \tag{10}$$

اکنون $\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^2$ را حساب می‌کنیم.

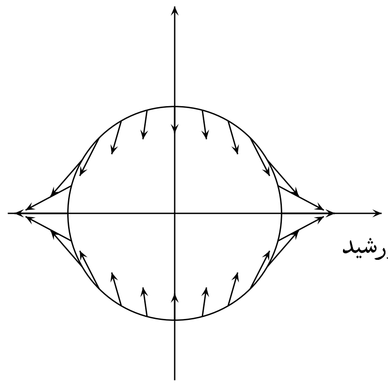
$$\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^2 \simeq d^2\left(1+\frac{r}{d}\,\cos\gamma\right). \tag{11}$$

به این ترتیب

$$\frac{1}{\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^3} \simeq \frac{1}{d^3}\left(1-3\,\frac{r}{d}\cos\gamma\right), \tag{12}$$

و به ساده‌گی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\mathrm{T}} &= -G\,M_\odot\left[\frac{\vec{d}+\vec{r}}{\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^3}-\frac{\vec{d}}{d^3}\right]\\
&\simeq -G\,M_\odot\left[\frac{1}{d^3}\left(\vec{d}+\vec{r}\right)\left(1-3\,\frac{r}{d}\right)-\frac{\hat{d}}{d^2}\right]\\
&\simeq -\frac{G\,M_\odot}{d^3}\left(r\,\hat{r}-3\,r\,\cos\gamma\,\hat{d}\right)
\end{aligned} \tag{13}$$



شکل ۳: شتاب ِ کشندی ی ِ خورشید یا ماه در سطح ِ زمین (بردارها ی ِ کوچک). محور ِ افقی در امتداد ِ خط ِ زمین ـ خورشید یا زمین ـ ماه است. این شکل را باید دور ِ همین محور ِ افقی چرخاند تا شتاب ِ کشندی در تمام ِ سطح ِ زمین به دست بیاید.

برا ی ِ این که این فرمول را بفهمیم، خوب است فرض کنیم $\vec{d}$ در جهت ِ محور ِ z است. در این صورت واضح است که $r\,\cos\gamma\,\hat{d} = z\,\hat{z}$، و بنا بر این

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\mathrm{T}} &= -\frac{G\,M_\odot}{d^3}\,(x\,\hat{x} + y\,\hat{y} - 2\,z\,\hat{z}) && (14)\\
&= -\vec{\nabla}\left[\frac{G\,M_\odot}{2\,d^3}\left(x^2 + y^2 - 2\,z^2\right)\right]\\
&= -\vec{\nabla}\left[\frac{G\,M_\odot}{2\,d^3}\,r^2\,\left(\sin^2\theta - 2\,\cos^2\theta\right)\right]\\
&= -\vec{\nabla}\left[\frac{G\,M_\odot}{d^3}\,r^2\,\frac{1}{2}\,\left(1 - 3\,\cos^2\theta\right)\right]\\
&= -\vec{\nabla}\left[-\frac{G\,M_\odot}{d^3}\,r^2\,\frac{1}{2}\,\left(3\,\cos^2\theta - 1\right)\right] && (15)
\end{aligned}$$

که یعنی برا ی ِ نیرو ی ِ کشندی ی ِ خورشید می‌توان یک پتانسیل در نظر گرفت:

$$\vec{a}_{\mathrm{T}} = -\vec{\nabla}\phi_{\mathrm{T}} \qquad \phi_{\mathrm{T}} = -\frac{G\,M_\odot}{d^3}\,r^2\,P_2(\cos\gamma). \tag{16}$$

که در این جا

$$P_2(\cos\gamma) := \frac{1}{2}\,\left(3\,\cos^2\theta - 1\right) \tag{17}$$

چند جمله‌ای ی ِ لُژاندر ِ درجه ی ِ 2 است.

در شکل ـ ۳ بردار ـ $\vec{a}_{\rm T}$، که در (14) داده شده است، برا ی ـ نقاط ـ مختلف ـ سطح ـ زمین کشیده شده است. دقّت کنید که کشند ـ خورشید باعث می‌شود زمین در امتداد ـ خط ـ واصل ـ زمین ـ خورشید کم ی کشیده شود، و در تمام ـ جهت‌ها ی ـ عمود بر این خط فشرده شود. به این ترتیب، زمین ـ مایع (یعنی اقیانوس‌ها) در امتداد ـ خط ـ زمین ـ خورشید کم ی برآمده می‌شوند. برا ی ـ محاسبه ی ـ این برآمده‌گی باید سطح ـ تراز ـ پتانسیل ـ مؤثر ـ $\phi = \phi_{\rm g} + \phi_{\rm c} + \phi_{\rm T}$ را حساب کنیم — $\phi_{\rm g}$ پتانسیل ـ گرانش ـ زمین، یعنی $-G\,M_\oplus/r$، و $\phi_{\rm c}$ پتانسیل ـ نیرو ی ـ گریزازمرکز، یعنی $-\frac{1}{2}\,\omega^2\left(x^2+y^2\right)$ است. چون تنها می‌خواهیم مرتبه ی ـ اثر ـ نیرو ی ـ کشندی را تخمین بزنیم، در این جا از چرخش ـ وضعی ی ـ زمین چشم می‌پوشیم. در این صورت خواهیم داشت

$$\phi = -\frac{G\,M_\oplus}{r} - \frac{G\,M_\odot}{d^3}\,r^2\,P_2(\cos\gamma), \tag{18}$$

که در این جا d فاصله ی ـ زمین تا خورشید است. بر حسب ـ متغیّر ـ بی‌بعد ـ $\rho := r/R_\oplus$ داریم

$$\phi = -\frac{G\,M_\oplus}{R_\oplus}\left(\frac{1}{\rho} + \kappa\,\rho^2\,P_2(\cos\gamma)\right), \tag{19}$$

که در این جا

$$\kappa := \frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{R_\oplus}{d}\right)^3 \simeq 3\times 10^{-8}. \tag{20}$$

محاسبه به روش ـ اختلال است. شعاع ـ زمین در امتداد ـ خط ـ زمین ـ خورشید را $R_\oplus$ می‌گیریم، که یعنی برا ی ـ $\gamma = 0$ می‌گیریم $\rho = 1$. شعاع ـ زمین در امتداد ـ عمود بر خط ـ زمین ـ خورشید را $R_\oplus(1-\alpha)$ می‌گیریم، که یعنی برا ی ـ $\gamma = \pi/2$ می‌گیریم $\rho = 1-\alpha$. اکنون، از آن جا که $P_2(0) = -1/2$ و $P_2(1) = 1$، به ساده‌گی دیده می‌شود که شرط ـ هم‌پتانسیل بودن ـ دو نقطه ی ـ $(\rho = 1, \gamma = 0)$ و $(\rho = 1-\alpha, \gamma = \pi/2)$ هست

$$\begin{aligned} 1+\kappa &= \frac{1}{1-\alpha} + \kappa\,(1-\alpha)^2\left(\frac{-1}{2}\right) \\ &= 1+\alpha-\frac{\kappa}{2}+O(\kappa^2) \end{aligned} \tag{21}$$

که می‌گوید $\alpha = 3\,\kappa/2$ است، و این یعنی اختلاف ـ شعاع‌ها می‌شود

$$\frac{3\,\kappa\,R_\oplus}{2} = \frac{3}{2}\times 3\times 10^{-8}\times 6.4\times 10^6\,{\rm m} \sim 30\,{\rm cm}. \tag{22}$$

پس، به علّت ـ نیرو ی ـ کشندی ی ـ خورشید، سطح ـ آب ـ اقیانوس‌ها، در امتداد ـ خط ـ زمین ـ خورشید، حدود ـ $30\,{\rm cm}$ بالا می‌آید؛ یا به عبارت ـ دقیق‌تر از سطح ـ تراز ـ پتانسیل ـ $\phi_{\rm g}$ بالاتر می‌آید.[2]

[2] در عمل باید انحراف از سطح ـ پتانسیل ـ $\phi_{\rm g} + \phi_{\rm c}$ را در نظر بگیریم. خود ـ جمله ی ـ $\phi_{\rm c}$ باعث می‌شود

۲ جزر و مد دریاها

کشند ِ خورشید، باعث ِ بروز ِ پدیده ی ِ جزر و مد می‌شود. یک نکته ی ِ مهم هست که باید توجّه کرد. در استدلال ِ بالا، چرخش ِ زمین را کنار گذاشتیم که در واقعیّت بسیار مهم است.

زمین هر $365.25\,\mathrm{d}$ یک بار به دور ِ خورشید می‌گردد. اگر چرخش ِ وضعی ی ِ زمین آن قدر کند بود که دقیقاً در همین مدّت یک بار به دور ِ محور اش می‌چرخید، یعنی اگر سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ مداری و وضعی ی ِ زمین برابر بود، آن وقت: 1) هم‌واره یک طرف ِ زمین به طرف ِ خورشید بود (یعنی مثلاً همیشه در آسیا روز بود و در آمریکا شب)، 2) زمین در امتداد ِ خط ِ زمین ـ خورشید به اندازه ای که بالاتر گفتیم، کم ی کشیده بود. امّا، زمین خیل ی تندتر به دور ِ محور ِ قطبی اش می‌چرخد. این باعث می‌شود موضع ِ خورشید در آسمان ِ زمین تغییر کند، و بنا بر این شتاب ِ کشندی ی ِ خورشید، آن طور که رو ی ِ زمین حس می‌شود، تابع ِ زمان باشد (زیرا تابع ِ موضع ِ خورشید در آسمان است). برا ی ِ آن که شتاب، یا معادلاً پتانسیل ِ کشندی را به عنوان ِ تابع ی از موضع ِ خورشید در آسمان، و طول و عرض ِ جغرافیایی ی ِ نقطه ی ِ مشاهده رو ی ِ زمین به دست بیاوریم، باید $\cos\gamma$ را بر حسب ِ این پارامترها ـــ طول و عرض ِ جغرافیایی ی ِ نقطه ی ِ مشاهده، و طول ِ و عرض ِ جغرافیایی ی ِ موضع ِ خورشید در آسمان ـــ بیان کنیم. اساس ِ این کار بسیار ساده است، جزئیّات ش مفصّل است، و نتیجه اش بسیار مهم است.

ابتدا بردار ِ $\hat{r}$ را، که در امتداد ِ نقطه ی ِ مشاهده و با مبداء در مرکز ِ زمین است، بر حسب ِ عرض ِ جغرافیایی (λ) و طول ِ جغرافیایی (φ) می‌نویسیم.

$$\hat{r} = \cos\lambda\,\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\lambda\,\sin\varphi\,\hat{y} + \sin\lambda\,\hat{z}. \tag{23}$$

بردار ِ $\hat{d}$ از خورشید به طرف ِ زمین است، پس خورشید در امتداد ِ بردار ِ $-\hat{d}$ است. مرسوم است که این بردار را با دو زاویه، شبیه به طول و عرض ِ جغرافیایی معرفی می‌کنند. این دو زاویه یک ی زاویه ی ِ میل ِ خورشید است که آن را با δ نشان می‌دهند، و دیگر ی زاویه ی ِ ساعت است که آن را با T نشان می‌دهند.[3] داریم

$$\hat{d} = \cos\delta\,\cos T\,\hat{x} - \cos\delta\,\sin T\,\hat{y} + \sin\delta\,\hat{z}. \tag{24}$$

با ضرب کردن ِ این دو بردار در هم، می‌بینیم

سطح ِ تراز ِ پتانسیل دیگر کره نباشد، بل که یک بیضی‌گون ِ پخ باشد.

[3] زاویه ی ِ ساعت با فرمول ِ $T = (UT - 12) \times 15°$ تعریف می‌شود که در این جا UT زمان به وقت ِ جهانی (یا به افق گرینیچ) است. محور ِ x را در امتداد ِ نصف‌النهار ِ مبداء، گرینیچ، می‌گیریم. برا ی ِ $T = 12\,\mathrm{UT}$، خورشید در صفحه ی ِ نصف‌النهار ِ مبداء است. یک ساعت بعد (ساعت ِ $13\,\mathrm{UT}$) خورشید در صفحه ی ِ نصف‌النهار ِ $15°$ ی ِ غربی است، که با قرارداد ِ متداول ِ مثلثاتی یعنی در $\varphi = -15°$. به این ترتیب علامت ِ منفی در دوّمین جمله ی ِ فرمول ِ (24) درست است.

$$\cos\gamma = \sin\lambda\,\sin\delta + \cos\lambda\,\cos\delta\,\cos(\varphi + T). \tag{25}$$

اکنون باید $P_2(\cos\gamma)$ را حساب کرد. این کار، هم با مثلثات ـِ نسبتاً مقدماتی میسّر است هم با استفاده از قضیه یِ جمع ـِ چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر، و نتیجه این است:

$$\begin{aligned} P_2(\cos\gamma) \;=\; & \frac{1}{4}\left(3\,\sin^2\varphi - 1\right)\,\left(3\,\sin^2\delta - 1\right) \\ & + \frac{3}{4}\,\sin 2\varphi\,\sin 2\delta\,\cos(T+\lambda) \\ & + \frac{3}{4}\,\cos^2\varphi\,\cos^2\delta\,\cos 2(T+\lambda). \end{aligned} \tag{26}$$

وقت ی این تابع را در (16) بگذاریم، پتانسیل ـِ کشندی یِ خورشید در نقطه ای به عرض ـِ جغرافیایی یِ λ و طول ـِ جغرافیایی یِ φ، بر حسب ـِ T و δ، که موضع ـِ خورشید در آسمان را بیان می‌کنند، به دست می آید.

این شکل ـِ پتانسیل ـِ کشندی، که نخستین بار آن را لاپلاس به دست آورده است، مبنا یِ محاسبه یِ کشندها (یعنی جزرومدها) یِ اقیانوس‌ها است. در واقع محاسبه یِ اصلی تازه از این جا شروع می‌شود. زیرا تازه در این مرحله شتاب، یا پتانسیل را به صورت ـِ تابع ی از مکان و زمان نوشته ایم. اینک باید معادله‌ها یِ حرکت را حل کنیم. در مورد ـِ اقیانوس‌ها، این معادله‌ها عبارت اند از معادله‌ها یِ مکانیک ـِ شاره‌ها.

خوب است در این جا یک مثال در ذهن داشته باشیم. فرض کنید مقدار ی آب در یک سطل باشد، و فرض کنید که با تنگ و گشاد کردن ـِ دیواره‌ها یِ سطل بر آب ـِ تو یِ آن نیرو وارد کنیم. فرض کنید دامنه و دوره یِ تناوب ـِ این تنگ و گشاد کردن را بدانیم. سؤال این است که در هر نقطه از سطل، ارتفاع ـِ آب چه قدر است. این سؤال ـِ ساده ای نیست، چرا که اختلال ـِ اعمال شده باعث ـِ ایجاد ـِ موج‌ها یی در سطح ـِ آب می‌شود. باید معادله یِ موج را در حضور ـِ یک نیرو یِ تابع ـِ مکان و زمان حل کنیم. عدد ـِ $30\,\mathrm{cm}$ ی که بالاتر به دست آوردیم، به نوع ی نشان دهنده یِ دامنه یِ اختلال‌ها یی است که کشند ـِ خورشید بر اقیانوس‌ها وارد می‌کند. این که در هر نقطه یِ خاص از دریاها سطح ـِ آب در هر لحظه چه قدر است، بسته‌گی دارد به این که موج ی که این اختلال ایجاد می‌کند چه گونه است. در مثال ـِ سطل، اگر تصادفاً بسامد ـِ اختلال ـِ اعمال شده نزدیک ـِ یک ی از بسامدها یِ طبیعی باشد، تشدید رخ می‌دهد، و سطح ـِ آب ـِ سطل حرکت‌ها یِ شدیدی خواهد داشت. در اقیانوس‌ها هم، اگر بسامدها یِ طبیعی نزدیک ـِ بسامدها یِ اعمال شده باشد، تشدید رخ می‌دهد. به این ترتیب است که در بعض ی از دریاها، ارتفاع ـِ مد تا حدود ـِ $10\,\mathrm{m}$ می‌رسد.

در معادله یِ (26)، T و δ تابعِ زمان اند (T در واقع همان زمان است که بر حسبِ زاویه بیان شده). پس پتانسیلِ کشندی تابع ی از زمان است، و این یعنی که میدانِ نیرو یِ کشندی ای که اطرافِ زمین حس می‌شود پایستار نیست!

اگر تصادفاً محورِ زمین بر صفحه یِ مداری اش عمود بود، δ ثابت، و برابرِ $90°$ بود. فرض کنیم چنین باشد. در این صورت، جمله یِ اوّلِ (26) تابعِ زمان نیست؛ جمله یِ دوّم با دوره یِ $24\,\mathrm{h}$، و جمله یِ سوّم با دوره یِ $12\,\mathrm{h}$ تابعِ زمان است. پس اگر مدارِ زمین به دورِ خورشید دایره بود، و محورِ زمین عمور بر صفحه یِ این دایره بود، نیرو یِ کشندِ خورشید سه بخش داشت: یک بخشِ ثابت (و البته تابعِ مکان)؛ بخش ی با تناوبِ $24\,\mathrm{h}$، و بخش ی با تناوبِ $12\,\mathrm{h}$. این سه بخشِ مختلف، منشاءِ سه نوع کشند در اقیانوس‌ها هستند. لاپلاس این‌ها را کشندها یِ گونه یِ اوّل، گونه یِ دوّم، و گونه یِ سوّم نامیده است.

چون محورِ زمین بر صفحه یِ مداری اش عمود نیست، δ هم با زمان تغییر می‌کند. چون مدارِ زمین به دورِ خورشید بیضی است، d در (16)، که فاصله یِ زمین تا خورشید است، با زمان به آرامی تغییر می‌کند. به این ترتیب، پتانسیلِ کشندی یِ خورشید تابع ی پیچیده از زمان است، و بنا بر این محاسبه یِ پاسخِ اقیانوس‌ها به کشندِ خورشید کارِ پیچیده ای است.

در به دست آوردنِ فرمولِ (9)، هیچ جا از این که جرمِ زمین خیل ی کم‌تر از جرمِ خورشید است استفاده نشد. پس، با تعویضِ $M_\oplus \leftrightarrow M_\odot$ در (9) فرمول ی به دست می‌آید که کشندها یِ ناشی از زمین بر خورشید را به دست می‌دهد. با همین استدلال، معلوم می‌شود که کشندها یِ ناشی از ماه بر زمین هم با فرمولِ زیر داده می‌شوند.

$$\vec{a}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{Moon}} = -G\, M_{\mathrm{Moon}} \frac{\vec{d}+\vec{r}}{\left|\vec{d}+\vec{r}\right|^3} + G\, M_{\mathrm{Moon}} \frac{\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}. \tag{27}$$

در این فرمول

$$d = 3.8\times 10^8\,\mathrm{m} \tag{28}$$

فاصله یِ ماه تا زمین است. اگر در (20) به جا یِ $M_\odot$ جرمِ ماه، و به جا یِ d فاصله یِ زمین تا ماه را بگذاریم، κ' ی به دست می‌آید که تعیین کننده یِ دامنه یِ کشندها یِ ناشی از ماه است. با محاسبه معلوم می‌شود

$$\kappa' := \frac{M_{\mathrm{Moon}}}{M_\oplus}\left(\frac{R_\oplus}{d}\right)^3 \simeq 6\times 10^{-8}. \tag{29}$$

این دو برابرِ κ یِ کشندها یِ خورشید است. پس، دامنه یِ کشندها یِ ناشی از ماه دو برابرِ دامنه یِ کشندها یِ ناشی از خورشید است، و بنا بر این کشندها یِ ناشی از ماه در جزرومدها مهم تر اند. توجّه کنید که شتابِ گرانشِ ماه در مرکزِ زمین بسیار کوچک‌تر از شتابِ گرانشِ خورشید در

مرکز ـِ زمین است، امّا، به علّت ـِ فاصله یِ کم ـِ ماه از زمین، در مقایسه با فاصله یِ خورشید از زمین، شتاب ـِ کشندی یِ ماه تقریباً دو برابر ـِ شتاب ـِ کشندی یِ خورشید است.

در مورد ـِ کشندها یِ ناشی از ماه، توجه به این نکته مهم است که باز هم فرمول ی نظیر (26) درست است، با این فرق که اینک T و δ باید دو زاویه ای باشند که موضع ـِ ماه در آسمان را بیان می‌کنند. چون روز ـِ متوسط ـِ قمری $24^{\mathrm{h}}\ 50^{\mathrm{m}}$ است، فرمول ـِ (26) در مورد ـِ ماه نیروها یی با دوره‌ها یِ $24^{\mathrm{h}}\ 50^{\mathrm{m}}$ و $12^{\mathrm{h}}\ 25^{\mathrm{m}}$ پیش‌بینی می‌کند.

در حالت ـِ کلی، باید پتانسیل ـِ کشند ـِ خورشید و پتانسیل ـِ کشند ـِ ماه را با پتانسیل‌ها یِ دیگر (گرانش ـِ زمین و گریزازمرکز) جمع کنیم، مجموع را به صورت ـِ تابع ی از مکان و زمان بنویسیم، و بکوشیم معادله‌ها یِ حرکت را حل کنیم. تحلیل ـِ دقیق بسیار پیچیده است. امّا نتیجه یِ زیر نسبتاً به ساده‌گی دیده می‌شود.

در اول و چهاردهم ـِ هر ماه ـِ قمری، ماه و خورشید و زمین تقریباً بر یک خط اند. در این حالت، کشندها یِ ناشی از ماه با کشندها یِ ناشی از خورشید جمع می‌شوند. در این حالت، دامنه یِ جزرومد ـِ اقیانوس‌ها بیشینه است. این را مِه‌کشند می‌گویند. در هفتم و بیست و یکم ـِ ماه‌ها یِ قمری (تربیع‌ها یِ اوّل و دوّم)، کشندها یِ ماه و خورشید هم را تا حدود ی خنثا می‌کنند. در این حالت، دامنه یِ جزرومد ـِ اقیانوس‌ها کمینه است. این را کِه‌کشند می‌گویند.

کشندها یِ ماه و خورشید، باعث ـِ تغییر ـِ شکل ـِ زمین ـِ جامد هم می‌شوند. هر چند دامنه یِ این تغییرِشکل‌ها بسیار کم است، امّا اثر ـِ بسیار مهم ی دارند. تصوّر کنید که گو یی از خمیر را از یک طرف بکشید و از طرف ـِ دیگر بفشرید، و این جهت‌ها را دائم عوض کنید. در این صورت گوی گرم می‌شود. علّت ـِ این گرم شدن لغزش ـِ لایه‌ها یِ مختلف ـِ لاستیک رو یِ هم است. در مورد ـِ زمین هم، لغزش ـِ لایه‌ها یِ مختلف، که معلول ـِ تغییرِشکل ـِ ناشی از کشندها یِ ماه و خورشید است، باعث ـِ گرم شدن ـِ درون ـِ زمین می‌شود. پس، به دلیل ـِ اصطکاک در زمین، انرژی یِ مکانیکی یِ سیستم ـِ زمین ـ خورشید (و مشابهاً سیستم ـِ زمین ـ ماه) ثابت نیست. امّا، چون این اصطکاک‌ها نیروها یِ داخلی اند، و قانون ـِ سوّم ـِ نیوتن در مورد ـِ آن‌ها درست است، تکانه یِ زاویه‌ای یِ سیستم ـِ زمین ـ خورشید (و مشابهاً سیستم ـِ زمین ـ ماه) ثابت است. می‌توان با تحلیل ـِ مبتنی بر پایسته‌گی یِ تکانه یِ زاویه‌ای، و کم شدن ـِ انرژی یِ مکانیکی، ثابت کرد که بر اثر ـِ کشندها یِ خورشید، به مرور زمین از خورشید دورتر می‌شود، و با سرعت ـِ کم‌تر ی به دور ـِ خود اش می‌چرخد؛ به نحو ی که در نهایت سرعت ـِ زاویه‌ای یِ مداری یِ زمین (یعنی طول ـِ سال) با سرعت ـِ زاویه‌ای یِ وضعی یِ زمین (یعنی طول ـِ شبانه‌روز) برابر می‌شود[4]. وقت ی چنین بشود، می‌گوییم زمین به خورشید قفل شده است (قفل‌شده‌گی یِ کشندی).

[4] K. R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley, 1971, p. 203, problem 13.

اکنون مدّت‌ها است که ماه به زمین قفل شده است، و دیگر کشندها یِ ناشی از زمین، باعث ِ گرم شدن ِ درون ِ ماه نمی‌شوند. به همین علّت هم هست که مدّت‌ها است ماه فعّالیت ِ آتش‌فشانی ندارد. در این جا خوب است توجّه کنیم که کشند ِ ناشی از زمین بر ماه با عدد ِ بی‌بُعد ِ زیر داده می‌شود

$$\kappa'' = \frac{M_\oplus}{M_{\text{Moon}}}\left(\frac{R_{\text{Moon}}}{d}\right)^3 \simeq 7\times 10^{-3}. \qquad (30)$$

این عدد تقریباً صدهزار برابر ِ عدد ِ بی‌بُعد ی است که شدّت ِ کشندها یِ ناشی از ماه بر زمین را تعیین می‌کند (یعنی صدهزار برابر ِ κ'). به همین علّت است که در سیستم ِ زمین ـ ماه، ابتدا ماه است که به زمین قفل شده.

۳ حد ِ رُش

وقت ی دو جسم ِ آسمانی از یک حد ی به هم نزدیک‌تر شوند، نیروها یِ کشندی یِ وارد بر آن‌ها ممکن است آن قدر قوی باشد که آن‌ها را از هم بگسلد. مثلاً وقت ی دنباله‌دار ِ شومِیکِر ـ لِوی، در 1993 نزدیک ِ مشتری شد، از هم گسیخت و حدود ِ 20 تکّه شد. در این بخش می‌خواهیم این پدیده را مرورد کنیم. برا یِ آن که استدلال را راحت‌تر دنبال کنیم، سیّاره را «زمین» و جسم ِ دیگر را «خورشید» می‌نامیم.

در به دست آوردن ِ (9) هیچ جا از این که مدار ِ زمین به دور ِ خورشید دایره است، یا مقیّد است استفاده نشد. مدار ِ زمین به دور ِ خورشید هر چه که باشد، شتاب ِ آن $-\dfrac{G\,M_\odot\,\vec{d}}{d^3}$ است، و فرمول ِ (9) درست است. پس، اگر جسم ی به سمت ِ سیّاره یا ستاره ای برود ــ وضعیّتی که در آن جسم آزادانه می‌اُفتد ــ یک نیرو یِ کشندی حس می‌کند. این نیرو یِ کشندی چنان است که می‌خواهد جسم را در امتداد ِ خط ِ واصل ِ دو جسم بکشد، و در امتداد ِ عمود بر آن بفشرد. به این ترتیب، انتظار داریم که اگر جسم به اندازه یِ کافی سفت نباشد، با نزدیک شدن به سیّاره یا ستاره پاره شود.

یک سنگ ِ یک‌پارچه را در نظر بگیرید. چه نیرو یی اجزا یِ مختلف ِ آن را کنار ِ هم نگه داشته؟ نیروها یِ اتمی و ملکولی. دقّت کنید که اگر سنگ را بشکنیم، و دو تکّه را از هم دور کنیم، چیز ی باعث ِ دوباره چسبیدن ِ آن دو قطعه به هم نمی‌شود. اکنون سنگ ی را در نظر بگیرید که رو یِ سطح ِ زمین است. چه چیز ی این سنگ را به زمین چسبانده است؟ نیرو یِ گرانشی. اگر با وسیله ای سنگ ی را بشکنیم، دوباره چسباندن ِ آن چندان ساده نیست، زیرا پیوندها یِ ملکولی شکسته شده اند. امّا اگر سنگ ی را از زمین بلند کنیم و بعد آن را ول کنیم، گرانش ِ بقیّه ی زمین سنگ را به سو یِ زمین می‌کشد.

اینک فرض کنیم زمین متشکل از تعداد ی سنگ باشد که بر اثر ِ گرانش دور ِ هم جمع شده اند و

کره ی ِ زمین را ساخته اند. نیرو ی ِ بسته‌گی ی ِ گرانشی ی ِ بخش ی به جرم ِ m واقع در سطح ِ زمین را در نظر بگیریم. اندازه ی ِ این نیرو هست

$$F_{\rm B} = G\,\frac{M_\oplus\, m}{R_\oplus^2} \tag{31}$$

و این نیرو هم‌واره به طرف ِ مرکز ِ زمین است. اندازه ی ِ نیرو ی ِ کشندی ی ِ خورشید، وارد بر همین ذره بر سطح ِ زمین، اگر جسم در امتداد ِ خط ِ واصل ِ زمین ـ خورشید باشد هست

$$F_{\rm T} = 2\,G\,\frac{M_\odot\, m}{d^3}\,R. \tag{32}$$

اگر زمین به اندازه ی ِ کافی به خورشید نزدیک باشد، این دو نیرو برابر می‌شوند. فاصله ای را که در آن فاصله این دو نیرو ـــ یعنی نیرو ی ِ کشندی در امتداد ِ خط ِ واصل ِ دو جسم (که می‌کوشد جسم را از هم بگسلد) با نیرو ی ِ بسته‌گی ی ِ گرانشی (که می‌کوشد اجزا ی ِ مختلف ِ جسم را کنار ِ هم نگه دارد) ـــ برابر می‌شوند، حد ِ رُش (Roche) می‌نامیم. واضح است که شرط ِ برابر شدن ِ این دو نیرو این است که

$$\frac{M_\oplus}{R_\oplus^3} = \frac{2\,M_\odot}{d_{\rm Roche}^3}. \tag{33}$$

چگالی ی ِ زمین را $\rho_\oplus$ و چگالی ی ِ خورشید را $\rho_\odot$ بنامیم، و جرم‌ها را بر حسب ِ چگالی‌ها بنویسیم. خواهیم داشت:

$$d_{\rm Roche} = R_\odot\,\left(2\,\frac{\rho_\odot}{\rho_\oplus}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{34}$$

از آن جا که چگالی ی ِ زمین تقریباً 5 برابر ِ چگالی ی ِ خورشید است، این حد کوچک‌تر از شعاع ِ خورشید است. یعنی زمین، هر قدر که به خورشید نزدیک شود، به علّت ِ کشند ِ خورشید از هم نمی‌گسلد. امّا استدلال ی که در بالا شد، برا ی ِ هر دو جسم ی که بین ِ آن دو جز نیرو ی ِ گرانش، نیرو یی نباشد درست است، و حد ی که در بالا به دست آمد، موسوم به حد ِ رُش، برا ی ِ هر دو جسم ی معنی دارد. دقّت کنید که حد ِ رُش به چگالی ی ِ دو جسم، و شعاع ِ جسم ِ «اول» بسته‌گی دارد. پس داریم

$$\begin{aligned} d_{\rm Roche}^{\rm rigid} &= R_1\,\left(2\,\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1.26\,R_1\,\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{35}$$

در این فرمول، مخصوصاً بالانویس ِ rigid را، که به معنی ی ِ صُلب است، گذاشته ایم. علّت آن است

که در استدلال ِ بالا، فرض کردیم که زمین در نتیجه ی ِ کشند ِ خورشید تغییرِشکل نمی‌دهد، و هم‌واره کره می‌ماند. این در مورد ِ سیّاره ای که جامد است درست است. امّا اگر سیّاره مایع باشد، به مرور که به خورشید نزدیک می‌شود تغییرِشکل می‌دهد، و بنا بر این دیگر شتاب ِ بسته‌گی ی ِ گرانشی اش $G\,M_\oplus/R_\oplus^2$ نیست. با محاسبه ای نسبتاً طولانی می‌توان نشان داد که در این صورت

$$d_{\rm Roche}^{\rm liquid} \simeq 2.42\,R_1\,\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (36)$$

در عمل اجسام نه صُلب اند نه مایع، بنا بر این بهتر است حد ِ رُش را به شکل ِ $d_{\rm Roche} \sim 2\,R_1\,\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/3}$ به ذهن بسپاریم.

اکنون آماده ایم که نزدیک شدن ِ یک دنباله‌دار به یک جسم ِ دیگر (خورشید یا یک ی از سیّاره‌ها) را تحلیل کنیم. چگالی ی ِ متوسط ِ دنباله‌دارها حدود ِ $500\,{\rm kg/m^3}$، و چگالی ی ِ مشتری $\sim 1.4\times 10^3\,{\rm kg/m^3}$ است. با جاگذاری ی ِ این دو چگالی، به جا ی ِ ρ_1 و ρ_2 در فرمول‌ها ی ِ (35) و (36)، می‌بینیم که اگر دنباله‌دار صلب ی به فاصله ی ِ $1.8\,{\rm R_{Jupiter}}$ از مرکز ِ مشتری، یعنی $\sim 60\,000\,{\rm km}$ از سطح ِ مشتری برسد، بر اثر ِ کشند ِ مشتری از هم می‌گسلد.

توجّه به این نکته لازم است که حد ِ رُش برا ی ِ سیستم‌ها یی بامعنی است که اجزاء ِ آن را گرانش ِ متقابل به هم پیوند داده باشد. در مورد ِ یک سفینه، که از آلیاژها ی ِ محکم ِ آلومینیوم ساخته می‌شود، حد ِ رُش بی‌معنی است. به این ترتیب می‌توان سفینه‌ها یی با چگالی ی ِ کم ($\rho_1 \ll \rho_2$) ساخت و آن‌ها را به سطح ِ سیّاره‌ها رساند، بی آن که پیش از رسیدن به سیّاره از هم بگسلند.

با نزدیک شدن به یک جسم ِ گرانده ی ِ کروی، یا نقطه‌ای، نیرو ی ِ کشندی افزایش می‌یابد. این افزایش با عکس ِ توان ِ سوّم ِ فاصله متناسب است. احتمالاً سفت‌ترین چیز ی که در طبیعت داریم پروتون است ـــ دو کوارک ِ u و یک کوارک ِ d که آن‌ها را نیرو ی ِ قوی ی ِ هسته‌ای کنار ِ هم نگه داشته است. سفتی ی ِ پروتون هم بی‌نهایت نیست، به این معنی که اگر با نیرو یی به اندازه ی ِ قوی پروتون را از دو طرف بکشیم، پروتون هم تاب نخواهد آورد. اینک پروتون ی را در نظر بگیریم که به یک جسم ِ گرانده ی ِ نقطه‌ای نزدیک می‌شود. در فاصله‌ها ی ِ بسیار کوچک از جسم ِ گرانده، نیرو ی ِ کشندی چنان قوی می‌شود که پروتون را از هم می‌گسلد. جسم ِ گرانده ی ِ نقطه‌ای را اصطلاحاً سیاه‌چاله می‌گویند، و آن چه هم‌اینک دیدیم معمولاً با این جمله بیان می‌شود: میدان ِ گرانش رو ی ِ سیاه‌چاله بی‌نهایت است، به این معنی که شتاب ِ کشندی با نزدیک شدن به سیاه‌چاله به بی‌نهایت میل می‌کند. هر چند استدلال ی که در این مقاله آوردیم بر اساس ِ گرانش ِ نیوتنی است، معلوم می‌شود که نتیجه ـــ واگرا شدن ِ شتاب ِ کشندی رو ی ِ سیاه‌چاله ـــ در نظریه ی ِ درست‌تر ِ نسبیّت ِ عام هم به همان شکل ِ $a \propto G\,M/d^3$ درست است.

۴ برا ی ِ مطالعه ی ِ بیش‌تر

نوشتن ِ معادله‌ها ی ِ حرکت در دست‌گاه‌ها ی ِ نالخت در اغلب ِ کتاب‌ها ی ِ مکانیک هست، از جمله در 1. برا ی ِ کسان ی که می‌خواهند جزرومدها ی ِ اقیانوس‌ها را مطالعه کنند 2 متن ِ بسیار خوب ی است. سخن‌رانی ی ِ لُرد کِلوین در مورد ِ کشندها [3]، با آن که تقریباً مال ِ 130 سال پیش است، متن ی است بسیار خوب که آن را می‌توانید رو ی ِ اینترنت بیابید. در مورد ِ حد ِ رُش با جزئیات ِ بیش‌تر باید به کتاب‌ها ی ِ مربوط به شکل‌گیری ی ِ سیّاره‌ها رجوع کنید، مثلاً به 4.

1. K. R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley, 1971

2. George W. Platzman, "Ocean Tides and Related Waves", in W. H. Reid (editor) *Mathematical Problems in the Geophysical Sciences, vol. 2 Inverse problems, Dynamo Theory, and Tides*, Lectures in Applied Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, 1971; pp. 239-291.

3. Sir William Thomson (Lord Kelvin), *The Tides*, Evening Lecture To The British Association At The Southampton Meeting on Friday, August 25, 1882, `http://zapatopi.net/kelvin/papers/the_tides.html`

4. G. H. A. Cole, M. M. Woolfson, *Planetary Science: The Science of Planets Around Stars*, CRC Press, 2002, pp. 395-398.