فضازمان ِ ریندلِر ـ II: ژئودزیک‌ها

احمد ِ شریعتی

چکیده: ژئودزیک‌ها ی ِ زمان‌گونه و نورگونه ی ِ فضازمان ِ ریندلِر، با محاسبه ی ِ مستقیم تعیین می‌شوند. روش ِ این محاسبه همان است که برا ی ِ به دست آوردن ِ ژئودزیک‌ها ی ِ هر فضازمان ی در نسبیّت ِ عام به کار می‌رود. دیده می‌شود که جهان‌خط ِ ذرّه ی ِ مادّی در زمان ِ ریندلری ی ِ بی‌نهایت، ولی در ویژه‌زمان ِ متناهی به افق می‌رسد. جهان‌خط ِ ذرّه ی ِ نورگونه هم در زمان ِ ریندلری ی ِ بی‌نهایت، ولی در پارامتر ِ مستوی ی ِ متناهی افق را قطع می‌کند. این درست همان چیز ی است که برا ی ِ ذرّه‌ها ی ِ مادّی و نورگونه در هنگام ِ عبور از افق ِ سیاه‌چاله روی می‌دهد.

1 مقدّمه

فضازمان ِ ریندلِر یعنی مجموعه ی ِ

$$\mathcal{R} := \left\{(\theta, \xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi > 0\right\}, \tag{1}$$

هم‌راه با متریک ِ

$$\mathrm{d}s^2 = -\xi^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2. \tag{2}$$

این متریک، در $\xi = 0$ تکین است، به این معنی که در $\xi = 0$ ماتریس ِ متریک وارون‌پذیر نیست، و ابررویه ی ِ $\xi = 0$ یک ابررویه ی ِ فضاگونه نیست، نورگونه است. به این ابررویه ی ِ نورگونه افق ِ فضازمان ِ ریندلِر می‌گویند. ضمناً، این فضازمان، چیز ی نیست جز ناحیه ای خاص، موسوم به ناحیه ی ِ I، از فضازمان ِ مینکفسکی. خواننده ای را که با این نکات آشنا نیست به مقاله ی ِ [1] ارجاع می‌دهم.

فضازمان ِ ریندلِر ساختار ِ جالب ی دارد که کمک می‌کند بفهمیم در اطراف ِ اُفُق ِ سیاه‌چاه‌ها چه اتفاق ی می‌اُفتد. برا ی ِ این کار باید نخست ژئودزیک‌ها ی ِ زمان‌گونه و نورگونه ی ِ این فضازمان را

بیابیم. این کار، با استفاده از تبدیل ی که متریک ِ ریندلِر را به متریک ِ مینکُفسکی می‌نگارد بسیار ساده است، امّا برا یِ آن که با روش ِ کار در نسبیّت ِ عام آشنا شویم، به نحو ِ دیگر ی عمل می‌کنیم.

2 ژئودزیک‌ها

در هر فضا یِ ریمانی یا شبه‌ریمانی ای، می‌توان به کمک ِ متریک دو کنش تعریف کرد:

$$S_1 := \int \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}u}}\,du = \int ds, \tag{3}$$

$$S_2 := \int \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}u}\,du = \int L\,du. \tag{4}$$

$\mathrm{d}s$ عنصر ِ طول است، پس S_1 طول ِ خم است. L لاگرانژی یِ یک ذرّه یِ آزاد است، البتّه فقط انرژی یِ جنبشی که بر جرم ِ ذرّه تقسیم شده. پس S_2 کنش ِ متداول ِ مکانیکی است. ژئودزیک‌ها یِ زمان‌گونه معادله‌ها یی هستند که شرط ِ $\delta S_1 = 0$ و $\delta S_2 = 0$ را بیان می‌کنند. این دو شرط معادل اند. وردش گرفتن از S_2 راحت‌تر است، و خیل ی سریع می‌توان به معادله‌ها یِ حرکت رسید. نتیجه این است:

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\lambda}{\mathrm{d}u^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}u} = 0, \tag{5}$$

که در این جا

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\lambda\sigma}\left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\xi^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial\xi^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial\xi^\mu}\right), \tag{6}$$

مؤلفه‌ها یِ هم‌وستار، یا اصطلاحاً نمادها یِ کریستُفِل اند. $g^{\lambda\sigma}$ ها هم عناصر ِ ماتریس ِ وارون ِ ماتریس ِ $[g_{\mu\nu}]$ اند.

L برا یِ ذرّه ای که در $\mathcal{R}$ آزادانه حرکت می‌کند هست

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2 - \xi^2\,\dot\theta^2\right). \tag{7}$$

در این فرمول، نقطه یعنی مشتق‌گیری نسبت به پارامتر ی که تحول را توصیف می‌کند (u).

معادله‌ها یِ اُیلِر ـ لاگرانژ را می‌نویسیم. معادله‌ها یِ η و ζ بسیار ساده اند ــــ لاگرانژی بسته‌گی یِ صریح به η و ζ ندارد، و $\dot\eta$ و $\dot\zeta$ ثابت اند. در واقع معادله‌ها یِ تحول ِ η و ζ به شکل ِ $\ddot\eta = \ddot\zeta = 0$ اند. از این دو معادله نتیجه می‌شود که

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \Gamma^3_{\mu\nu} = 0, \qquad \mu,\nu \in \{0,1,2,3\} \tag{8}$$

معادله یِ تحولِ θ هم ساده است.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \xi^2\,\dot\theta = \text{constant}. \tag{9}$$

با انتخابِ مناسبِ پارامترِ u، می‌توان این ثابت را 1 کرد.

$$\dot t = \frac{1}{\xi^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\xi^2}. \tag{10}$$

ضمناً، اگر معادله یِ اُیلِر ـ لاگرانژِ بالا را باز کنیم، می‌بینیم

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}u^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 0 \tag{11}$$

که از این جا نتیجه می‌گیریم

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{\xi}, \qquad \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = 0. \tag{12}$$

می‌ماند معادله یِ ξ که چنین است:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\theta^2} + \xi\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 0. \tag{13}$$

از این تساوی یِ آخر نتیجه می‌گیریم که

$$\Gamma^1_{00} = \xi, \qquad \Gamma^1_{ij} = \Gamma^1_{0i} = \Gamma^1_{i0} = 0, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,. \tag{14}$$

از ترکیبِ $\dot\theta = 1/\xi^2$ با $\ddot\xi + \xi\,\dot\theta^2 = 0$ می‌رسیم به معادله یِ

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{\xi^3} = 0. \tag{15}$$

اگر u را «زمان» تصوّر کنیم، این معادله، درست مانندِ معادله یِ حرکتِ ذرّه ای است به جرمِ 1، در امتدادِ محورِ ξ، البتّه برا یِ $\xi > 0$، در میدانِ نیرو یِ $-1/\xi^3$، که آن را می‌توان از پتانسیلِ $V = 1/(2\,\xi^2)$ به دست آورد. این پتانسیل را به صورتِ دیگر ی هم می‌توانستیم ببینیم. دقّت کنیم که لاگرانژیِ (7) به پارامترِ u بسته‌گی یِ صریح ندارد. پس «انرژی» که به شکلِ $L - \sum_\mu \dot\xi^\mu(\partial L/\partial\dot\xi^\mu)$ تعریف می‌شود ثابت است. این انرژی، با آن چه معمولاً تعریف می‌شود در یک علامتِ منفی فرق دارد. علّت را به‌زودی خواهیم دید. ضمناً چون لاگرانژی تنها جمله‌ها یِ جنبشی دارد، یعنی در سرعت‌ها هم‌گنِ از مرتبه یِ 2 است، پس انرژی همان لاگرانژی است. به این ترتیب، با استفاده از $\dot\theta = 1/\xi^2$ می‌بینیم

$$-\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\left(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2\right) - \frac{1}{2\,\xi^2}. \tag{16}$$

علامتِ منفی در ابتدا یِ فرمولِ بالا (تعریفِ E) از همان تعریفِ نامتداولِ ما برا یِ انرژی آمده است، و ضریبِ $1/2$ هم برا یِ ساده‌تر شدنِ فرمول‌ها یِ بعدی وارد شده. برا یِ آن که ببینیم

چرا خوب است انرژی را این طور تعریف کنیم، بیاید نگاه ی به عنصر ِ ویژه‌زمان بیندازیم. می‌دانیم $\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2$، و بنا بر این، اگر به هم‌راه ِ ذرّه ای که معادله‌ها یش در بالا آمده اند حرکت کنیم، ساعت ی که در دست داریم $\mathrm{d}\tau$ را نشان می‌دهد که برابر است با

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 &= \left[\xi^2\,\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\zeta^2\right] && (17)\\
&= \left[\xi^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]\mathrm{d}u^2 && (18)\\
&= \left[\frac{1}{\xi^2} - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2\right]\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\,\mathrm{d}\theta^2 && (19)\\
\mathrm{d}\tau^2 &= E\,\xi^4\,\mathrm{d}\theta^2 && (20)\\
& && (21)
\end{aligned}$$

پس، تعریف ِ ما از انرژی این حُسن را دارد که برا ی ِ ذرّه ی ِ مادّی مثبت است، و برا ی ِ فتون، یعنی ذرّه ای که بر یک ژئودزیک ِ نورگونه حرکت می‌کند صفر است. پس، برا ی ِ ذرّه ی ِ مادّی داریم

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{E}\,\xi^2\,\mathrm{d}\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{E}\,\xi^2. \tag{22}$$

ذرّه ای مادّی را در نظر بگیریم که تنها در امتداد ِ محور ِ ξ حرکت کند، در این صورت معادله ی ِ پایسته‌گی ی ِ انرژی می‌گوید

$$\dot{\xi}^2 - \frac{1}{\xi^2} = -E. \tag{23}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u} &= \pm\frac{\sqrt{1 - E\,\xi^2}}{\xi}, && (24)\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \pm\xi\,\sqrt{1 - E\,\xi^2}, && (25)\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \pm\frac{\sqrt{1 - E\,\xi^2}}{\sqrt{E}\,\xi} && (26)
\end{aligned}$$

در فرمول‌ها ی ِ بالا، علامت ِ منفی مربوط به حالت ی است که ذرّه به سمت ِ افق، یعنی به سمت ِ $\xi = 0$ بیفتد، و علامت ِ مثبت مربوط به گریز یا فرار از $\xi = 0$ است. هر سه ی ِ این معادله‌ها را می‌توانیم حل کنیم. برا ی ِ ذرّه ی ِ مادّی به دو معادله ی ِ دوّم و سوّم علاقه‌مندیم. مورد ی را در

نظر می‌گیریم که ذرّه در لحظه ی ـ $\theta = \tau = 0$ از نقطه ی ـ $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$، با سرعت ـ صفر رها شود (منظور از سرعت بردار ـ $(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}\theta)$ است). مقدار ـ E را از شرط ـ آغازین می‌دانیم ($E = 1/\xi_0^2$). بنا بر این داریم

$$\theta = \ln\left(\frac{\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}}{\xi}\right) \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\xi_0}{\cosh\theta} \tag{27}$$

$$\tau = \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2} \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\xi_0^2 - \tau^2} \tag{28}$$

از شکل ـ دو تابع ـ فوق واضح است که

$$\lim_{\xi \to 0^+} \theta = \pm\infty, \tag{29}$$

$$\lim_{\xi \to 0^+} \tau = \xi_0. \tag{30}$$

این نتیجه بسیار مهم است. می‌بینیم که ذرّه ای که در $\mathcal{R}$ آزادانه می‌اُفتد، در زمان ـ ∞ به افق می‌رسد، در حال ی که ساعت ی که هم‌راه ـ ذرّه است، وقت ی ذرّه به افق می‌رسد مقدار ـ متناهی ی ـ ξ_0 را نشان می‌دهد! ضمناً ذرّه حتماً در $\theta \to -\infty$ در افق بوده، و در این حالت هم ویژه‌زمان مقدار ی متناهی ($-\xi_0$) است.

ژئودزیک‌ها ی ـ نورگونه را هم می‌توان حساب کرد. البتّه، در مورد ـ ذرّه ای مثل ـ فتون بی‌معنی است که بگوییم در $\theta = 0$ فتون را از حالت ـ «سکون» رها می‌کنیم. به علاوه، ویژه‌زمان ـ ساعت ی که هم‌راه ـ فتون حرکت کند هم بی‌معنی است. بنا بر این، تنها معادله ی ـ بسته‌گی ی ـ ξ به u یا θ را می‌توانیم حل کنیم. این دو معادله، و حل‌ها شان چنین اند:

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u} = \pm\frac{1}{\xi} \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\xi_0^2 \pm 2\,(u - u_0)}\,, \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = \pm\xi \quad \Rightarrow \quad \xi = \xi_0\, e^{\pm\theta}\,. \tag{32}$$

باز هم به جواب ـ تورونده دقّت کنیم (یعنی به جواب ی که با علامت ـ منفی به دست می‌آید). باز هم ξ به ازا ی ـ یک پارامتر ـ متناهی ی ـ u (در این جا $u = \xi_0^2/2 + u_0$) صفر می‌شود، که یعنی فتون به ازا ی ـ یک مقدار ـ متناهی از پارامتر ـ مُستَوی اش به افق می‌رسد.[1] امّا، $\xi(\theta)$ تنها به ازا ی ـ $\theta \to \infty$ صفر می‌شود، که یعنی فتون در «زمان» ـ ∞ به افق می‌رسد. در این جمله منظور از «زمان»، زمان ـ مختصّاتی ی ـ ریندلِری است. جواب ـ بیرون‌رونده هم ویژه‌گی ی ـ مشابه ی دارد.

[1] پارامتر ـ u را برا ی ـ فتون پارامتر ـ مُستَوی می‌گویند.

3 تکمیل ِ فضازمان

بگذارید چیزها یی را که تا این جا فهمیدیم فهرست کنیم.

۱) از معادله ی ِ (15) واضح است که هر ذرّه ای (چه مادّی چه فتون) جذب ِ افق، یعنی $\xi = 0$ می‌شود، و این ربط ی به سرعت ِ ذرّه ندارد.

۲) اگر ذرّه ای مادّی در نقطه ای آزادانه رها شود، در زمان ِ مختصّاتی ی ِ ∞ ولی در ویژه‌زمان ِ متناهی به افق می‌رسد. می‌توان ثابت کرد که جهان‌خط ِ همه ی ِ ذرّه‌ها ی ِ مادّی، هم در $\theta \to +\infty$ هم در $\theta \to -\infty$ به افق می‌رسند، و در همه ی ِ حالت‌ها ویژه‌زمان ِ رسیدن به افق متناهی است.

۳) جهان‌خط ِ فتون‌ها یا در $\theta \to \infty$ یا در $\theta \to -\infty$ به افق می‌رسد، و در هر دو حالت پارامتر ِ مستوی ی ِ فتون (برا ی ِ رسیدن به افق) متناهی است.

تعریف. می گوییم فضازمان ی ژئودزیکی کامل است، اگر همه ی ِ ژئودزیک‌ها یش را بتوان تا پارامتر ِ مستوی ی ِ $\pm\infty$ امتداد داد.

اگر از صفحه ی ِ اقلیدسی یک نقطه (یا مجموعه ای بزرگ‌تر) را بردارید، فضا یی به دست می آید که ژئودزیکی کامل نیست (به این علّت ِ ساده که خط ی را که از آن نقطه می‌گذرد، نمی‌توان چنان پیمود، که پارامتر ِ مستوی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، و ضمناً یک ژئوزیک باشد ـــ توجّه کنید که خط در صفحه ی ِ اقلیدسی تنها در صورت ی ژئودزیک است که با سرعت ِ ثابت پیموده شود).

پس، آن چه در چند صفحه ی ِ گذشته ثابت کردیم، به اصطلاح ِ ریاضی‌پیشه‌ها، یعنی این که $\mathcal{R}$ ژئودزیکی کامل نیست. در این مرحله، برا ی ِ ریاضی‌پیشه (یا فیزیک‌پیشه) این پرسش مطرح می‌شود که: نکند خمینه ای بزرگ‌تر هست، که $\mathcal{R}$ بخش ی از آن است؟

برا ی ِ کس ی که از پیش می‌داند $\mathcal{R}$ بخش ِ I از فضازمان ِ مینکفسکی است، پاسخ ِ این پرسش بدیهی است. امّا فرض کنید این را نمی‌دانستیم. فرض کنید از متریک ِ ریندلِر شروع کرده ایم، ژئودزیک‌ها یش را یافته ایم، و دریافته ایم که ژئودزیکی کامل نیست. کار ی که باید بکنیم این است که به دنبال ِ تغییرِمتغیّر ی بگردیم که نشان دهد آن طرف ِ افق ِ $\mathcal{R}$ هم فضازمان ی است بامعنی. این کار شدنی است، و نتیجه همان است که انتظار داریم: فضازمان ِ ریندلِر را می‌توان به یک فضازمان ِ بزرگ‌تر گسترش داد، طور ی که این فضازمان ِ بزرگ‌تر از لحاظ ِ ژئودزیکی کامل باشد. آن چه به دست می آید فضازمان ِ مینکفسکی است.

4 تعبیر

وقت ی $\mathcal{R}$ را به صورت ـِ ناحیه یِ I ـِ فضازمان ـِ مینکفسکی نشان می‌دهیم، می‌بینیم در افق اتفاق ـِ عجیب ی نمی‌افتد. در فضازمان ـِ مینکفسکی، جهان‌خط ـِ ذرّه یِ مادّی خط ی است راست با ضریب‌زاویه ای بیش‌تر از 1 (یعنی $1/c$)، مثلاً موازی‌ِ محور ـِ T، که افق را در دو نقطه، گذشته و آینده می‌برد. امّا، وقت ی همین خط را بر حسب ـِ «زمان» و «مکان» ـِ ریندلری، یعنی θ و ξ می‌پیماییم، به علّت ـِ تعریف ـِ خاص ـِ این مختصّه‌ها، می‌بینیم در محل ـِ تقاطع ـِ خط با افق $\theta = \pm\infty$ است یا به بیان ـِ درست‌تر، در این محل θ خوش‌تعریف نیست. در مورد ـِ فتون یا هر ذرّه یِ بی‌جرم ـِ دیگر ی، جهان‌خط در فضازمان ـِ مینکفسکی خط ی است با شیب ـِ 1 (یعنی $1/c$) که افق را در تنها یک نقطه می‌برد، یا گذشته یا آینده. باز هم، رسیدن ـِ فتون به افق، در آینده، یا گسیل اش از افق، در گذشته، پدیده یِ عجیب ی نیست، امّا بر حسب ـِ زمان ـِ ریندلِری در $\theta = \pm\infty$ روی می‌دهد.

پس، در $\mathcal{R}$ ذرّه‌ها از افق بر می‌آیند، و به افق باز می‌گردند، و فاصله یِ بین ـِ این بر آمدن و باز گشتن بر حسب ـِ زمان ـِ ریندلِری ∞ است.

5 مراجع

[1] احمد شریعتی، فضازمان ـِ ریندلِر، گاما، ش ۳، تابستان ـِ ۱۳۸۳، صص. ۴۸ تا ۵۷