رفتار ـ نابهنجار ـ موج ـ تخت در نزدیکی ـ نقطه یِ کانون

ابراهیم ـ کریمی [1]

e_karimi@uok.ac.ir

در این مقاله، توزیع ـ شدت و فاز ـ مربوط به یک موج ـ تخت ـِتک‌فام که به‌وسیله یِ یک روزنه یِ دایره ای پراشیده شده‌است را در اطراف ـ نقطه یِ کانون بررسی می‌کنیم و دامنه یِ این موج را با استفاده از انتگرال ـ هویگنس [a]ـ فرنل [b] بدون ـ در نظر گرفتن ـ ابیراهی به دست آورده و پربند هایِ توزیع ـ شدت و فاز را در نزدیکی ـ نقطه یِ کانون رسم کرده ایم. در نهایت با تعریف ـ نقطه یِ تکین ـ فازی به بررسی ـ رفتار ـ یک موج ـ غیر ـ تک‌فام (ترجیحاً با توزیع ـ فرکانسی ـ گاوسی) حول ـ نقطه یِ تکین ـ فازی می‌پردازیم.

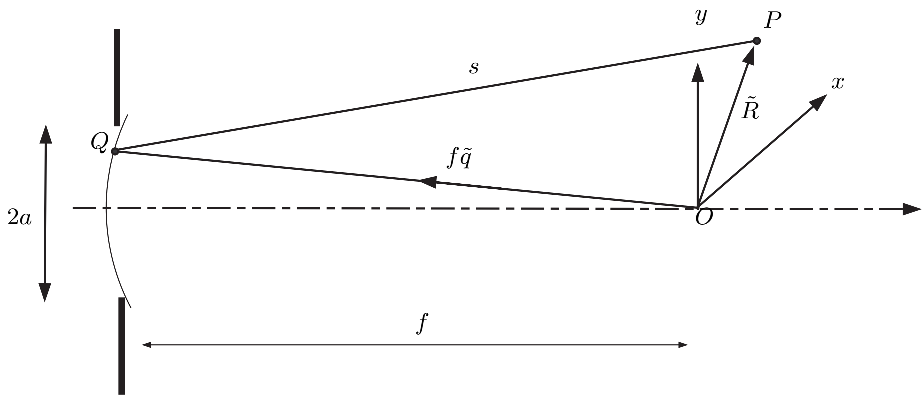
واژه های ـ کلیدی: پراش، نقطه یِ تکین ـ فازی، تعدیل کننده یِ طیف.

1 مقدمه

فیزیک پیشه ها معمولاً به‌بررسی یِ شدت و تغییرات ـ آن می‌پردازند و کم‌تر به‌بررسی یِ کمیت هایِ اُپتیکی در نقاطی که در آن‌ها شدت صفر است توجه می‌کنند. در اطراف ـ نقاطی که شدت در آن‌ها صفر است، کمیت هایِ اُپتیکی رفتار هایِ جالب ی دارند. به‌عنوان مثال: طیف، قطبش و تکانه یِ زاویه ایِ یِ نور در این نقاط تغییرات ـ ناگهانی خواهند داشت [1].

برا یِ درک ـ اولیه یِ مسئله یِ مثالی را مطرح می‌کنیم؛ رو یِ کره یِ زمین برا یِ هر نصف‌النهار یک ساعت ـ محلی تعریف می‌شود و در کل 24 نصف‌النهار معادل با طول مدت ـ شبانه‌روز برا یِ کره یِ زمین تعریف می‌شود. حال یک ی از نقاط ـ تلاقی یِ این 24 نصف‌النهار را (قطب ـ شمال یا جنوب) در نظر بگیرید. برا یِ این نقاط نمی توان یک ساعت ـ محلی یِ مشخص تعریف کرد ولی در نزدیک یِ این نقاط با یک جابه‌جایی یِ کوچک، ساعت ـ محلی به‌اندازه‌ای قابل ـ توجه تغییر می‌کند. این نقاط را می‌توان نقاط ـ تکین نامید، زیرا برایِ این نقاط نمی‌توان ساعت محلی یِ مشخصی را تعریف نمود.

[1] سنندج—دانش‌گاه ـ کردستان، دانش‌کده یِ علوم، گروه فیزیک.



شکل ۱: نمایِ موج ـ پراشیده شده از روزنه یِ دایره ای در شکل ـ بالا نشان داده شده، Q نقطه ای رویِ جبهه یِ موج، P نقطه یِ مشاهده و O کانون است.

بررسی یِ کمیت هایِ اُپتیکی در نزدیکی یِ نقاط ـ تکین ـ فازی شاخه‌ای جدید از علم ـ اُپتیک را به وجود آورده که در سال‌هایِ اخیرمورد توجه فیزیک پیشه‌ها قرار گرفته است [1]. در سال هایِ اخیر چندین مقاله یِ متفاوت در همین زمینه ارائه شده است که این امر ما را واداشت تا به بررسی ـ این مسئله و نتایج ـ این کار ها بپردازیم [2-3].

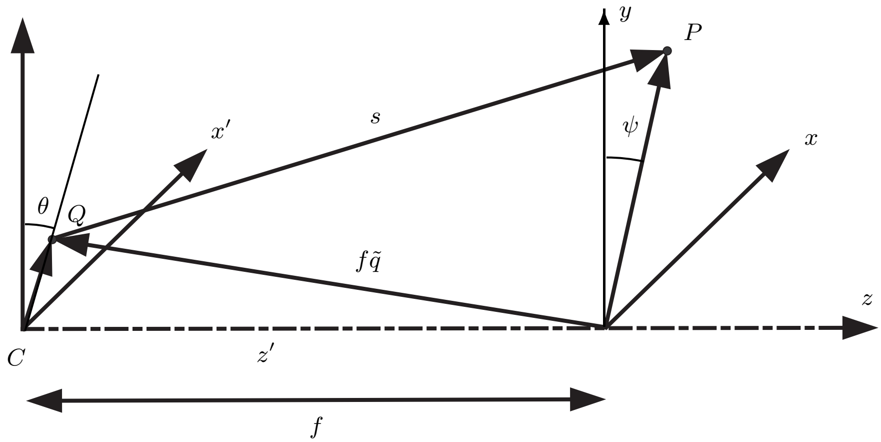
در این مقاله به بررسی ـ توزیع ـ شدت و فاز در اطراف ـ نقطه یِ کانونی ـ (و نقاط ـ تکین ـ فازی) یک موج ـ تخت ـ پراشیده شده از یک روزنه یِ دایره ای می‌پردازیم.

موج ـ تک‌فام ـ تختی را در نظر بگیرید که از یک روزنه یِ دایره ای به شعاع ـ a پراشیده شده و در نقطه ای مانند ـ O کانونی می‌شود. موج ـ پراشیده شده به صورت ـ قطار ـ موجی (کروی) است که در نقطه یِ O کانونی می‌شود. دامنه یِ موج ـ پراشیده شده در نقطه یِ P، که به وسیله یِ بردار ـ $\widetilde{R}$ نسبت به نقطه یِ کانون O مشخص می‌شود، با استفاده از اصل ـ هویگنس [a]ـ فرنل [b] در تقریب پیرامحوری برابر خواهد بود با [4]:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\,\frac{A\,e^{-i\,k\,f}}{f}\iint_{\Sigma}\frac{e^{i\,k\,s}}{s}\,d\sigma. \qquad (1)$$

که در آن f فاصله یِ نقطه یِ کانون تا مکان روزنه، s فاصله یِ نقطه یِ مشاهده تا نقطه ای رویِ جبهه یِ موج Q، $\frac{A}{f}$ دامنه یِ موج ـ فرودی در نقطه یِ Q، k و λ به ترتیب عدد و طول ـ موج ـ موج ـ فرودی و $d\sigma$ المان ـ سطح ـ روزنه است (شکل ـ ۱).

به منظور ـ محاسبه یِ انتگرال ـ رابطه یِ (1) مبداء مختصات ـ دکارتی را در نقطه یِ O در نظر



شکل ۲: z محور ـ اُپتیکی، xyz صفحه یِ تصویر و $x'y'z'$ صفحه یِ روزنه هستند [4].

می‌گیریم به گونه ای که محور ـ z ها در راستایِ انتشار ـ موج ـ اولیه (عمود بر صفحه یِ روزنه) — همان محور ـ اُپتیکی سیستم — قرار گیرد.

مختصات ـ نقاط ـ P و Q برابر است با(شکل ـ ۲):

$$P\begin{cases} x = r\,\sin\psi \\ y = r\,\cos\psi \\ z = z \end{cases} \qquad Q\begin{cases} x' = \rho\,\sin\theta \\ y' = \rho\,\sin\theta \\ z' = -\sqrt{f^2-(a\rho)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

که در آن ρ پارامتر ـ مقیاس ـ روزنه یِ دایره ای، r فاصله یِ نقطه یِ P از کانون و بنابرتقارن ـ استوانه ایِ مسئله زوایایِ سمتیِ ψ و θ برایِ نقاط ـ P و Q نسبت به محور ـ y ها تعریف شده است [4].
همان طور که گفته شد مسئله را در تقریب ـ پیرا محوری بررسی می‌کنیم. تحت ـ این شرط می‌توان از تغییرات ـ عامل ـ فرود صرف نظر کرد، در نتیجه با تقریب ـ خوبی داریم:

$$\begin{aligned} s-f &\simeq -\widetilde{q}\cdot\widetilde{R}, \\ &= -\frac{x\,x'+y\,y'+z\,z'}{f}. \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن $\widetilde{q}$ بردار ـ یکه در راستایِ OQ است. با جای گذاریِ رابطه یِ (2) در (3) بدست خواهیم آورد:

$$s-f = -\frac{a\,\rho\,r\cos(\theta-\psi)}{f} - z\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a\rho}{f}\right)^2+\cdots\right). \tag{4}$$

با تعریف ِ پارامتر هایِ بی‌بُعد ِ زیر[2]

$$\begin{cases} u := \frac{2\pi}{\lambda}\ \left(\frac{a}{f}\right)^2 z \\ \\ v := \frac{2\pi}{\lambda}\ \left(\frac{a}{f}\right)\ r \end{cases} . \tag{5}$$

و استفاده از این واقعیت که ($f \gg a \gg \lambda$)، رابطه يِ تقریبيِ (4) به صورت ِ زیر در خواهد آمد:

$$k(s-f) = -v\,\rho\cos(\theta-\psi) + \left(\frac{f}{a}\right)^2 u - \frac{1}{2}u\rho^2. \tag{6}$$

که در آن از توان هایِ دوم به بعد ِ $\frac{a\rho}{f}$ صرف‌نظر کرده ایم. بنابراین رابطه يِ (1) به صورت ِ زیر ساده خواهد شد[3]:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\ \frac{a^2 A}{f^2}\ e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-i\left(v\,\rho\cos(\theta-\psi)+\frac{1}{2}u\rho^2\right)}\,\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{7}$$

با انتگرال گیری نسبت به θ خواهیم داشت:

$$U(P) = -\frac{2\pi\,a^2 A\,i}{\lambda\,f^2}\,e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2 u} \int_0^1 J_0\,(v\,\rho)\ e^{-\frac{i}{2}u\rho^2}\ \rho\,d\rho. \tag{8}$$

که در آن $J_0(v\,\rho)$ تابع ِ بسل ِ مرتبه يِ صفرُم است [5]. به تر است رابطه يِ بالا را به شکل ِ زیر بنویسیم:

$$U(P) = \frac{\pi\,a^2 A}{\lambda\,f^2}\ e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\left(\frac{f}{a}\right)^2 u\right)}[C(v,u) - i\,S(v,u)]. \tag{9}$$

که در آن $S(v,u)$ و $C(v,u)$ به صورت ِ زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} C(v,u) &:= 2\int_0^1 J_0\,(v\,\rho)\cos\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)\rho\,d\rho, \\ S(v,u) &:= 2\int_0^1 J_0\,(v\,\rho)\sin\left(\frac{1}{2}u\rho^2\right)\rho\,d\rho. \end{aligned} \tag{10}$$

عبارت هایِ بالا را می‌توان برحسب ِ توابع ِ لومل [i] بیان نمود [5].

2 توزیع ِ شدت در نزدیکی ِ کانون

در بخش ِ قبل دامنه يِ موج ِ پراشیده شده در نزدیکی ِ نقطه يِ کانون را بدست آوردیم (رابطه يِ (8)). شدت در نزدیکی ِ نقطه يِ کانون برابر است با:

[2] این پارامتر ها همراه با ψ مکان ِ نقطه يِ مشاهده را به طور ِ کامل (منحصر به فرد) مشخص خواهند نمود، امّا چون مسئله دارایِ تقارن استوانه ای است نقش ِ ψ زیاد مُهم نیست.

[3] المان ِ سطح، $d\sigma$، به صورت ِ $a\rho\,d(a\rho)\,d\theta$ نوشته شده است.

$$I = \|U(P)\|^2, \qquad \propto M(v,u;\lambda). \tag{11}$$

که در آن $M(v,u;\lambda)$ تابع ِ تعدیل کننده (یِ طیف) است.

$$M(v,u;\lambda) := \|\frac{1}{\lambda}\int_0^1 J_0\,(v\,\rho)\; e^{-\frac{i}{2}u\rho^2}\,\rho\,d\rho\|^2,$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\,[C^2(v,u)+S^2(v,u)]. \tag{12}$$

2.1 توزیع ِشدت در صفحه یِ کانون

برایِ نقاطی که در صفحه یِ کانون قرار دارند می‌توان توزیع ِ شدت را به صورت ِ زیر ساده نمود:

$$I(v,0) = \left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 I_0. \tag{13}$$

که در آن $I_0 = \frac{\pi 2\|A\|^2}{\lambda\, f^2}$ و $J_1(v)$ تابع ِ بسل ِ مرتبه یِ اول است. این همان نتیجه ای است که در مورد ِ پراش ِ فرانهوفر [j] از روزنه یِ دایره ای بدست می‌آمد و مکان ِ حلقه هایِ تاریک ِ ایری [k] را مشخص می‌کند.

2.2 توزیع ِشدت در راستایِ محور ِاُپتیکی

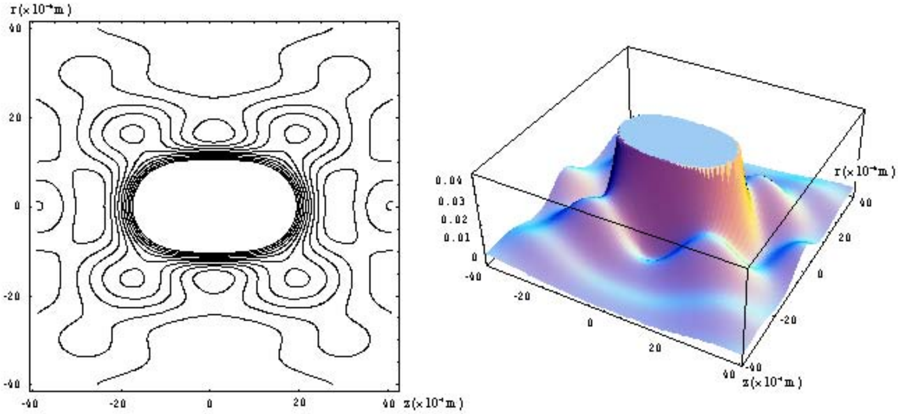
برایِ نقاطی که در راستایِ محور ِ اُپتیکی قرار دارند $v = 0$ است، اگر رابطه یِ (11) را ساده کنیم توزیع ِ شدت به صورت ِ زیر در خواهد آمد:

$$I(0,u) = \left[\frac{\sin\left(\frac{u}{4}\right)}{\left(\frac{u}{4}\right)}\right]^2 I_0. \tag{14}$$

برطبق ِ رابطه یِ (14) در نقاطی در راستایِ محور ِ اُپتیکی شدت صفر خواهد شد که فاصله یِ اولین صفر از مکان ِ نقطه یِ کانون برابر است با:

$$z_0 \simeq \pm\frac{1}{2}\left(\frac{f}{a}\right)^2 \lambda. \tag{15}$$

در شکل ِ ۳ پربند هایِ شدت ثابت در حوالی ِ نقطه یِ کانون رسم شده، که نتایج ِ بالا در آن ها کاملاً مشهود است.



شکل ۳: شکل ِ سمت ِ چپ پربند هایِ شدت ثابت را نشان می‌دهد برایِ اینکه درک به تری از اندازه یِ شدت داشته باشید، اندازه یِ آن را برایِ همین حالت در سمت ِ راست رسم کرده ایم (این محاسبه ها به طور ِ عددی و به وسیله ی نرم افزار ِ Mathematica انجام شده است)، این شکل ها به ازایِ $f = 5.2\,\mathrm{cm}$، $a = 0.1\,\mathrm{cm}$ و $\lambda = 5.14 \times 10^{-5}\,\mathrm{cm}$ رسم شده اند.

3 رفتار ِ فاز در نزدیکی ِ کانون

توزیع ِ فاز در نزدیکی ِ نقطه یِ کانون برایِ یک موج ِ پراشیده شده از یک روزنه یِ دایره ای بر اساس ِ رابطه یِ (9) برابر است با:

$$\varphi = \left(\frac{f}{a}\right)^2 u - \chi(v,u) - \frac{\pi}{2} \qquad \mathrm{Mod}\ \ 2\pi. \tag{16}$$

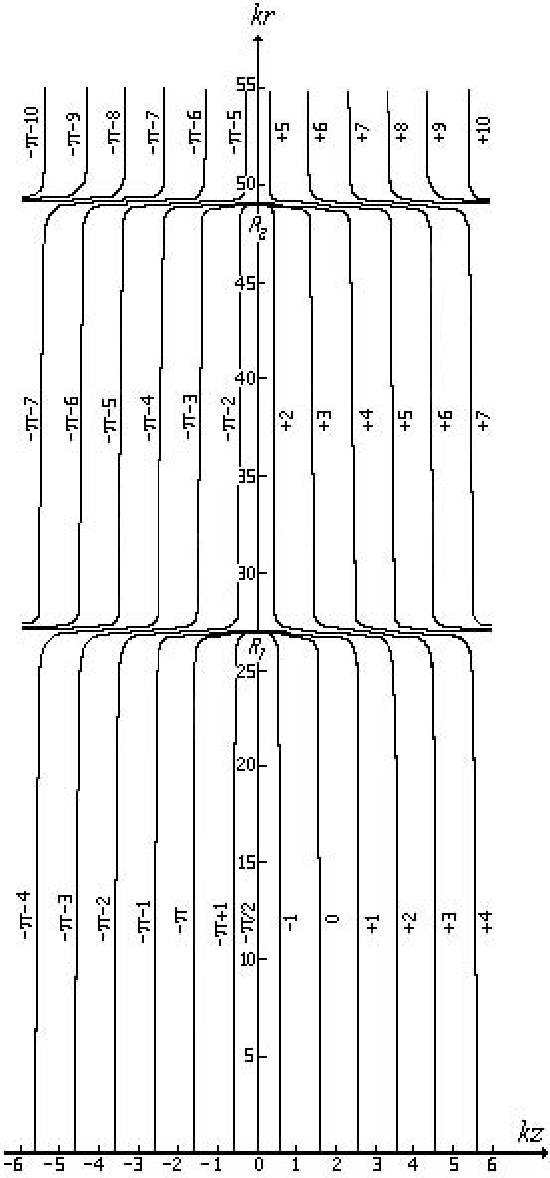
که در آن

$$\chi(v,u) := \arctan\left(\frac{S(v,u)}{C(v,u)}\right). \tag{17}$$

است. توزیع ِ شدت، رابطه یِ (12)، تنها به v و u وابسته بود امّا رابطه یِ (16) نشان می‌دهد که فاز برخلاف ِ شدت نه تنها به v و u بلکه به هندسه یِ پراش نیز وابسته است. فاز در نقطه یِ کانون برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. با استفاده از تقارن در روابط ِ (10) داریم:

$$\varphi(v,u) + \varphi(v,-u) = -\pi. \tag{18}$$

یعنی تصویر ِ هر سطح ِ فاز ثابت ِ ϕ_0 در صفحه یِ کانون، یک سطح ِ فاز ثابت ِ $-\pi - \phi_0$ است. در شکل ِ ۴ پربند هایِ فاز ثابت در نزدیکی ِ نقطه یِ کانون رسم شده است.



شکل ۴. سطوح ِ فاز ثابت در شکل مشخص شده اند همان گونه که مشخص است این سطوح در دو مکان تغییرات ِ شدیدی از خود نشان می‌دهند، که این مکان ها همان مکان ِ حلقه هایِ تاریک ایری [k] می‌باشد. صفحه یِ فاز ثابت ِ $-(4+\pi)$ را در نظر بگیرید، این صفحه در اولین حلقه یِ تاریک ایری [k] یک جهش ِ ناگهانی دارد و در دومین حلقه یِ تاریک باز به‌همین شکل. به‌گونه‌ای که نمی‌توان این سطح را بعد از حلقه یِ تاریک ِ دوم دنبال کرد [6]. (این شکل به ازایِ $f = 10\,\mathrm{cm}$، $a = 2.5\,\mathrm{cm}$ و $\lambda = 5\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$ رسم شده است.)

به نظر می‌رسد که با نزدیک شدن ـ موج به کانون، سطوح ـ فاز ثابت تقریباً تخت هستند. شدت روی ـ سطح هایِ فاز ثابت، یکنواخت نیست بلکه ممکن است تغییر کند[4]. در مکان ـ حلقه هایِ تاریک ـ ایری [k]، فاز تغییرات ـ شدیدی خواهد داشت و مقدار ـ این فاز در این مکان نامشخص است که این نقاط را تکین ـ فازی[5] می‌نامند.

3.1 نابهنجاری ـ فاز[6]

رفتار ـ موج ـ پراشیده شده به گونه ای است که در فواصل ـ خیلی دور (در سمت ـ چپ $u < 0$) شبیه به قطاری موج ـ کروی است که به سمت ـ نقطه یِ کانون جمع می‌شود و سپس در سمت ـ راست ($u > 0$) شبیه قطار ـ موج ـ کروی است که از نقطه یِ کانون دور می‌شوند. همین شباهت باعث می‌شود تا فاز ـ این موج ـ پراشیده شده را نسبت به فاز ـ یک موج ـ کروی بسنجیم.
فاز ـ موج ـ کروی را به شکل ـ زیر می‌توان نوشت:

$$\widetilde{\varphi}(v,u) := \begin{cases} -k\,R & u \leq 0 \\ +k\,R & u \geq 0 \end{cases} . \tag{19}$$

«نابهنجاری ـ فاز» را به شکل ـ زیر تعریف می‌کنیم:

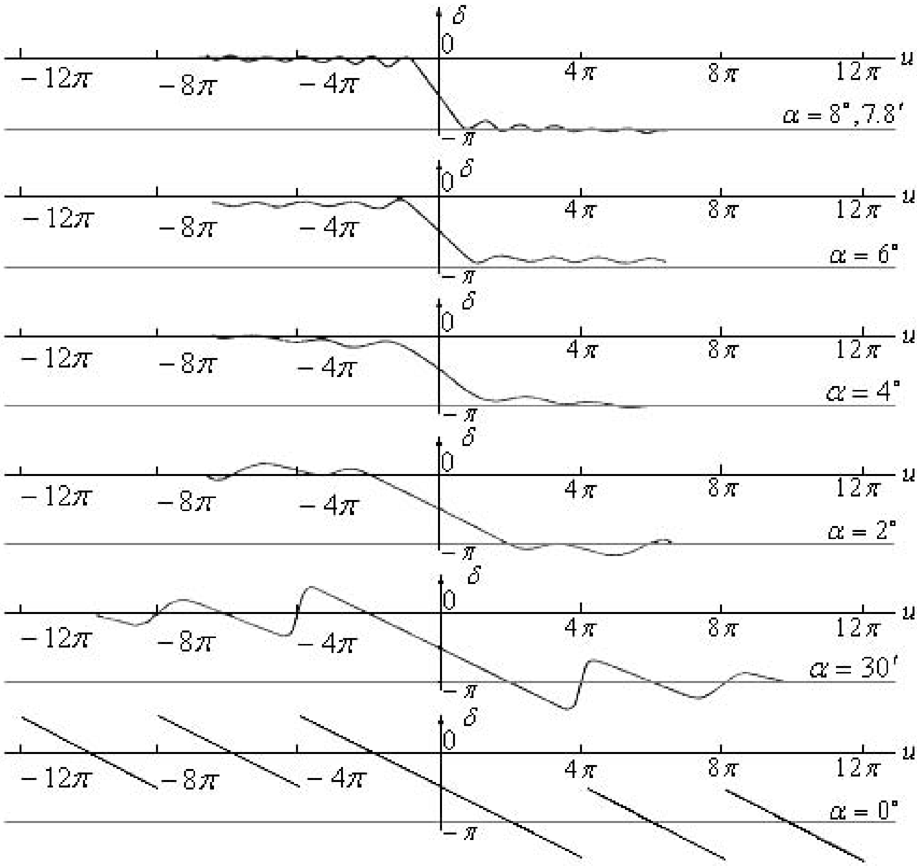
$$\delta := \varphi(v,u) + \widetilde{\varphi}(v,u). \tag{20}$$

کاملاً واضح است که «نابهنجاری ـ فاز» در کانون برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. در شکل ـ ۵ رفتار ـ «نابهنجاری ـ فاز» را به ازای ـ باریکه هایی که تحت ـ زاویه هایِ مختلفی از کانون می‌گذرند رسم شده اند.

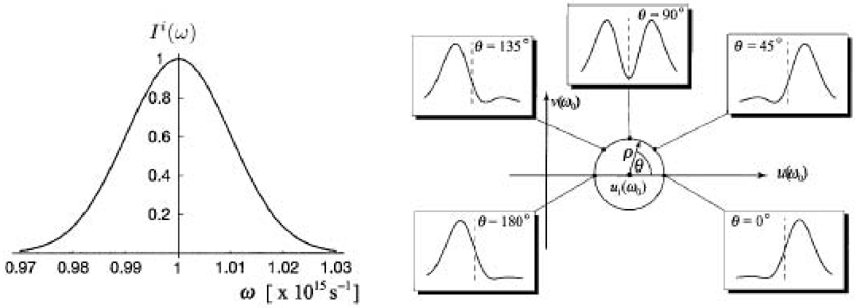
این شکل ها نشان می‌دهد که در عبور از کانون در راستایِ هر باریکه مقدار ـ δ به طور ـ پیوسته و ناگهانی به اندازه یِ π تغیر می‌کند، این اثر اولین بار توسط ـ گوی [c] مشاهده شد [4]. اما در راستایِ محور ـ اُپتیکی «نابهنجاری ـ فاز» رفتاری تکین[7] دارد و به طور ـ دوره ای بین ـ مقدار ـ 0 و $-\pi$ تغیر می‌کند.

---

[4] به مکان ـ حلقه هایِ تاریک ـ ایری [k] توجه کنید.
[5] این تعریف در بخش ـ بعد اساسی است.
[6] Phase Anomaly
[7] این نقاط هم تکین ـ فازی نامیده می‌شوند، زیرا در این نقاط شدت ـ نور صفر است و فاز مقداری نامشخص دارد.



شکل ۵: رفتار ِ«نابهنجاری ِ فاز» در طول ِ باریکه هایی که از کانون عبور می‌کنند رسم شده است. α زاویه یِ شیب باریکه را نسبت به محور ِ اُپتیکی نشان می‌دهد [4,6]. این شکل به ازایِ $f = 10\,\mathrm{cm}$، $a = 2.5\,\mathrm{cm}$ و$\lambda = 5\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$ رسم شده است.



شکل ٦: شکل ـ سمت ـ چپ تابع ـ توزیع ـ فرکانسی ـ موج ـ فرودی (یا طیف ـ موج ـ فرودی) را نشان می‌دهد که به (1) بهنجار شده است. شکل ـ سمت ـ راست طیف ـ موج ـ پراشیده شده تحت ـ زوایای ـ خاص حول ـ یک نقطه یِ تکین را نشان می‌دهد [2]. کاملاً مشخص است که این طیف از شکل ـ اولیه یِ خود (که گاوسی است) خارج می‌شود و در نواحی از فضا طیف به سمت ـ آبی انتقال پیدا می‌کند (انتقال به آبی) و در نواحی دیگر از فضا طیف به سمت ـ قرمز انتقال پیدا می‌کند (انتقال به قرمز) و در ناحیه ای از فضا فرکانس ـ مرکزی حذف می‌شود.

4 نابهنجاری ـ طیف در نزدیکی ـ نقطه یِ تکین ـ فازی

همان طور که در بخش ـ قبل گفته شد، نقاطی که در آن ها دامنه یِ میدان صفر است، فاز تکینه گی دارد یعنی در آن نقاط اندازه یِ فاز کاملاً نامشخص است. پدیده هایِ مربوط به تکینه گی هایِ فازی در یک شاخه یِ جدید از فیزیک به نام ـ «اُپتیک ـ تکینه گی» در حال ـ توسعه است [1]. در این مرحله ما رفتار ـ طیفی گاوسی را در نزدیکی ـ یک نقطه یِ تکین ـ فازی بررسی می‌کنیم [2,3]. فرض می‌کنیم که در معادله یِ (1) موج ـ فرودی دارای ـ پهنای ـ فرکانسی باشد. به گونه ای که تابع ـ توزیع ـ فرکانس گاوسی باشد:

$$\begin{aligned} A &:= A(\omega), \\ &= A_0\, e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{21}$$

که در آن ω_0 فرکانس ـ مرکزی و σ انحراف معیار ـ این تابع است. در نتیجه شدت ـ نور ـ پراشیده شده در نقطه یِ P برابر خواهد بود با:

$$I(v, u; \omega) = I^i(\omega)\, M(v, u; \omega). \tag{22}$$

که در آن $M(v, u; \omega)$ همان تابع ِ تعدیل کننده (یِ طیف) است، این تابع نشان می‌دهد که شدت ِ طیف ِ ورودی ($I^i(\omega)$) چگونه توسط ِ پراش، تغیر می‌کند. وابسته‌گی ِ تابع ِ تعدیل کننده یِ طیف به v و u نشان می‌دهد که طیف ِ میدان در ناحیه یِ نزدیک ِ کانون در نقاط ِ مختلف متفاوت خواهد بود، همچنین این طیف ها با طیف ِ میدان ورودی فرق خواهد داشت. شکل ِاین طیف به ازای ِ مکان هایِ مختلف حول ِ نقطه یِ تکین ِ فازی در شکل ِ ٦ رسم شده است.

5 مرجع‌ها

[1] For a review of singular optics see, for example, M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, Singular optics, in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (Elsevier, Amsterdam, 2001), Vol. 42, pp. 219-276.

[2] G. Gbur, T.D. Visser, and E. Wolf, *Physical Review Letters* **88**, (2002) 013901.

[3] G. Popescu and A. Dogariu, *Physical Review Letters* **88**, (2002) 183902.

[4] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, (Cambridge University Press, 2nd Edition), (1998), Chapter 8, pp 436.

[5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* 6th Edition, p.937.

[6] E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proceedings of the Physical Society, Section B*, **69** (1956), 823.

اسم‌ها یِ خاص

a] Huygens, b] Fresnel, c] Gouy, d] Walker, e] Riche, f] Linfoot, g] Wolf, h] Carter, i] Lommel, j] Franhofer, k] Airy.