تقارن و فرمول‌بندی یِ لَگرانژی، I[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-015 (2003/03/21)

تقارن و ثابتِ‌حرکت بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود هر مولدِتقارن ـ نُتِری در سیستم ی متناظر با یک کنش ـ از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک، به یک ثابتِ‌حرکت ـ موضعی منجر می‌شود؛ و هر ثابتِ‌حرکت ـ موضعی در سیستم ی متناظر با یک کنش ـ از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک، به یک مولدِتقارن ـ نُتِری منجر می‌شود.

1 کنش ـ موضعی

سیستم ی را در نظر بگیرید که با یک تابع (ـ پی‌وسته و مشتق‌پذیر) از $\mathbb{R}$ (مجموعه یِ عددها یِ حقیقی) به یک مجموعه (فضا یِ پیکربندی) توصیف می‌شود. به هر یک از این تابع‌ها یک مسیر می‌گوییم. هر مسیر را می‌شود با مجموعه یِ $\{q^i(t) \mid (i,t)\}$ نشان داد. t (زمان) پارامتر ـ پی‌وسته یِ تحول است. به q^i ها متغیرها یِ دینامیکی یِ سیستم می‌گوییم. برا یِ این سیستم تحول ی با معادله یِ

$$\forall\ (i,t)\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q})=0 \tag{1}$$

(معادله یِ تحول یا معادله یِ حرکت) می‌نویسیم. $\mathbf{q}$ یک نماد ـ کلی برا یِ q^i ها است، و $\mathcal{E}_i$ ها تابعی‌ها یی از $\mathbf{q}$ و زمان اند. می‌گوییم این سیستم با کنش ـ S توصیف می‌شود، اگر

$$\forall\ (i,t,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q})=\lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}}\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)}. \tag{2}$$

$S_{[t_1,t_2]}$ یک تابعی از $\mathbf{q}$ است. اگر حد ـ $S_{[t_1,t_2]}$ در $t_1\to-\infty$ و $t_2\to+\infty$ وجود داشته باشد، و جا یِ مشتق‌گیری و حدگیری را بشود عوض کرد، آن وقت می‌شود شکل ـ ساده‌تر ی برا یِ (2) نوشت:

[1] این مقاله، با اجازه ی ـ نویسنده، از منزل‌گاه ـ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ـ حقوق ـ آن برا ی ـ نویسنده محفوظ است.

http://www.mamwad.org/x1/x1-015.pdf

$$\forall\ (i,t,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q})=\frac{\delta S(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)}, \tag{3}$$

که

$$S:=\lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}} S_{[t_1,t_2]}. \tag{4}$$

اگر $S_{[t_1,t_2]}$ در $t_1\to-\infty$ و $t_2\to+\infty$ حد نداشته باشد، یا جا یِ مشتق‌گیری و حدگیری را نشود عوض کرد هم، از این پس (3) را به عنوان ِ یک نمایش ِ ساده‌تر ِ (2) به کار می‌بریم. به تابعی یِ S (یا تابعی یِ $S_{[t_1,t_2]}$) تابعی یِ کنش می‌گوییم.

می‌گوییم تابع ِ R از t و $\mathbf{q}$ موضعی است، اگر n (ِ باپایان) ی باشد که

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ R(t,\mathbf{q})=R[t,\mathbf{q}(t),\dots,\mathbf{q}^{(n)}(t)]. \tag{5}$$

$\mathbf{q}^{(k)}$ یعنی مشتق ِ k اُم ِ $\mathbf{q}$. اگر (5) برقرار باشد، می‌گوییم تابع ِ موضعی یِ R، از مرتبه یِ دستِ‌بالا n است.

می‌گوییم کنش موضعی است، اگر تابع ِ موضعی یِ L ی باشد که

$$\forall\ (t_1,t_2,\mathbf{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\ L(t,\mathbf{q}). \tag{6}$$

به تابع ِ L در این رابطه، لَگرانژی می‌گوییم. پس کنش موضعی است، اگر انتگرال ِ یک لَگرانژی یِ موضعی باشد.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 1: فرض کنید کنش ِ متناظر با یک سیستم ِ موضعی است. در این صورت،

$$\forall\ (t_1,t_2,t_3)\ :\ S_{[t_1,t_3]}=S_{[t_1,t_2]}+S_{[t_2,t_3]}, \tag{7}$$

(کنش فزون‌وَر است) و

$$\forall\ (i,t,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q})=\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)},\qquad t_1<t<t_2 \tag{8}$$

یعنی طرف ِ چپ ِ عبارت ِ بالا به t_1 و t_2 بسته‌گی ندارد.

اثبات: فزون‌وَربودن ِ کنش از (6) نتیجه می‌شود. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ (8) هم، کافی است بگیریم $t_1'<t_1$ و $t_2'>t_2$. دیده می‌شود وردش ِ $S_{[t_1',t_1]}$ و $S_{[t_2,t_2']}$ نسبت به $\mathbf{q}(t)$ صفر است، و از آن‌جا

$$\frac{\delta S_{[t_1',t_2']}(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)}=\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)}, \tag{9}$$

که نشان می‌دهد حد ِ طرف ِ چپ در $t_1'\to-\infty$ و $t_2'\to+\infty$ هم با طرف ِ راست برابر است.

■

می‌گوییم یک کنش ـ موضعی از مرتبه یِ دستِ‌بالا n است، اگر تابع‌ها یِ موضعی یِ L و Λ یی باشند که

$$\forall\ (t_1, t_2, \mathbf{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \left[L(t,\mathbf{q}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\mathbf{q})\right], \tag{10}$$

و L از مرتبه یِ دستِ‌بالا n باشد.

قضیه یِ 2: کنش ـ موضعی یِ S از مرتبه یِ دستِ‌بالا n است، اگر و تنها اگر تابع‌ها یِ L و $\tilde{\Lambda}$ یی باشند که

$$\forall\ (t_1, t_2, \mathbf{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q}) = \tilde{\Lambda}(t_2, t_1, \mathbf{q}) + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(t,\mathbf{q}), \tag{11}$$

که L موضعی و از مرتبه یِ دستِ‌بالا n است، و m ی هست که

$$\forall\ (t_1, t_2, \mathbf{q})\ :\ \tilde{\Lambda}(t_2, t_1, \mathbf{q}) = \tilde{\Lambda}[t_2, \mathbf{q}(t_2), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_2); t_1, \mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_1)] \tag{12}$$

اثبات: اگر (10) برقرار باشد، آن‌گاه (11) با

$$\begin{aligned} &\tilde{\Lambda}[t_2, \mathbf{q}(t_2), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_2); t_1, \mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_1)] \\ :=\ &\Lambda[t_2, \mathbf{q}(t_2), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_2)] - \Lambda[t_1, \mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_1)] \end{aligned} \tag{13}$$

برقرار است. اگر (11) برقرار باشد، آن‌گاه از فزون‌وَربودن ـ کنش نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \forall\ (t_1, t_2, t_3, \mathbf{q})\ :\quad &\tilde{\Lambda}[t_3, \mathbf{q}(t_3), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_3); t_1, \mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_1)] \\ =\ &\tilde{\Lambda}[t_2, \mathbf{q}(t_2), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_2); t_1, \mathbf{q}(t_1), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_1)] \\ &+\tilde{\Lambda}[t_3, \mathbf{q}(t_3), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_3); t_2, \mathbf{q}(t_2), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_2)]. \end{aligned} \tag{14}$$

حالا کافی است یک t_0 ـ ثابت بگیریم و تعریف کنیم

$$\Lambda[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t)] := \tilde{\Lambda}[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t); t_0, \mathbf{q}(t_0), \dots, \mathbf{q}^{(m)}(t_0)]. \tag{15}$$

دیده می‌شود (10) برقرار است.

■

روشن است که اگر یک کنش ـ موضعی از مرتبه یِ دستِ‌بالا n باشد و $n' > n$، آن‌گاه آن کنش از مرتبه یِ دستِ‌بالا n' هم هست.

قضیه یِ 3: فرض کنید کنش ـ موضعی یِ S از مرتبه یِ دستِ‌بالا n است. در این صورت معادله یِ حرکت ـ سیستم یک معادله یِ دیفرانسیل ـ از مرتبه یِ دستِ‌بالا $(2n)$ است. (یعنی $\mathcal{E}_i$ یک تابع ـ موضعی از مرتبه یِ دستِ‌بالا $(2n)$ است.) اگر S به شکل ـ (10) یا (11) باشد، آن‌گاه،

$$\forall\ (i,t,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} + (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{i\,(n)}}\right). \qquad (16)$$

اثبات: می‌گیریم $t_1 < t < t_2$. دیده می‌شود وردش ِ انتگرال ِ $(\mathrm{d}\Lambda/\mathrm{d}t)$ در (10)، یا وردش ِ $\tilde{\Lambda}$ در (11)، نسبت به $\mathbf{q}(t)$ صفر است. پس،

$$\frac{\delta S(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)} = \frac{\delta}{\delta q^i(t)} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(t,\mathbf{q}). \qquad (17)$$

از این‌جا (16) به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود [1]. هر یک از جمله‌ها یِ طرف ِ راست ِ (16) (پیش از مشتق‌گیری نسبت به t) شامل ِ مشتق ِ دستِ‌بالا n ُ م ِ $\mathbf{q}$ است. پس طرف ِ راست ِ (16) شامل ِ مشتق ِ دستِ‌بالا $(2n)$ ُ م ِ $\mathbf{q}$ است.

■

2 کنش‌ها یِ هم‌ارز

قضیه یِ 4: فرض کنید S یک کنش ِ موضعی است. در این صورت معادله یِ حرکت ِ سیستم ِ متناظر با S اتحاد است، اگر و تنها اگر تابع ِ موضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\ (t_1,t_2,\mathbf{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\mathbf{q}). \qquad (18)$$

اثبات: اگر S به شکل ِ (18) باشد، از قضیه یِ 3 نتیجه می‌شود

$$\forall\ (i,t\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}) = 0. \qquad (19)$$

بر عکس، فرض کنید (6) و (19) برقرار اند. حالت ِ $n > 0$ را در نظر بگیرید. از (16) دیده می‌شود در وردش ِ S نسبت به $\mathbf{q}$، فقط توان ِ اول ِ مشتق ِ $(2n)$ ُ م ِ $\mathbf{q}$ ظاهر می‌شود. پس ضریب ِ مشتق ِ $(2n)$ ُ م ِ $\mathbf{q}$ در وردش ِ S نسبت به $\mathbf{q}$، باید صفر باشد:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^{i\,(n)}\,\partial q^{j\,(n)}} = 0, \qquad (20)$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود M_i ها و N ی هستند که

$$L(t,\mathbf{q}) = q^{i\,(n)}(t)\, M_i[t,\mathbf{q}(t),\ldots,\mathbf{q}^{(n-1)}(t)] + N[t,\mathbf{q}(t),\ldots,\mathbf{q}^{(n-1)}(t)]. \qquad (21)$$

با این شکل ِ L، از (16) دیده می‌شود در وردش ِ S نسبت به $\mathbf{q}$، فقط توان ِ اول ِ مشتق ِ $(2n-1)$ ُ م ِ $\mathbf{q}$ ظاهر می‌شود. پس ضریب ِ مشتق ِ $(2n-1)$ ُ م ِ $\mathbf{q}$ در وردش ِ S نسبت به $\mathbf{q}$، باید صفر باشد:

$$\frac{\partial M_i}{\partial q^{j\,(n-1)}} - \frac{\partial M_j}{\partial q^{i\,(n-1)}} = 0, \tag{22}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود M ی هست که

$$M_i[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(n-1)}(t)] = \frac{\partial}{\partial q^{i\,(n-1)}} M[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(n-1)}(t)]. \tag{23}$$

از (21) داریم

$$L = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + N + K, \tag{24}$$

که

$$K(t, \mathbf{q}) = \left[q^{i\,(n)}(t) \, \frac{\partial}{\partial q^{i\,(n-1)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right] M[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(n-1)}(t)]. \tag{25}$$

طرف ِ راست، شامل ِ مشتق ِ n ُم ِ $\mathbf{q}$ نیست. از این‌جا نتیجه می‌شود $\tilde{L}$ ی هست که

$$L(t, \mathbf{q}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(n)}(t)] + \tilde{L}[t, \mathbf{q}, \dots, \mathbf{q}^{(n-1)}]. \tag{26}$$

از قضیه یِ 3 نتیجه می‌شود در محاسبه یِ وردش ِ S نسبت به $\mathbf{q}$، می‌شود به جا یِ L از $\tilde{L}$ استفاده کرد. به این ترتیب، با یک استقرا یِ ساده رو یِ n نتیجه می‌شود Λ یی موضعی هست که

$$L = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{27}$$

(در واقع برا یِ کامل‌کردن ِ استقرا، باید حالت ِ $n = 0$ را هم تحقیق کنیم. این کار بسیار ساده است. اگر L تابع ِ فقط t و $\mathbf{q}$ باشد، آن‌گاه از (19) نتیجه می‌شود مشتق ِ L نسبت به $\mathbf{q}$ صفر است. پس L تابع ِ فقط t است. اما هر تابع ِ t مشتق ِ کامل ِ زمانی یِ یک تابع ِ دیگر است.)

■

می‌گوییم کنش‌ها یِ S_1 و S_2 هم‌ارز اند، اگر معادله یِ حرکت ِ ناشی از $(S_2 - S_1)$ اتحاد باشد، یعنی اگر

$$\forall\ (i, t, \mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_{2\,i}(t, \mathbf{q}) = \mathcal{E}_{1\,i}(t, \mathbf{q}). \tag{28}$$

شاخص ِ اول ِ $\mathcal{E}$، نظیر ِ شاخص ِ S است. از قضیه یِ 4، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 5: دو کنش ِ موضعی یِ S_1 و S_2 (متناظر با لَگرانژی‌ها یِ L_1 و L_2) هم‌ارز اند، اگر و تنها اگر تابع ِ موضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\ (t, \mathbf{q})\ :\ L_2(t, \mathbf{q}) = L_1(t, \mathbf{q}) + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$

★

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک وابرریختی است. می‌گوییم کنش ـ S_2، f هم‌ارز با کنش ـ S_1 است، اگر

$$\forall\,(i,t,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_{2\,i}[f(t),\mathbf{q}\circ f^{-1}]\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \mathcal{E}_{1\,i}(t,\mathbf{q}). \tag{30}$$

قضیه یِ 6: کنش ـ موضعی یِ S_2 (متناظر با لَگرانژی یِ L_2) f هم‌ارز با کنش ـ موضعی یِ S_1 (متناظر با لَگرانژی یِ L_1) است، اگر و تنها اگر تابع ـ موضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\,(t,\mathbf{q})\ :\ L_2[f(t),\mathbf{q}\circ f^{-1}],\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right| = L_1(t,\mathbf{q}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\mathbf{q}). \tag{31}$$

اثبات: تعریف می‌کنیم

$$\tilde{L}_2(t,\mathbf{q}) := L_2[f(t),\mathbf{q}\circ f^{-1}]\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{32}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود طرف ـ راست تابع ـ فقط t و $\mathbf{q}$ و تعداد ـ باپایان ی از مشتق‌ها یَش در t است. پس $\tilde{L}_2$ یک تابع ـ موضعی است. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{S}_{2\,[t_1,t_2]}(\mathbf{q}) := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \tilde{L}_2(t,\mathbf{q}). \tag{33}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\tilde{S}_{2\,[t_1,t_2]}(\mathbf{q}) = S_{2\,f[t_1,t_2]}(\mathbf{q}\circ f^{-1}). \tag{34}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}_{2\,i}(t,\mathbf{q}) &= \frac{\delta\tilde{S}_{2\,[t_1,t_2]}}{\delta q^i(t)},\\
&= \int_{f[t_1,t_2]} \mathrm{d}t'\ \left.\frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^j(t')}\right|_{\mathbf{q}\to\mathbf{q}\circ f^{-1}}\ \frac{\delta(q^j\circ f^{-1})(t')}{\delta q^i(t)},\\
&= \int_{f[t_1,t_2]} \mathrm{d}t'\ \left.\frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^j(t')}\right|_{\mathbf{q}\to\mathbf{q}\circ f^{-1}}\ \delta[t-f^{-1}(t')]\,\delta^j_i,\\
&= \int_{f[t_1,t_2]} \mathrm{d}t'\ \left.\frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^i(t')}\right|_{\mathbf{q}\to\mathbf{q}\circ f^{-1}}\ \delta[f(t)-t']\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|\\
&= \left.\frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^i[f(t)]}\right|_{\mathbf{q}\to\mathbf{q}\circ f^{-1}}\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|,\\
&= \mathcal{E}_{2\,i}[f(t),\mathbf{q}\circ f^{-1}]\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|.
\end{aligned} \tag{35}$$

دیده می‌شود S_2، f هم‌ارز با S_1 است، اگر و تنها اگر $\tilde{S}_2$ با S_1 هم‌ارز باشد. از این‌جا با تعریف ِ (32) و با استفاده از قضیه یِ 5، حکم نتیجه می‌شود.

■

هم‌چنین،

قضیه یِ 7: کنش ِ موضعی یِ S_2، f هم‌ارز با کنش ِ موضعی یِ S_1 است؛ اگر و تنها اگر S_1، f^{-1} هم‌ارز با S_2 باشد.

اثبات: کافی است در (30)، به جا یِ $\mathbf{q}\circ f^{-1}$ بگذاریم $\mathbf{q}'$، و به جا یِ $f(t)$ بگذاریم t'.

■

هم‌ارزی یِ دو کنش حالت ِ خاص ی از f هم‌ارزی است، که f همانی است.

f هم‌ارزی یِ S_2 با S_1 نتیجه می‌دهد $\mathbf{q}$ یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ ناشی از S_1 است، اگر و تنها اگر $\mathbf{q}\circ f^{-1}$ یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ ناشی از S_2 باشد. اما عکس ِ این مطلب درست نیست. یعنی از این که ($\mathbf{q}$ یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ ناشی از S_1 است، اگر و تنها اگر $\mathbf{q}\circ f^{-1}$ یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ ناشی از S_2 باشد)، f هم‌ارزی یِ S_2 با S_1 نتیجه نمی‌شود. یک مثال ِ ساده این است که یک کنش برابر باشد با حاصل‌ِضرب ِ یک ثابت در یک کنش ِ دیگر. (مثال‌ها یِ پیچیده‌تر ی هم هست، مثلاً مسئله یِ 18 در فصل ِ 1 از مرجع ِ [2]).

3 تقارن

یک سیستم با متغیرها یِ دینامیکی یِ $\mathbf{q}$ و یک معادله یِ تحول را در نظر بگیرید. می‌گوییم $\mathcal{O}$ یک تقارن ِ این سیستم است، اگر $\mathcal{O}$ این ویژه‌گی‌ها را داشته باشد.

(a) $\mathcal{O}$ یک نگاشت از مجموعه یِ مسیرها یِ سیستم به مجموعه یِ مسیرها یِ سیستم است.

(b) $\mathcal{O}$ وارون‌پذیر است.

(c) $\mathbf{q}$ یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ سیستم است، اگر و تنها اگر $\mathcal{O}(\mathbf{q})$ هم یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ سیستم باشد.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه یِ 8: مجموعه یِ تقارن‌ها یِ هر سیستم، با عمل ِ ترکیب ِ نگاشت‌ها، یک گروه است.

★

فرض کنید G^i ها تابع‌ها یی از زمان و مسیر اند. می‌گوییم $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ِ سیستم است، اگر از

$$\forall\ (i,t)\ :\ \mathcal{E}_i(t,\mathbf{q})=0, \tag{36}$$

نتیجه شود

$$\forall\ (i,t)\ :\ \left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})\right]_{s=0}=0. \tag{37}$$

به جا یِ اگر (36) آن‌گاه

$$R(\mathbf{q})=0, \tag{38}$$

می‌نویسیم

$$R(\mathbf{q})\stackrel{\rm ns}{=}0, \tag{39}$$

و می‌گوییم R رو یِ لاک صفر است. در این صورت می‌شود گفت: $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ سیستم است، اگر

$$\forall\ (i,t)\ :\ \left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})\right]_{s=0}\stackrel{\rm ns}{=}0. \tag{40}$$

می‌گوییم $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ کنش است، اگر مشتق ـِ S_s نسبت به s، با

$$\forall\ (s,\mathbf{q})\ :\ S_s(\mathbf{q}):=S(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G}), \tag{41}$$

در $s=0$ صفر، هم‌ارز با صفر باشد.

می‌گوییم تابع ـِ R از t و $\mathbf{q}$ جای‌گزیده است، اگر T ی باشد که

$$[\forall\ (i,t_1,t_2)\ |\ |t_2-t_1|>T]\ :\ \frac{\delta R(t_1,\mathbf{q})}{\delta q^i(t_2)}=0. \tag{42}$$

روشن است که هر تابع ـِ موضعی، جای‌گزیده هم هست.

می‌گوییم $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ جای‌گزیده (موضعی) یِ سیستم (کنش) است، اگر $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ سیستم (کنش) باشد، و یک تابع ـِ جای‌گزیده (موضعی) باشد.

قضیه یِ 9: اگر $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ جای‌گزیده (موضعی) یِ کنش باشد، آن‌گاه $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ جای‌گزیده (موضعی) یِ سیستم ـِ متناظر با آن کنش است.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{G}$ جای‌گزیده است.

$$\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})}{\delta q^i(t)}=\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\ \left.\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\delta q^j(t')}\right|_{\mathbf{q}\to(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})}\frac{\delta(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})^j(t')}{\delta q^i(t)}. \tag{43}$$

(در بیرون ـِ ناحیه یِ انتگرال‌گیری یِ طرف ـِ راست، انتگرال‌ده صفر است.) از این رابطه نسبت به s مشتق می‌گیریم و s را صفر می‌گذاریم. در حاصل، می‌گذاریم $t_1\to-\infty$ و $t_2\to+\infty$. طرف ـِ چپ صفر می‌شود. پس،

$$\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\delta S(\mathbf{q})}{\delta q^i(t)}\right]_{\mathbf{q}\to(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})}\right\}_{s=0}+\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\;\frac{\delta S_(\mathbf{q})}{\delta q^j(t')}\,\frac{\delta G^j(t')}{\delta q^i(t)}=0, \tag{44}$$

یا

$$\left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})\right]_{s=0}+\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\;\mathcal{E}_j(t',\mathbf{q})\,\frac{\delta G^j(t')}{\delta q^i(t)}=0, \tag{45}$$

که از آن (40) نتیجه می‌شود.

■

به یک مولدِتقارن ـ موضعی یِ یک کنش ـ موضعی، یک مولدِتقارن ـ نُتِری یِ سیستم ـ متناظر با آن کنش هم می‌گوییم.

یک نتیجه یِ ساده یِ قضیه یِ 5 این است که

قضیه یِ 10: $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـ نُتِری یِ یک سیستم با کنش ـ موضعی یِ S متناظر با لَگرانژی یِ L است، اگر و تنها اگر تابع ـ موضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\,(t,\mathbf{q})\;:\;\left[\frac{\partial}{\partial s}L(t,\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})\right]_{s=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\mathbf{q}). \tag{46}$$

★

4 ثابت ـ حرکت

می‌گوییم تابعی یِ I از t و $\mathbf{q}$ یک ثابت ـ حرکت است، اگر

$$\forall\,t\;:\;\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,I(t,\mathbf{q})\overset{\mathrm{ns}}{=}0. \tag{47}$$

قضیه یِ 11: فرض کنید I یک ثابتِ‌حرکت ـ سیستم ی است، که معادله یِ حرکت ـ آن به شکل ـ (1) است، $\mathcal{E}_i$ ها موضعی و از مرتبه یِ دستِ‌بالا n اند، و رتبه یِ ماتریس ـ D با

$$\forall\,(t,\mathbf{q})\;:\;D^i{}_j(t,\mathbf{q}):=\frac{\partial\mathcal{E}_i(t,\mathbf{q})}{\partial q^{j\,(n)}(t)} \tag{48}$$

ثابت (مثلاً m) است. در این صورت، اگر I یک تابع ـ موضعی باشد، آن‌گاه یک تابع ـ موضعی یِ دیگر ـ $\tilde{I}$ هست که از مرتبه یِ دستِ‌بالا $(n-1)$ است، و

$$\forall\,t\;:\;I(t,\mathbf{q})\overset{\mathrm{ns}}{=}\tilde{I}(t,\mathbf{q}). \tag{49}$$

(تساوی یِ بالا به طور ـ موضعی درست است. ممکن است $\tilde{I}$ ی نباشد که در کل ـ فضا یِ مسیرها رابطه یِ بالا را برقرار کند.)

اثبات: فرض کنید I از مرتبه ‌ی دستِ‌بالا r است. اگر $r < n$، آن‌گاه $\tilde{I}$ را خود ـ I می‌گیریم. فرض کنید $r \geq n$. تعداد ـ متغیرها ی دینامیکی ی سیستم را l بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$\forall\,(t, \mathbf{q})\ :\ R_i(t, \mathbf{q}) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{r-n} \mathcal{E}_i(t, \mathbf{q}). \tag{50}$$

روشن است که

$$\forall\,t\ :\ \mathbf{R}(t, \mathbf{q}) \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{51}$$

و $\mathbf{R}$ یک تابع ـ موضعی و از مرتبه ‌ی دستِ‌بالا r است. از (48) نتیجه می‌شود رتبه ‌ی ماتریس ـ مشتق ـ $\mathbf{R}$ نسبت به $\mathbf{q}^{(r)}$ هم m است. به این ترتیب، از (51) نتیجه می‌شود موضعاً $(l-m)$ متغیر ـ x^1 تا x^{l-m} هست که

$$\forall\,t\ :\ q^{i\,(r)}(t) \overset{\text{ns}}{=} f^i[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(r-1)}(t), \mathbf{x}(t)]. \tag{52}$$

این عبارت را در I می‌گذاریم و از آن مشتق ـ کامل ـ زمانی می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \overset{\text{ns}}{=} A + \frac{\partial I}{\partial x^a}\,\dot{x}^a. \tag{53}$$

A شامل ـ جمله‌ها یی مستقل از $\dot{x}^a$ ها است. طرف ـ چپ ـ رابطه ‌ی بالا، مستقل از مقدار ـ $\dot{x}^a$ ها صفر است. پس ضریب ـ $\dot{x}^a$ ها در طرف ـ راست، باید صفر باشد:

$$\frac{\partial I}{\partial x^a} \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{54}$$

تعریف می‌کنیم

$$\forall\,(t, \mathbf{q})\ :\ J(t, \mathbf{q}) := I\{t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(r-1)}(t), \mathbf{f}[t, \mathbf{q}(t), \dots, \mathbf{q}^{(r-1)}(t), \mathbf{x}_0(t)]\}, \tag{55}$$

که $\mathbf{x}_0(t)$ یک مقدار ـ دل‌بخواه است. از (54) دیده می‌شود طرف ـ راست، رو ‌ی لاک به $\mathbf{x}_0$ بسته‌گی ندارد. پس رو ‌ی لاک، به جا ‌ی $\mathbf{x}_0$ می‌شود $\mathbf{x}$ یی گذاشت که $\mathbf{f}$ با $\mathbf{q}^{(r)}$ برابر شود. در این صورت رو ‌ی لاک، J با I برابر است. J از مرتبه ‌ی دستِ‌بالا $(r-1)$ است. حالا با یک استقرا ‌ی ساده رو ‌ی r، حکم ثابت می‌شود.

■

معنی ‌ی این قضیه آن است که اگر معادله ‌ی حرکت ـ سیستم ی یک معادله ‌ی دیفرانسیل از مرتبه ‌ی n باشد، آن‌گاه هر ثابتِ‌حرکت ـ موضعی ‌ی آن سیستم را می‌شود با تابع ی موضعی از مرتبه ‌ی دستِ‌بالا $(n-1)$ نمایش داد. از این پس وقت ی از یک ثابتِ‌حرکت ـ موضعی برا یَ سیستم ی که معادله ‌ی حرکت َش یک معادله ‌ی دیفرانسیل ـ از مرتبه ‌ی n است حرف می‌زنیم، منظور این است که آن ثابتِ‌حرکت یک تابع ـ موضعی از مرتبه ‌ی دستِ‌بالا $(n-1)$ است.

5 تقارن و ثابت ِ حرکت

فرض کنید S یک کنش ِ از مرتبه یِ دستِبالا یک است. تکانه یِ $\mathbf{p}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\forall\,(i,t,\mathbf{q})\ :\ p_i(t,\mathbf{q}) := \frac{\partial L[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]}{\partial \dot{q}^i(t)}, \tag{56}$$

که در آن، L لَگرانژی یِ متناظر با S است. (در واقع L تابع ی است که در (10) یا (11) ظاهر شده. ممکن است لَگرانژی یِ سیستم به مثلاً مشتق ِ دوم ِ $\mathbf{q}$ هم بسته‌گی داشته باشد. اما در این صورت می‌شود یک مشتق ِ کامل ِ زمانی از آن بیرون کشید، چنان که باقی‌مانده یک تابع ِ موضعی یِ از مرتبه یِ دستِبالا یک شود.) دیده می‌شود

$$\forall\,(i,t,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}. \tag{57}$$

قضیه یِ 12: فرض کنید $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ِ نُتِری یِ یک سیستم با کنش ِ S است، که S از مرتبه یِ دستِبالا یک است. در این صورت I با

$$\forall\,(t,\mathbf{q})\ :\ I(t,\mathbf{q}) := p_i(t,\mathbf{q})\,G^i(t,\mathbf{q}) - \Lambda(t,\mathbf{q}), \tag{58}$$

یک ثابت ِ حرکت است. L لَگرانژی یِ (از مرتبه یِ دستِبالا یک ِ) کنش است، و Λ همان تابع ی است که در (46) ظاهر شده.

اثبات: از (46) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial q^i}\,G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{G}^i,\\ &= \mathcal{E}_i\,G^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{G}^i,\end{aligned} \tag{59}$$

و از آن‌جا،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\,G^i - \Lambda) \overset{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{60}$$

■

تابع ِ $f(\mathbf{x})$ را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}(\mathbf{x}). \tag{61}$$

ممکن است تابعیت ِ $\mathbf{y}$ از $\mathbf{x}$، موضعاً وارون‌پذیر نباشد. می‌گوییم f یک شبهِ‌تابع ِ $\mathbf{y}$ است، اگر تابع‌ها یِ $G_i(\mathbf{x})$ ی باشند که

$$\forall\ (\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x})\ :\ \mathrm{d}f = G_i\,\mathrm{d}y^i = G_i\,\frac{\partial R^i(\mathbf{x})}{\partial x^a}\,\mathrm{d}x^a. \qquad (62)$$

در این صورت به G_i شبهِ‌مشتق ِ f نسبت به y^i می‌گوییم. G_i ها لزوماً یک‌تا نیستند. در واقع اگر y^i ها، به عنوان ِ تابع ِ $\mathbf{x}$ مستقل نباشند، g_i ها یی هستند که

$$\forall\ (\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x})\ :\ g_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y^i = 0. \qquad (63)$$

در این صورت روشن است که (62)، اگر با G_i ها برقرار باشد، با $\tilde{G}_i$ ها با

$$\tilde{G}_i := G_i + \alpha\,g_i \qquad (64)$$

هم برقرار است، که α تابع ی دل‌بخواه است. هم‌چنین، روشن است که اگر $\tilde{f}(\mathbf{y})$ ی باشد که

$$\forall\ \mathbf{x}\ :\ \tilde{f}[\mathbf{R}(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}), \qquad (65)$$

آن‌گاه G_i را می‌شود مشتق ِ $\tilde{f}$ نسبت به y^i گرفت.

قضیه یِ 13: فرض کنید $I[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک ثابتِ‌حرکت ِ سیستم ی متناظر با یک کنش ِ موضعی یِ از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک است، و معادله یِ حرکت ِ سیستم برا یِ هر شرط ِ اولیه یِ $\mathbf{q}(t_0)$ و $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ جواب دارد (نه‌لزوماً جواب ِ یک‌تا). در این صورت I یک شبهِ‌تابع ِ t و $\mathbf{q}(t)$ و $\mathbf{p}(t)$ است. از جمله G^i ها یی هستند که

$$\forall\ (t, \mathbf{q})\ :\ \frac{\partial I[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]}{\partial \dot{q}^i(t)} = G^j[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]\,\frac{\partial p_j[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]}{\partial \dot{q}^i(t)}. \qquad (66)$$

اثبات: معادله یِ حرکت

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\,\ddot{q}^j = F_i[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] \qquad (67)$$

است. فرض کنید $\mathbf{n}$ در هسته یِ ماتریس ِ مشتق ِ $\mathbf{p}$ نسبت به $\dot{\mathbf{q}}$ باشد:

$$\forall\ (i, t, \mathbf{q})\ :\ \frac{\partial p_i[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]}{\partial \dot{q}^j}\,n^j[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] = 0. \qquad (68)$$

در این صورت دیده می‌شود اگر $\ddot{\mathbf{q}}$ رابطه یِ (67) را بر آورد، آن‌گاه $(\ddot{\mathbf{q}} + \alpha\,\mathbf{n})$ هم این رابطه را بر می‌آورد.

از سو یِ دیگر،

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^j}\,\ddot{q}^j + A[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]. \qquad (69)$$

طرف ِ راست باید رو یِ لاک صفر باشد. از جمله، اگر t و $\mathbf{q}(t)$ و $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ثابت باشند و $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ چنان تغییر کند که معادله یِ حرکت برقرار بماند، طرف ِ راست نباید تغییر کند. پس،

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ \frac{\partial I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]}{\partial \dot{q}^j(t)}\, n^j[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]=0. \tag{70}$$

یعنی هر $\mathbf{n}$ که (68) را برآورد، باید (70) را هم برآورد. این نشان می‌دهد مشتق ِ I نسبت به $\dot{\mathbf{q}}$، یک ترکیب ِ خطی از مشتق ِ p_i ها نسبت به $\dot{\mathbf{q}}$ است. ضریب‌ها ي این ترکیب را G^i می‌نامیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I &= \frac{\partial I}{\partial t}\,\mathrm{d}t+\frac{\partial I}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i+G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\mathrm{d}\dot{q}^i,\\
&= \left(\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i+G^j\,\mathrm{d}p_j,
\end{aligned} \tag{71}$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

قضیه يِ 14: سیستم ی متناظر با یک کنش ِ موضعی يِ از مرتبه يِ دستِ‌بالا یک در نظر بگیرید و فرض کنید $I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک شبهِ‌تابع ِ t و $\mathbf{q}(t)$ و $\mathbf{p}(t)$ است. در این صورت،

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+G^i\,\mathcal{E}_i=G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i. \tag{72}$$

$\mathbf{G}$ شبهِ‌مشتق ِ I نسبت به $\mathbf{p}$، و L لَگرانژی يِ سیستم است.

اثبات:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i+G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i,\\
&= \frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i+G^i\,\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t},\\
&= \frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i+G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}-G^i\,\mathcal{E}_i,
\end{aligned} \tag{73}$$

که حکم را نتیجه می‌دهد.

■

از این‌جا به‌ساده‌گی دیده می‌شود

قضیه يِ 15: سیستم ی متناظر با یک کنش ِ موضعی يِ از مرتبه يِ دستِ‌بالا یک در نظر بگیرید، که معادله يِ حرکت ِ آن برا يِ هر شرط ِ اولیه يِ $\mathbf{q}(t_0)$ و $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ جواب دارد (نه‌لزوماً جواب ِ یک‌تا). در این صورت، اگر $I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک ثابتِ‌حرکت ِ این سیستم باشد، آن‌گاه

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\,\dot q^i=0. \tag{74}$$

L لَگرانژی یِ سیستم، و $\mathbf{G}$ شبهِ‌مشتق ـِ I نسبت به $\mathbf{p}$ است.

بر عکس، اگر $I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک شبهِ‌تابع ـِ t و $\mathbf{q}(t)$ و $\mathbf{p}(t)$ باشد، و (74) برقرار باشد، آن‌گاه I یک ثابتِ‌حرکت ـِ این سیستم است.

هم‌چنین، $I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک ثابت ـِحرکت است، اگر و تنها اگر

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-G^i\,\mathcal{E}_i. \tag{75}$$

★

قضیه یِ 16: فرض کنید $I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک ثابتِ‌حرکت ـِ سیستم ی متناظر با یک کنش ـِ موضعی یِ از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک است، و معادله یِ حرکت ـِ سیستم برا یِ هر شرط ـِ اولیه یِ $\mathbf{q}(t_0)$ و $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$ جواب دارد (نَه‌لزوماً جواب ـِ یک‌تا). در این صورت شبهِ‌مشتق ـِ I نسبت به $\mathbf{p}$، یک مولدِتقارن ـِ نُتِری یِ سیستم است.

اثبات:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial s}L(t,\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})\right]_{s=0} &= G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\dot G^i\,p_i,\\ &= G^i\,\mathcal{E}_i+G^i\,\dot p_i+\dot G^i\,p_i,\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\,G^i-I).\end{aligned} \tag{76}$$

حکم از قضیه یِ 15 نتیجه می‌شود.

■

قضیه یِ 17: فرض کنید $I[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]$ یک شبهِ‌تابع ـِ t و $\mathbf{q}$ و $\mathbf{p}$ و S یک کنش ـِ از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک است. در این صورت،

$$\forall\ (i,t,\mathbf{q})\ :\ \frac{\partial P_i}{\partial s}(0)=-\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)-\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^i}\,\mathcal{E}_j+\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+G^j\,\mathcal{E}_j\right), \tag{77}$$

که $\mathbf{G}$ شبهِ‌مشتق ـِ I نسبت به $\mathbf{p}$ است، و

$$P_i(s):=p_i[t,(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})(t),(\dot{\mathbf{q}}+s\,\dot{\mathbf{G}})(t)]. \tag{78}$$

توجه کنید که اگر $\tilde{I}$ را تابع ی از t و $\mathbf{q}(t)$ و $\mathbf{p}(t)$ در نظر بگیریم، که مقدار َش با I برابر باشد، پرانتز ِ اول ِ طرف ِ راست مشتق ِ $\tilde{I}$ نسبت به q_i است.

از جمله، اگر I ثابت ِ حرکت باشد، آن‌گاه

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) \overset{\text{ns}}{=} -\left(\frac{\partial I}{\partial q^i} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right). \tag{79}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) &= \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_i}{\partial \dot q^j}\,\dot G^j,\\ &= \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_i}{\partial \dot q^j}\left(\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot q^k + \frac{\partial G^j}{\partial \dot q^k}\,\ddot q^k\right),\\ &= \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\left(\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot q^k + \frac{\partial G^j}{\partial \dot q^k}\,\ddot q^k\right).\end{aligned} \tag{80}$$

در آخرین تساوی از این استفاده شده که

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i}{\partial \dot q^j} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^j\,\partial \dot q^i},\\ &= \frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}.\end{aligned} \tag{81}$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^k} &= \frac{\partial}{\partial \dot q^k}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\right) - G^j\,\frac{\partial^2 p_j}{\partial \dot q^i\,\partial \dot q^k},\\ &= \frac{\partial^2 I}{\partial \dot q^i\,\partial \dot q^k} - G^j\,\frac{\partial^2 p_j}{\partial \dot q^i\,\partial \dot q^k},\end{aligned} \tag{82}$$

که نشان می‌دهد طرف ِ چپ نسبت به i و k متقارن است. پس می‌شود جا یِ i و k را عوض کرد. به این ترتیب، (80) می‌شود

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) = \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\left(\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot q^k\right) + \frac{\partial p_j}{\partial \dot q^k}\,\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^i}\,\ddot q^k. \tag{83}$$

داریم

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^k}\,\ddot q^k = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k}\,\dot q^k,$$

$$= -\mathcal{E}_j + \frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k. \tag{84}$$

از این‌جا،

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) = \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k\right) + \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k\right)$$

$$-\frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\mathcal{E}_j. \tag{85}$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial L}{\partial q^j} &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\,\partial \dot{q}^i}\,G^j + \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial L}{\partial q^j},\\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(G^j\,\frac{\partial L}{\partial q^j}\right).\end{aligned} \tag{86}$$

هم‌چنین،

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial t} - \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial p_j}{\partial t} &= \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right) + G^j\,\frac{\partial^2 p_j}{\partial t\,\partial \dot{q}^i},\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right),\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right),\\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial I}{\partial t} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right).\end{aligned} \tag{87}$$

به‌طورِ کاملاً مشابه ی دیده می‌شود

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial q^k} - \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial I}{\partial q^k} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right), \tag{88}$$

و از آن‌جا،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial q^k} - \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right)\dot{q}^k &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left[\left(\frac{\partial I}{\partial q^k} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right)\dot{q}^k\right]\\ &\quad -\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial I}{\partial q^k} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right),\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left[\left(\frac{\partial I}{\partial q^k} - G^j \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \right) \dot{q}^k \right]$$
$$- \left(\frac{\partial I}{\partial q^i} - G^j \frac{\partial p_j}{\partial q^i} \right). \qquad (89)$$

(86)، (87)، و (89) را در (85) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) = - \left(\frac{\partial I}{\partial q^i} - G^j \frac{\partial p_j}{\partial q^i} \right) - \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i} \mathcal{E}_j$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left[G^j \frac{\partial L}{\partial q^j} + \frac{\partial I}{\partial t} - G^j \frac{\partial p_j}{\partial t} + \left(\frac{\partial I}{\partial q^k} - G^j \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \right) \dot{q}^k \right], \qquad (90)$$

که حکم را نشان می‌دهد.

■

اگر $\tilde{I}$ ی باشد که

$$\forall\ (t, \mathbf{q})\ :\ I[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] = \tilde{I}[t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)], \qquad (91)$$

I ثابت ِ باشد، $\mathbf{G}$ را مشتق ِ $\tilde{I}$ نسبت به $\mathbf{p}$ بگیریم، و تعریف کنیم

$$Q_i(s) := q_i + s\, G_i, \qquad (92)$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) \overset{\text{ns}}{=} - \frac{\partial \tilde{I}}{\partial q^i},$$
$$\frac{\partial Q_i}{\partial s}(0) = + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial p^i}, \qquad (93)$$

که کاملاً شبیه ِ یک تبدیل ِ کانونیک با مولد ِ $\tilde{I}$ است (فصل ِ 9 ِ مرجع ِ [2]).

6 مرجع‌ها

[1] I. M. Gelfand & S. V. Fomin; "Calculus of variations", (Prentice Hall, 1963) section 11

[2] Herbert Goldstein; "Classical mechanics", 2nd edition (Addison-Wesley, 1980)