نوسان‌ها یِ جسم ی که به یک فنر ِ جرم‌دار بسته شده[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-009 (2002/05/09)

ویژه‌بس‌آمدها یِ سیستم ی شامل ِ یک جسم و یک فنر ِ جرم‌دار مقید به حرکت در یک بعد، از راه‌ها یِ مختلف به دست می‌آید.

0 مقدمه

فنر ِ یک‌نواخت ی به طول ِ (کشیده‌نشده یِ) l، ضریبِ‌سختی یِ k، و جرم ِ m را در نظر بگیرید. برا یِ یک فنر ِ جرم‌دار ِ آرمانی، ضریبِ‌سختی این طور تعریف می‌شود که اگر نیرو یِ خارجی یِ F، فقط به دوسر ِ فنر وارد شود، و همه یِ نقطه‌ها یِ فنر ساکن (یا هم‌سرعت) باشند، آن‌گاه

$$F = k\,\Delta l, \tag{1}$$

که در آن Δl تغییرِطول ِ فنر، نسبت به حالت ِ کشیده‌نشده است. نیرو کشش است اگر Δl مثبت باشد، و فشار است اگر Δl منفی باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود ضریبِ‌سختی یِ فنر ی با جنس و مقطع ِ یک‌سان و با طول ِ $l/2$، برابر است با $2k$. استدلال همان چیز ی است که در مورد ِ فنرها یِ بی‌جرم به کار می‌رود: کافی است دو فنر ِ مشابه به طول ِ $l/2$ را سری کنیم و مجموعه را از دوطرف بکشیم (چنان که سیستم در حالت ِ سکون بماند) و تعادل ِ نیروها برا یِ هر فنر را بنویسیم. با تعمیم ِ این استدلال برا یِ فنر ی به طول ِ $i\,l/j$ (که در آن i و j صحیح اند)، معلوم می‌شود ضریبِ‌سختی یِ چنین‌فنر ی $j\,k/i$ است. سرانجام، با استفاده از این که ضریبِ‌سختی یِ فنر تابع ی پیوسته از طول ِ آن است، نتیجه می‌شود حاصلِ‌ضرب ِ ضریبِ‌سختی و طول ِ فنرها یِ با جنس و مقطع ِ یک‌سان ثابت است:

[1] این مقاله، با اجازه یِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه یِ حقوق ِ آن برا یِ نویسنده محفوظ است.

$$k\,l = T. \tag{2}$$

ثابت ِ T از جنس ِ نیرو است. در این صورت رابطه یِ (1) به این شکل در می آید.

$$F = T\,\frac{\Delta l}{l}. \tag{3}$$

اگر به جا یِ فنر، مثلاً یک میله را در نظر بگیریم، باز هم رابطه‌ها یِ بالا درست اند، و در این حالت T برابر است با حاصلِ‌ضرب ِ مدولِ‌یانگ [a]ِ میله در مساحت ِ مقطع ِ آن [1]:

$$T = Y\,A, \tag{4}$$

که در آن Y مدولِ‌یانگ [a]ِ میله، و A مساحت ِ مقطع ِ آن است.

هر نقطه از فنر را می‌شود با فاصله یِ آن نقطه از یک سر ِ فنر در حالت ِ کشیده‌نشده یِ فنر مشخص کرد. این فاصله را با x نشان می‌دهیم. اگر فنر فقط در راستا یِ طولی یِ خود حرکت کند، وضعیت ِ فنر با تعیین ِ فاصله یِ نقطه یِ x تا یک نقطه یِ ثابت در راستا یِ فنر (به ازا یِ همه یِ x ها) معلوم می‌شود. این فاصله را با $x + z(x)$ نشان می‌دهیم، یعنی $z(x)$ برابر است با تغییرِمکان ِ نقطه یِ x نسبت به حالت ِ تعادل. پس در مسئله یِ حرکت ِ یک‌بعدی یِ یک فنر ِ جرم‌دار، هدف به‌دست‌آوردن ِ $z(x)$ بر حسب ِ زمان (یا $z(x,t)$) است. سیستم ی که در این‌جا بررسی می‌شود، فنر ی است که یک سر ِ آن ($x = 0$) ثابت شده، و سر ِ دیگر ِ آن به نقطه ای به جرم ِ M وصل است. این مجموعه در راستا یِ خود ِ فنر حرکت می‌کند.

در بخش ِ 1، معادله یِ حرکت را با فرمول‌بندی یِ کنش به دست می‌آوریم. در بخش ِ 2 ویژه‌بس‌آمدها را حساب می‌کنیم. در بخش ِ 3 حالت‌ها یِ حدی را بررسی می‌کنیم؛ و در بخش ِ 4 بس‌آمد ِ پایه در حالت ِ $m \ll M$ را با تقریب‌کردن ِ سیستم با سیستم ی با یک درجه یِ آزادی به دست می آوریم.

1 کنش و معادله یِ موج

بخش ی از فنر را در نظر بگیرید که بین ِ نقطه یِ x و $x + \Delta x$ است. تغییرِطول ِ این بخش نسبت به حالت ِ کشیده‌نشده

$$\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) \tag{5}$$

است. این بخش از فنر مثل ِ فنر ی با ضریبِ‌سختی ی ِ $k\,l/(\Delta x)$ است. پس انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ آن می‌شود

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= \frac{1}{2}\left(\frac{k\,l}{\Delta x}\right)[z(x+\Delta x)-z(x)]^2,\\
&= \frac{1}{2}\,T\left[\frac{z(x+\Delta x)-z(x)}{\Delta x}\right]^2\,\Delta x.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

از این‌جا انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ کل می‌شود

$$
U=\int_0^l \mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\,T\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2. \tag{7}
$$

سرعت ِ بخش ی از فنر که بین ِ x و $x+\Delta x$ است، $\partial z/\partial t$ است. جرم ِ این بخش

$$
\Delta m =: \rho\,\Delta x \tag{8}
$$

است، که ρ چگالی یِ جرمی یِ فنر است:

$$
\rho=\frac{m}{l}. \tag{9}
$$

از این‌جا انرژی‌یِ‌جنبشی یِ این بخش می‌شود

$$
\Delta K_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}\,\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\,\Delta x, \tag{10}
$$

و انرژی‌یِ‌جنبشی یِ کل ِ فنر می‌شود

$$
K_{\mathrm{s}}=\int_0^l \mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\,\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2. \tag{11}
$$

انرژی‌یِ‌جنبشی یِ کل می‌شود این مقدار به اضافه یِ انرژی‌یِ‌جنبشی یِ جسم. سرعت ِ جسم برابر است با $\partial z(l,t)/\partial t$. پس انرژی‌یِ‌جنبشی یِ کل می‌شود

$$
K=\frac{1}{2}\,M\left[\frac{\partial z(l,t)}{\partial t}\right]^2+\int_0^l \mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\,\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2. \tag{12}
$$

لاگرانژی یِ این سیستم هم برابر است با انرژی‌یِ‌جنبشی یِ کل منها یِ انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ کل:

$$L = K - U, \tag{13}$$

و کنش ـِ آن

$$S = \int \mathrm{d}t\; L. \tag{14}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ معادله یِ حرکت، وردش ـِ کنش نسبت به z را حساب می‌کنیم:

$$\delta S = \int \mathrm{d}t \Bigg\{ M\, \frac{\partial z(l,t)}{\partial t}\, \delta \left[\frac{\partial z(l,t)}{\partial t}\right] + \int_0^l \mathrm{d}x \left[\rho\, \frac{\partial z}{\partial t}\, \delta\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) - T\, \frac{\partial z}{\partial x}\, \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] \Bigg\}. \tag{15}$$

داریم

$$z(0,t) = 0, \tag{16}$$

و

$$\delta z(x,t_1) = \delta z(x,t_2) = 0, \tag{17}$$

که $[t_1,t_2]$ ناحیه یِ انتگرال‌گیری در (14) است. با انتگرال‌گیری یِ جزئ‌به‌جزئ، و با استفاده از (15) و (16)،

$$\delta S = \int \mathrm{d}t \Bigg\{ \left[-M\, \frac{\partial^2 z(l,t)}{\partial t^2} - T\, \frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}\right] \delta z(l,t) + \int_0^l \mathrm{d}x \left[-\rho\, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + T\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] \delta z \Bigg\}. \tag{18}$$

معادله یِ حرکت

$$\frac{\delta S}{\delta z(x,t)} = 0 \tag{19}$$

است، که می‌شود

$$- \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{20}$$

و

$$- M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad x = l. \tag{21}$$

معادله‌ی‌دیفرانسیل ِ (20) (معادله یِ یک موج ِ اسکالر در یک محیط ِ ناپاشنده)، هم‌راه با شرط‌ها یِ مرزی یِ (16) و (21)، معادله‌ها یِ حرکت ِ این سیستم اند.

2 ویژه‌بس‌آمدها

معادله‌ها یِ حرکت خطی، و تحت ِ انتقالِ‌زمان ناوردا هستند، پس می‌شود وجه‌ها یِ طبیعی یِ سیستم را

$$z_\omega(x, t) := e^{-i\,\omega\,t}\, Z_\omega(x) \tag{22}$$

گرفت. نتیجه می‌شود

$$\rho\,\omega^2\, Z_\omega + T \frac{\mathrm{d}^2 Z_\omega}{\mathrm{d}x^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{23}$$

و نیز

$$Z_\omega(0) = 0, \tag{24}$$

و

$$M\,\omega^2\, Z_\omega - T \frac{\mathrm{d}Z_\omega}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad x = l. \tag{25}$$

نتیجه یِ (23) آن است که Z_ω یک تابع ِ هم‌آهنگ با بس‌آمد ِ

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \tag{26}$$

از x است، که

$$c := \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{27}$$

سرعت ِ انتشار ِ موج است. نتیجه یِ (24) آن است که این تابع مضرب ی از سینوس است:

$$Z_\omega = B \sin \alpha\, x. \tag{28}$$

سرانجام، از (25) نتیجه می‌شود

$$M\, \omega^2 \sin \alpha\, l - \alpha\, T \cos \alpha\, l = 0, \tag{29}$$

یا

$$\alpha\, l \tan \alpha\, l - \frac{m}{M} = 0. \tag{30}$$

از این معادله α ها یِ مجاز، و با استفاده از (26) ویژه‌بس‌آمدها به دست می‌آیند. دیده می‌شود که این ویژه‌بس‌آمدها گسسته اند:

$$n\, \frac{\pi\, c}{l} < \omega_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\, \frac{\pi\, c}{l}, \tag{31}$$

که n صحیح و نامنفی است.

3 حالت‌ها یِ حدی

(30) یک معادله یِ غیرِجبری است. در حالت‌ها یِ حدی یی می‌شود شکل ِ ساده ای برا یِ ریشه‌ها یِ این معادله یافت:

i) ریسمان ِ سبک:

$$\frac{m}{M}\frac{1}{\alpha\, l} \ll 1. \tag{32}$$

در این حالت $\tan \alpha\, l$ نزدیک به صفر است. نتیجه می‌شود

$$\alpha_n\, l = n\, \pi + \beta_n, \tag{33}$$

که β_n کوچک است. به این ترتیب،

$$n\, \pi\, \beta_n + \beta_n^2 + \frac{n\, \pi}{3}\, \beta_n^3 + \frac{1}{3}\, \beta_n^4 + O(\beta_n^5) = \frac{m}{M}, \tag{34}$$

که در آن از بسط ِ

$$\tan(n\,\pi + y) = y + \frac{y^3}{3} + O(y^5) \tag{35}$$

استفاده شده است. اول حالت ِ $n \neq 0$ را در نظر بگیرید. با استفاده از دوجمله یِ اول ِ طرف ِ چپ ِ (34) (که برا یِ به‌دست‌آوردن ِشان جمله یِ اول ِ بسط ِ تانژانت هم کافی است) نتیجه می‌شود

$$\beta_n = \frac{1}{n\,\pi}\frac{m}{M} - \frac{1}{(n\,\pi)^3}\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \cdots. \tag{36}$$

دیده می‌شود شرط ِ کوچک‌بودن ِ β_n (یعنی درستی یِ تقریب) آن است که

$$\frac{m}{M} \ll n, \tag{37}$$

و هم چه n بزرگ‌تر شود، تقریب به‌تر می‌شود. از این‌جا ویژه‌بس‌آمدها می‌شوند

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{c}{l}\left[n\,\pi + \frac{1}{n\,\pi}\frac{m}{M} - \frac{1}{(n\,\pi)^3}\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \cdots\right],\\ &= \sqrt{\frac{k}{m}}\left[n\,\pi + \frac{1}{n\,\pi}\frac{m}{M} - \frac{1}{(n\,\pi)^3}\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \cdots\right].\end{aligned} \tag{38}$$

به‌ویژه، اولین جمله مستقل از M است، و در واقع برابر است با ویژه‌بس‌آمدها یِ یک فنر (یا ریسمان) که دوسر ِ آن ثابت است.

برا یِ $n = 0$، از (34) نتیجه می‌شود

$$\beta_0^2 = \frac{m}{M} - \frac{1}{3}\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \cdots. \tag{39}$$

در این‌جا شرط ِ درستی یِ تقریب آن است که

$$\frac{m}{M} \ll 1. \tag{40}$$

در این صورت (39) را می‌شود نوشت

$$\beta_0^2 = \frac{m}{M + (m/3) + \cdots}, \tag{41}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M + (m/3) + \cdots}. \tag{42}$$

اگر این‌جا فقط جمله ‌یِ اول ِ مخرج را در نظر بگیریم، این بس‌آمد مستقل از m می‌شود. جمله ‌یِ دوم هم می‌گوید اولین اثر ِ جرم‌داربودن ِ فنر آن است که جرم ِ مئثر ِ جسم (برا یِ بس‌آمد ِ پایه) به اندازه ‌یِ یک سوم ِ جرم ِ فنر بیش از جرم ِ خود ِ جسم است.

ii) جسم ِ سبک:

$$\frac{m}{M}\frac{1}{\alpha\, l} \gg 1. \tag{43}$$

در این حالت $\tan\alpha\, l$ خیل ی بزرگ است. نتیجه می‌شود

$$\alpha_n\, l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \gamma_n, \tag{44}$$

که γ_n کوچک است. به این ترتیب، (30) می‌شود

$$\tan\gamma_n = \frac{M}{m}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \gamma_n\right], \tag{45}$$

یا

$$\gamma_n + O(\gamma_n^3) = \frac{M}{m}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \gamma_n\right], \tag{46}$$

که از آن

$$\gamma_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\left[\frac{M}{m} - \left(\frac{M}{m}\right)^2 + \cdots\right]. \tag{47}$$

از این‌جا دیده می‌شود شرط ِ درستی ‌یِ تقریب (کوچک‌بودن ِ γ_n ها) این است که

$$n\,\frac{M}{m} \ll 1, \tag{48}$$

و ضمناً

$$\frac{M}{m} \ll 1, \tag{49}$$

و تقریب با افزایش ِ n بدتر می‌شود. ویژه‌بس‌آمدها می‌شوند

$$
\begin{aligned}
\omega_n &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\left[1-\frac{M}{m}+\left(\frac{M}{m}\right)^2+\cdots\right]\frac{c}{l}, \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\frac{1}{1+(M/m)+\cdots}\sqrt{\frac{k}{m}}, \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{k}{m+2M+\cdots}}.
\end{aligned} \tag{50}
$$

دیده می‌شود در اولین تقریب، این‌ها مستقل از M اند، و در واقع برابر اند با ویژه‌بس‌آمدها یِ فنر ی که یک سر َ ش بسته و یک سر َ ش باز است. در تقریب ِ بعدی، فقط جرم ِ فنر اصلاح می‌شود، یعنی به اندازه یِ دوبرابر ِ جرم ِ جسم به آن اضافه می‌شود.

4 بس‌آمد ِ پایه، و سیستم ِ با یک درجه یِ آزادی

اگر فنر سبک باشد، می‌شود بس‌آمد ِ پایه را به روش ِ ساده‌تر ی (بدون ِ حل ِ معادله یِ پاره‌ای) هم به دست آورد. برا یِ این کار، انرژی‌ها یِ پتانسیل و جنبشی یِ سیستم را تا مرتبه یِ اول نسبت به m به دست می‌آوریم. اگر m صفر باشد، کشیده‌گی در طول ِ فنر یک‌نواخت می‌شود، چون در غیر ِ این صورت نیرو یی به اندازه یِ

$$
\Delta F = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_2} - \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_1} \tag{51}
$$

به بخش ی از فنر که بین ِ x_1 و x_2 است وارد می‌شود. اما این بخش جرم ندارد، و نیرو یِ وارد بر آن باید صفر باشد. پس،

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = \text{const.} \tag{52}
$$

(توجه کنید که این فرض بس‌آمدها یِ غیرِپایه را کنار می‌گذارد، چون این بس‌آمدها با کاهش ِ m زیاد می‌شوند و در حرکت با این بس‌آمدها شتاب‌ها یِ زیاد هم ممکن است.) پس جابه‌جایی یِ نقطه‌ها یِ مختلف ِ فنر در حد ِ $m=0$،

$$
z(x,t) = \zeta(x,t) := \frac{x}{l}\,X(t) \tag{53}
$$

است، که X جابه‌جایی یِ جسم نسبت به حالت ِ تعادل است. در حالت ِ $m \neq 0$، جابه‌جایی می‌شود

$$z(x,t) =: \zeta(x,t) + \delta z(x,t), \tag{54}$$

که δz نسبت به m، از درجه ی دستِ‌کم یک است. ضمناً

$$\delta z(0,t) = \delta z(l,t) = 0. \tag{55}$$

انرژی‌یِ‌جنبشی یِ سیستم تا مرتبه یِ یک به‌ساده‌گی حساب می‌شود. چون انتگرال‌ده در (11) شامل ِ ρ (متناسب با m) است، برا یِ محاسبه یِ انرژی‌یِ‌جنبشی تا مرتبه یِ یک کافی است z را تا مرتبه یِ صفر بدانیم:

$$\begin{aligned} K_{\rm s} &= \int_0^l \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\,\rho \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= \int_0^l \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\,\rho \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{m}{3}\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{56}$$

از این‌جا

$$K = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cdots. \tag{57}$$

دیده می‌شود تا مرتبه یِ یک، انرژی‌یِ‌جنبشی فقط به جابه‌جایی یِ جسم بسته‌گی دارد.

انرژی‌یِ‌پتانسیل از (7) به دست می‌آید. با استفاده از (54)،

$$U = \int_0^l \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\,T \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \cdots\right], \tag{58}$$

که در آن از این استفاده شده که δz نسبت به m از مرتبه یِ دستِ‌کم یک است. از (53) و (55) نتیجه می‌شود انتگرال ِ جمله یِ دوم صفر است. پس جمله یِ مرتبه یِ یک نسبت به m صفر است:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\,T \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right], \\ &= \frac{1}{2}\,k\,X^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{59}$$

دیده می‌شود انرژی‌یِ‌پتانسیل ـِ فنر، تا مرتبه یِ یک نسبت به m برابر با انرژی‌یِ‌پتانسیل یک فنر بی‌جرم با همان ضریبِ‌سختی یِ k است. به‌ویژه، این انرژی هم فقط به جابه‌جایی یِ جسم بسته‌گی دارد. پس تا این مرتبه حرکت ـِ جسم فقط با یک درجه یِ آزادی (X) مشخص می‌شود.

پس تا مرتبه یِ یک نسبت به m، تنهاتغییر نسبت به فنر ـِ بی‌جرم این است که M به شکل ـِ $M + (m/3)$ اصلاح می‌شود. در نتیجه بس‌آمد ـِ پایه می‌شود

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + (m/3) + \cdots}}, \tag{60}$$

که همان (42) است.

5 مرجع

[1] Marcelo Alonso & Edward J. Finn; “Physics”, (Addison-Wesley, 1992) chapter 28

6 اسم ـِ خاص

[a] Young