کوانتش ِ دوم و نظریه‌ی ِ ذره ـ تبادلی

فرهنگ لران

دانش‌کده‌ی ِ فیزیک، دانش‌گاه ِ صنعتی ِ اصفهان، اصفهان ۸۳۱۱۱–۸۴۱۵٦، ایران

کوانتش ِ دوم ِ نظریه‌ی ِ میدان ِ اسکالر و الکترومغناطیس ِ ماکسول را مرور می‌کنم و نشان می‌دهم که چگونه می‌شود از این روش پتانسیل‌های ِ یوکاوا و کولمب را به دست آورد. به این منظور، در مورد ِ نظریه‌ی ِ الکترومغناطیس ِ ماکسول، هم روش ِ فرمی و هم روش ِ کوانتش ِ دیراک را بررسی می‌کنم. پیش‌نیاز ِ لازم برای ِ خواندن ِ این مقاله درس ِ مکانیک ِ کوانتمی ِ دوره‌ی ِ کارشناسی است.

1 مقدمه

در مکانیک ِ کوانتمی حالت ِ کوانتمی ِ یک الکترون آزاد با یک تابع ِ موج ِ $\psi(\vec{x})$ نمایش داده می‌شود که از حل ِ معادله‌ی ِ موج ِ شرودینگر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 - i\hbar\partial_t\right)\psi(\vec{x},t) = 0, \qquad (1)$$

که در آن $\hbar$ همان ثابت ِ معروف ِ پلانک است. مقدار ِ این ثابت در دست‌گاه ِ واحدهای ِ SI تقریباً $6.63 \times 10^{-34}\mathrm{Kg\ m^2\ s^{-1}}$ است.

در فیزیک ذرات ِ بنیادی رسم بر این است که به جای ِ دست‌گاه ِ واحدهای ِ SI یا cgs از دست‌گاه ِ واحدهای ِ طبیعی (خداداد) استفاده شود. مشخصه‌ی ِ این دست‌گاه این است که در آن مقدار ِ عددی ِ $\hbar$ و سرعت ِ نور (c)، برابر ِ یک است و در نتیجه بعد ِ طول و زمان یکی است که با عکس ِ میلیون الکترون ولت MeV^{-1} سنجیده می‌شوند. هرچند در این مقاله با مقادیر ِ عددی سروکار نداریم ولی برای ِ رعایت ِ مرسومات و البته ساده‌تر شدن ِ کار ِ نوشتن من فرض می‌کنم $\hbar = c = 1$. به این ترتیب معادله‌ی ِ (1) را به صورت ِ زیر بازمی‌نویسم،

$$\left(\frac{\nabla^2}{2m} + i\partial_t\right)\psi(\vec{x},t) = 0, \qquad (2)$$

به سادگی می‌شود دید که هر حلی از معادله‌ی ِ بالا را می‌شود با یک ترکیب ِ خطی از توابع ِ

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}.\vec{x}} e^{-iE_{\vec{k}}t}$$

نوشت که الکترونی با تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ و انرژی ِ $E_{\vec{k}} = \frac{|\vec{k}|^2}{2m}$ را توصیف می‌کنند.

اگر بخواهیم برهم‌کنش ِ الکترون با میدان ِ الکترومغناطیسی را مطالعه کنیم معادله‌ی ِ جدیدی می‌نویسیم که با روش ِ جفت شدگی ِ کمینه از معادله‌ی ِ قبلی به دست می‌آید، یعنی به جای ِ ∇ عمل‌گر ِ $\nabla + ie\vec{A}$ و به جای ِ ∂_t عمل‌گر $\partial_t - ie\phi$ می‌گذاریم که در آن $(\phi, \vec{A})$ مؤلفه‌های ِ چهاربردار ِ پتانسیل ِ الکترومغناطیسی هستند که آن را با A^μ نمایش می دهیم. A^μ چیزی است که از نظریه‌ی ِ کلاسیک ِ الکترومغناطیس ِ ماکسول به دست می‌آید. به عنوان مثال برای ِ حل ِ مسأله‌ی ِ پراکندگی ِ یک الکترون کم انرژی از یک یون ِ سنگین به بار ِ Q قرار می‌دهیم،

$$A^\mu(\vec{x}) = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|},\ \vec{0} \right). \tag{3}$$

در این آزمایش الکترونی با تکانه‌ی ِ $\vec{p}$ را به سمت ِ یک یون ِ سنگین گسیل می‌کنیم. از شیمی می‌دانیم که انرژی ِ برهم‌کنش ِ الکترون با یون در فواصلی از مرتبه‌ی ِ آنگستروم چیزی از مرتبه‌ی ِ الکترون‌ولت است. پس اگر یک الکترون را با انرژی ِ مثلاً یک هزار الکترون ولت[1] و آن هم از فاصله‌ی ِ چند سانتی‌متری ِ یون گسیل کنیم عملاً می‌شود الکترون را در بخش ِ عمده‌ای از مسیر ِ حرکتش یک ذره‌ی ِ آزاد با تابع ِ موج ِ $\psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t)$ دانست هر چند نیروی ِ الکتریکی یک نیروی ِ بلندبرد است. الکترون در اثر ِ برهم‌کنش با یون تغییر ِ مسیر می‌دهد. اگر یون ِ هدف حتی یک پروتون یعنی سبک‌ترین هسته هم باشد چون جرم ِ آن نزدیک به دو هزار بار از الکترون بیش‌تر است عملاً در این برخورد انرژی ِ الکترون تغییری نمی‌کند و فقط راستای ِ حرکتش تغییر می‌کند. باز همین که الکترون چند آنگسترومی از یون دور شود می‌شود آن را ذره‌ای آزاد با تکانه‌ی ِ $\vec{p'}$ و تابع ِ موج ِ $\psi_{\vec{p'}}(\vec{x}, t)$ دانست.

دامنه‌ی ِ گذار ِ $T(\vec{p}, \vec{p'})$ در تقریب ِ مرتبه‌ی ِ اول با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} T(\vec{p}, \vec{p'}) \;&=\; -i \int dt\, d^3x\, \psi_{\vec{p'}}(\vec{x}, t)^* \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|}\, \psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) \\ &=\; -2\pi\, \delta(E - E') \frac{iQ}{\epsilon_0 \left|\vec{p} - \vec{p'}\right|^2} \end{aligned} \tag{4}$$

[1] یک الکترون با انرژی ِ هزار الکترون‌ولت یک الکترون کم انرژی به حساب می‌آید. معیار کم یا پر انرژی بودن ذرات نسبت ِ انرژی ِ جنبشی‌شان با جرم ِ سکون ِ شان است. اگر این نسبت نزدیک به یک و یا بزرگ‌تر از آن باشد باید ملاحضات نسبیتی (لورنتسی) را در نظر گرفت. کوانتش ِ دوم عملاً مناسب‌ترین راه برای ِ این کار از نظر ِ انطباق با آزمایش است.

عامل ِ $2\pi\delta(E-E')$ به این دلیل ظاهر شده است که برهم‌کنش مستقل از زمان است و در نتیجه انرژی ِ جنبشی ِ ا لکترون در حین ِ برهم‌کنش تغییر نمی‌کند. این تقریب را می‌توانید مثلاً کتاب مکانیک ِ کوانتمی ِ گاسیوروویچ پیدا کنید.

معلوم شده است که اگرچه چهاربردار ِ پتانیسل ِ A^μ که در این نظریه به کار گرفته می‌شود یک میدان ِ کلاسیک است که از نظریه‌ی ِ میدان ِ کلاسیک ِ ماکسول حساب می‌شود اما روش ِ بالا پراکندگی ِ رادرفورد را به خوبی می‌دهد و یا اگر به جای ِ مسأله‌ی ِ پراکندگی، مسأله‌ی ِ اتم ِ هیدروژن را با این پتانسیل حل کنیم طیف ِ اتم ِ هیدروژن را با تقریب ِ بسیار خوبی به درستی به دست می‌آوریم. البته اگر همین سنجش‌ها را با دقت ِ بیش‌تری انجام دهیم این نظریه‌ی ِ نیمه کلاسیک نیمه کوانتمی کارآیی‌اش را از دست می‌دهد و از این رو لازم است که میدان‌های ِ الکترومغناطیسی را هم کوانتیده کنیم. البته به طور ِ تاریخی مسأله به شکل ِ کاملاً متفاوتی مطرح شد.

ایده‌ی ِ اصلی ِ کوانتش ِ میدان ِ ماکسول را اینشتین در توصیف ِ تابش ِ جسم ِ سیاه مطرح کرد. او نشان داد که فرض ِ کوانتیده بودن ِ تابش ِ الکترومغناطیسی نه تنها مسأله‌ی ِ تابش ِ جسم ِ سیاه را توضیح می‌دهد بلکه نتیجه‌ی ِ تمام ِ آزمایش‌هایی را که در آن‌ها تابش ِ الکترومغناطیسی با ماده برهم‌کنش می‌کند را به درستی پیش‌بینی می‌کند. مهم‌ترین دست‌آورد ِ مدل ِ فوتونی ِ تابش توصیف ِ کمّی ِ پراکندگی ِ کامپتون بود که نظریه‌ی ِ کلاسیک ِ ماکسول از توضیح ِ آن کاملاً عاجز مانده بود. همان‌طور که احتمالاً این پیش‌نهاد ِ کارآمد ِ اینشتین یکی از دلایل ِ اصلی ِ توجه به مکانیک ِ کوانتمی در آن سال‌ها بوده است.

از دیدگاه ِ امروزی، به‌ترین راه برای ِ کوانتش ِ نظریه‌ی ِ ماکسول این است که یک معادله‌ی ِ شرودینگر بنویسیم و برای ِ این کار باید همیلتونی ِ مناسبی پیدا کنیم. «کوانتش ِ دوم» راه ِ مناسبی برای ِ این کار است. در بخش ِ ۲ کوانتش ِ دوم ِ میدان ِ ماکسول و میدان ِ اسکالر را مرور می‌کنم. در بخش ِ ۳ نظریه‌ی ِ ذره‌تبادلی را مرور می‌کنم و نشان می‌دهم که چه‌طور می‌شود پتانسیل‌هایی را که در مکانیک ِ کوانتمی به کار می‌بریم از نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی بخوانیم. در پیوست ِ ۱ جابه‌جاگرهای ِ دیراک و کوانتش ِ دیراک ِ نظریه‌ی ِ میدان ِ ماکسول را به اختصار مرور می‌کنم. در پیوست ِ ۲ نحوه‌ی ِ محاسبه‌ی ِ تابع ِ دو نقطه‌ای در نظریه‌ی ِ ماکسول با جمله‌ی ِ فرمی را به طور ِ مبسوط توضیح می‌دهم.

2 کوانتش دوم

معادله‌ی ِ موج ِ ماکسول در پیمانه‌ی ِ لورنتس $\partial_\mu A^\mu=0$ با معادله‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$\left(\partial_t^2 - \nabla^2\right) A^\mu(\vec{x}) = 0. \tag{5}$$

اگر فرض کنیم که

$$A^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} \tilde{A}^\mu(\vec{k}), \tag{6}$$

می‌شود دید که معادله‌ی ِ موج به صورت ِ زیر نوشته می‌شود،

$$\left(\partial_t^2 + \omega^2(\vec{k})\right) \tilde{A}^\mu(\vec{k}) = 0, \qquad \omega(\vec{k}) = \left|\vec{k}\right| \tag{7}$$

$\tilde{A}^\mu(\vec{k})$ مؤلفه‌ی ِ فوریه‌ی ِ $A^\mu(\vec{x})$ است که از رابطه‌ی ِ زیر به دست می‌آید،

$$\tilde{A}^\mu(\vec{k}) = \int d^3x\, A^\mu(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}.\vec{x}}. \tag{8}$$

میدان ِ $\tilde{A}^\mu(\vec{k})$ یک میدان ِ مختلط است و به کمک ِ رابطه‌ی ِ (8) می‌شود دید که

$$\tilde{A}^\mu(\vec{k})^* = \tilde{A}^\mu(-\vec{k}). \tag{9}$$

می‌توانیم $\tilde{A}^\mu(\vec{k}, t)$ را بر حسب ِ مؤلفه‌های ِ حقیقی و موهومی‌اش به صورت ِ

$$\tilde{A}^\mu(\vec{k}) = \tilde{A}^\mu_r(\vec{k}) + i\tilde{A}^\mu_i(\vec{k}) \tag{10}$$

بازنویسی کنیم و بدیهی است که هر دو مؤلفه در معادله‌ی ِ حرکت ِ (7) صدق می‌کنند. از طرفی معادله‌ی ِ (7) برای ِ هر مؤلفه‌ی ِ حقیقی یا موهومی ِ میدان ِ $\tilde{A}$ با برچسب ِ μ و k، درست معادله‌ی ِ حرکت ِ یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ ساده با بسامد ِ $|\vec{k}|$ است. برای ِ دیدن ِ این موضوع فرض کنید که برای ِ یک μ و k ی ِ داده شده $x = \tilde{A}^\mu_r(\vec{k})$. به این ترتیب معادله‌ی ِ (7) به صورت ِ زیر در می‌آید:

$$\ddot{x} + \left|\vec{k}\right|^2 x = 0. \tag{11}$$

پس همیلتونی ِ نظیر ِ این دست‌گاه، همیلتونی ِ یک نوسان‌گر ِ هماهنگ ِ ساده با بسامد ِ $|\vec{k}|$ است:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left|\vec{k}\right|^2 x^2 \\ &= \left|\vec{k}\right| \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

در تساوی ِ دوم همیلتونی را برحسب ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنا نوشته‌ام که تعریف ِ شان برحسب ِ عمل‌گرهای ِ مکان x و تکانه‌ی ِ $p = \dot{x}$ به صورت ِ زیر است:

$$a=\sqrt{\frac{|\vec{k}|}{2}}\left(x+\frac{ip}{|\vec{k}|}\right), \qquad a^{\dagger}=\sqrt{\frac{|\vec{k}|}{2}}\left(x-\frac{ip}{|\vec{k}|}\right). \tag{13}$$

به این ترتیب برای ِ هر مد ِ $\tilde{A}^{\mu}_{r(i)}(\vec{k})$ یک همیلتونی داریم:

$$h^{\mu}_{r(i)}(\vec{k})=\omega(\vec{k})\left[\left(a^{\mu}_{r(i)}(\vec{k})\right)^{\dagger}a^{\mu}_{r(i)}(\vec{k})+\frac{1}{2}\right] \tag{14}$$

که در آن $a^{\mu}(\vec{k})$ و $a^{\mu\dagger}(\vec{k})$ عمل‌گر ِ فنا و خلق ِ مؤلفه‌ی ِ μاُم ِ چهاربردار ِ فوتونی به تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ است:

$$\tilde{A}^{\mu}_{r(i)}(\vec{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a_{r(i)}(\vec{k})+a^{\dagger}_{r(i)}(\vec{k})\right). \tag{15}$$

از رابطه‌ی ِ (9) می‌دانیم که،

$$a^{\mu}_{r}(\vec{k})=a^{\mu}_{r}(-\vec{k}), \qquad a^{\mu}_{i}(\vec{k})=-a^{\mu}_{i}(-\vec{k}). \tag{16}$$

پس به کمک ِ رابطه‌ی ِ (10) می‌شود $\tilde{A}^{\mu}(\vec{k},t)$ را بر حسب ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنا نوشت،

$$\tilde{A}^{\mu}(\vec{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a^{\mu}(\vec{k})+a^{\mu\dagger}(-\vec{k})\right), \tag{17}$$

که $a^{\mu}(\vec{k})=a^{\mu}_{r}(\vec{k})+ia^{\mu}_{i}(\vec{k})$ و بعد دید که:

$$\begin{aligned} A^{\mu}(\vec{x}) &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\tilde{A}^{\mu}(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}} \\ &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(a^{\mu}(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}}+a^{\mu\dagger}(\vec{k})e^{-i\vec{k}.\vec{x}}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

اگر بخواهیم فرمول‌های ِ ما برای ِ مقاصد ِ تجربی کاربردی‌تر باشند به‌تر است که فرمول‌بندی‌مان را بر حسب ِ قطبش ِ فوتون‌ها و نه مؤلفه‌های ِ فضایی و زمانی‌شان سوار کنیم. چرا که در آزمایش‌گاه می‌شود به آسانی نور را قطبیده کرد اما نمی‌شود مؤلفه‌های ِ یک موج ِ الکترومغناطیسی را از هم سوا کرد. پس به جای ِ استفاده از عمل‌گر ِ فنای ِ $a^{\mu}(\vec{k})$ که به مؤلفه‌ی ِ μ اُم ِ چهاربردار ِ پتانسیل ِ یک فوتون به تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ اشاره دارد از عمل‌گرهایی استفاده می‌کنیم که به قطبش ِ فوتون‌ها دلالت دارند. یعنی می‌نویسیم،

$$a^{\mu}(\vec{k})=\sum_{s}\epsilon^{\mu}_{s}\,a^{s}(\vec{k}), \tag{19}$$

که در این جا $a^{s}(\vec{k})$ عمل‌گر ِ فنای ِ فوتونی به قطبش ِ s و تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ است و ϵ^{μ}_{s} هم چهاربرداری است که قطبش ِ s را نشان می‌دهد. مثلاً برای ِ قطبش ِ چپ‌گرد برای فوتونی که در راستای ِ x^3

حرکت می‌کند می‌نویسیم $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0)$. به این ترتیب در بیش‌ترِ کتاب‌ها رابطه‌یِ (18) را به صورتِ زیر می‌نویسند:

$$A^{\mu}(\vec{x}) = \sum_{s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}} \left(\epsilon_s^{\mu}\, a^s(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} + \epsilon_s^{*\mu}\, a^{s\dagger}(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{x}} \right) \tag{20}$$

شکلِ چهاربردارهایِ قطبش را قیدهایی که برایِ برداشتنِ آزادیِ پیمانه‌ای در نظر می‌گیریم محدود می‌کنند. مثلاً ممکن است فرض کنیم که

$$A^0 = 0, \qquad \nabla.\vec{A} = 0. \tag{21}$$

این دو قید با پیمانه‌یِ لورنتس سازگارند. در واقع پیمانه‌یِ لورنتس به تنهایی آزادیِ پیمانه‌ای را بر نمی‌دارد[2] و برایِ برداشتنِ کاملِ آزادیِ پیمانه‌ای به قیدِ دیگری هم نیاز است. غالباً قیدِ دوم را $A^0 = 0$ انتخاب می‌کنند. دست‌گاهِ قیدیِ (21) را پیمانه‌یِ تابش می‌نامند. معلوم است که قیدِ اول در پیمانه‌یِ تابش می‌گوید که

$$\epsilon_s^0 = 0. \tag{22}$$

پس فقط قسمتِ فضاییِ چهاربردارِ ϵ_s که با $\vec{\epsilon_s}$ نشانش می‌دهیم ناصفر است. قیدِ دوم در دست‌گاهِ (21) می‌گوید

$$\vec{k}.\vec{\epsilon_s} = 0. \tag{23}$$

پس مثلاً اگر $\vec{k} = k\hat{z}$ آن گاه پایه‌یِ مناسب برایِ ϵ_s عبارت خواهد بود از

$$\epsilon_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0) \qquad \epsilon_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0). \tag{24}$$

این ها به ترتیب فوتونی با قطبشِ چپ‌گرد و راست‌گرد را توصیف می‌کنند. می‌شود دید که بردارهایِ قطبش روابطِ زیر را برآورده می‌کنند:

$$\vec{\epsilon}_s.\vec{\epsilon}^{*}_{s'} \;=\; \delta_{s,s'},$$

$$\sum_{s=L,R} \epsilon_s^{i}\epsilon_s^{*j} \;=\; \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\left|\vec{k}\right|^2}, \tag{25}$$

که نمادِ $*$ چون همیشه به مزدوجِ مختلط دلالت دارد. چون معادلاتِ ماکسول خطی هستند می‌شود دید که معادلاتِ حرکتِ میدانِ $A^{\mu}(\vec{x})$ با همیلتونیِ

[2] توجه کنید که اگر A_μ پیمانه‌یِ لورنتس را برآورده کند و ϕ هم یک حلِ معادله‌یِ موج باشد، یعنی $\left(\partial_t^2 - \nabla^2\right)\phi = 0$، آن‌گاه $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi$ هم پیمانه‌یِ لورنتس را برآورده می‌کند. می‌توانید نشان دهید که همیشه می‌شود ϕ را به گونه‌ای برگزید که $A'_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
H &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_\mu \left(h_r^\mu(\vec{k}) + h_i^\mu(\vec{k})\right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_\mu h^\mu(\vec{k}) \\
&= \sum_{s=L,R} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h^s(\vec{k})
\end{aligned} \tag{26}
$$

داده می‌شود. در این تساوی‌ها

$$h^\mu(\vec{k}) = \omega(\vec{k}) a^\mu(\vec{k})^\dagger a^\mu(\vec{k})$$

$$h^s(\vec{k}) = \omega(\vec{k}) a^s(\vec{k})^\dagger a^s(\vec{k}), \tag{27}$$

که در آن‌ها از جمله‌ی ِ ثابت ِ $\frac{1}{2}\omega(\vec{k})$ چشم‌پوشی کرده‌ایم. تساوی ِ دوم در رابطه‌ی ِ (26) با توجه به این نکته به دست آمده است که مثلاً

$$
\begin{aligned}
\int d^3k\, \omega(\vec{k})\, a_r^{\mu\,\dagger}(\vec{k})\, a_i^\mu(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \int d^3k\, \omega(\vec{k}) \left(a_r^{\mu\,\dagger}(\vec{k})\, a_i^\mu(\vec{k}) + a_r^{\mu\,\dagger}(-\vec{k})\, a_i^\mu(-\vec{k})\right) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3k\, \omega(\vec{k}) \left(a_r^{\mu\,\dagger}(\vec{k})\, a_i^\mu(\vec{k}) - a_r^{\mu\,\dagger}(\vec{k}) a_i^\mu(\vec{k})\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{28}
$$

برای ِ به دست آوردن ِ تساوی ِ سوم در رابطه‌ی ِ (26) از معادله‌های ِ (19)، (22) و (25) کمک گرفته‌ام.

معادله‌ی ِ شرودینگر ِ

$$H\,|\psi\rangle = i\,\partial_t\,|\psi\rangle\,, \qquad H = \sum_{s=L,R} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, h^s(\vec{k}) \tag{29}$$

را می‌شود با انتخاب مناسبی از پایه‌ی ِ فضای ِ هیلبرت به سادگی حل کرد. این پایه‌ی ِ مناسب به صورت ِ زیر نوشته می‌شود،

$$|\psi\rangle = \prod_{\vec{k},s} \left|\phi(\vec{k},s)\right\rangle \tag{30}$$

که در آن $\left|\phi(\vec{k},s)\right\rangle$ ویژه‌تابع ِ همیلتونی ِ $h^s(\vec{k})$ است. چون $h^s(\vec{k})$ همیلتونی ِ یک نوسان‌گر ِ هماهنگ ِ ساده است می‌شود آن را به سادگی برحسب ِ پایه‌ی ِ $\left|n^s(\vec{k})\right\rangle$ بسط داد که با رابطه‌ی ِ زیر تعریف می‌شود،

$$\left|n^s(\vec{k})\right\rangle = \left[a^{s\dagger}(\vec{k})\right]^n |0\rangle . \tag{31}$$

کِت ِ خلأ $\langle 0|$ مطابق ِ تعریف حالت ِ زمینه‌ی ِ دستگاه را نشان می‌دهد، یعنی

$$H\,|0\rangle = 0, \tag{32}$$

که در نتیجه

$$h^s(\vec{k})\,|0\rangle = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a^s(\vec{k})\,|0\rangle = 0. \tag{33}$$

به این روش ِ کوانتش ِ میدان‌های ِ کلاسیک،کوانتش ِ دوم می‌گویند. این ایده آن‌قدر خوب بود که مردم را کم کم وسوسه کرد همان‌طور که فوتون را کوانتم ِ میدان ِ کلاسیک ِ ماکسول می‌گیرند، مثلاً الکترون را هم کوانتم ِ میدان ِ کلاسیک ِ دیراک و پایون را کوانتم ِ میدان ِ کلاسیک ِ کلَین ـ گوردُن بگیرند.[3]

معادله‌ی ِ موج ِ کلین ـ گوردن یک معادله‌ی ِ موج ِ کلاسیک ِ خطی است که میدان ِ اسکالر ِ لورنتسی ِ $\phi(\vec{x},t)$ را توصیف می‌کند. این معادله برای ِ مؤلفه‌های ِ فوریه‌ی ِ $\phi(\vec{x},t)$ به صورت ِ زیر نوشته می‌شود،

$$\left(\partial_t^2 - \omega(\vec{k})^2\right)\tilde{\phi}^\mu(\vec{k},t) = 0, \qquad \omega(\vec{k}) = \sqrt{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}, \tag{34}$$

که m جرم ِ پایون است. معادله‌ی ِ (34) معادله‌ی ِ حرکت ِ یک نوسان‌گر ِ هماهمنگ ِ ساده با بسامد ِ $\omega(\vec{k})$ است. با تکرار ِ آن‌چه که برای ِ کوانتش ِ میدان ِ ماکسولی گفتیم می‌شود دید که همیلتونی عبارت است از

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega(\vec{k})f^\dagger(\vec{k})f(\vec{k}), \tag{35}$$

که $f(\vec{k})$ و $f^\dagger(\vec{k})$ عمل‌گرهای ِ فنا و خلق ِ پایونی به تکانه‌ی ِ $\vec{k}$ هستند و از جمله‌ی ِ ثابت ِ $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\omega(\vec{k})$ چشم‌پوشی کرده‌ایم. ممکن است ایراد بگیرید که این جمله یک بی‌نهایت ِ ریاضی است و نمی‌شود از آن چشم‌پوشی کرد. ممکن است حتی بگویید که اگر فرمول‌بندی ِ درست ِ نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی مستلزم ِ دور انداختن ِ این جمله باشد باید نتیجه گرفت که نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی پایه و اساس ِ درستی ندارد.

[3] توجه کنید که پایون‌ها ذرات ِ بنیادی نیستند اما در پراکندگی‌های ِ کم انرژی در برهم‌کنش ِ الکترومغناطیسی، $\pi^\pm$ را می‌شود به خوبی با میدان ِ کلین ـ گوردن ِ مختلط توصیف کرد.

در جواب ِ این ایرادات توجه کنید که فرض ِ $k \in (0,\infty)$ علی‌الاصول فرض ِ درستی نیست. چرا که در $k \sim E_{\rm Planck}$ آثار ِ گرانشی اجتناب‌ناپذیر است و از فیزیک ِ سیاه‌چاله‌ها می‌دانیم که نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی در آن انرژی‌ها صحیح نیست. پس علی‌الاصول در تمام ِ این انتگرال‌گیری‌ها $k \in (0,\Lambda)$ که Λ پارامتر ِ دل‌خواهی است که باید به حد ِ کافی از $E_{\rm Planck} \simeq 10^{19}{\rm GeV}$ کوچک‌تر باشد. البته Λ باید به حد ِ کافی از انرژی‌های ِ آزمایش‌گاه‌های ما بزرگ‌تر باشد. انرژی ِ شتابدهنده‌ی ِ ال.اچ.سی $14{\rm TeV}$ خواهد بود. این می‌گوید که نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی برای ِ محاسبات ِ مربوط به روی‌دادهای ِ خروجی ِ شتاب‌دهنده خوب است مگر این که به دلیلی انرژی ِ پلانک کم‌تر از حدس ِ اولیه‌ی ِ ما و در حدود ِ همان چند ده TeV باشد[4]. خوش‌بختانه «معادلات ِ گروه ِ بازبهنجارش» نشان می‌دهند که مقدار ِ مشاهده‌پذیرهای ِ فیزیکی که در نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی در انرژی‌های $k \ll \Lambda$ محاسبه می‌شوند به مقدار ِ پارامتر ِ دل‌خواه ِ Λ حساس نیستند.

به این ترتیب نظریه‌ای که می‌نویسیم یک نظریه‌ی ِ مؤثر است به این معنا که از آن فقط انتظار داریم فیزیک ِ انرژی‌های ِ پایین (در مقایسه با انرژی ِ پلانک) را به درستی توصیف کند و آن مقدار ِ ثابت هم یک مقدار ِ محدود است که می‌شود آن را کنار گذاشت. البته اگر بخواهید پای ِ کیهان‌شناسی را هم به میان بکشید دیگر کنار گذاشتن ِ این جمله کار ِ صحیحی نیست چرا که این جمله در معادلات ِ اینشتین به شکل ِ یک ثابت ِ کیهان‌شناسی ِ خیلی بزرگ ظاهر می‌شود و منشأ ِ مشکلی است که به آن «مسأله‌ی ِ ثابت ِ کیهان‌شناسی» می‌گویند [۳].

برای ِ استفاده‌ی ِ بعدی تصریح میکنم که جبر ِ عمل‌گرهای ِ خلق و فنا با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$[f(\vec{k}), f^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{36}$$

به علاوه در تصویر ِ هایزنبرگ،

$$\begin{aligned}\phi(t,\vec{x}) &= e^{iHt}\,\phi(\vec{x})\,e^{-iHt} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\vec{k})}}\left(f(\vec{k})e^{-i(\omega(\vec{k})t-\vec{k}.\vec{x})} + f^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega(\vec{k})t-\vec{k}.\vec{x})}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

[4] توضیح ِ ویراستار: معمولاً منظور از انرژی ی ِ پلانک $\sqrt{\hbar\, c^5/G}$ است که تقریباً 1.2×10^{16} TeV است. امّا در این جا منظور ِ نویسنده انرژی ای است که در برخ ی مدل‌ها ی ِ جهان‌شامه‌ای ظاهر می‌شود (ر.ک. به مرجع ِ 1 ِ همین مقاله).

3 نظریه‌ی ذره تبادلی

برای ِ به دست آوردن ِ برهم‌کنش‌ها ممکن است این ایده را به کار ببریم که برهم‌کنش را نتیجه‌ی ِ انتشار ِ یک ذره‌ی ِ واسطه بین ِ دو ذره‌ی ِ در حال ِ برهم‌کنش بدانیم. نقش ِ این ذره‌ی ِ واسطه این است که کمی انرژی و تکانه بین ِ این دو ذره جابه‌جا می‌کند. از نظر ِ ما که آن ذره‌ی ِ واسطه را نمی‌بینیم اتفاقی که می‌افتد این است که دو ذره در حین ِ گذر از کنار ِ هم انرژی و تکانه‌شان تغییر می‌کند و نتیجه می‌گیریم که با یکدیگر برهم‌کنش کرده‌اند. در نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی شکل ِ برهم‌کنش‌ها را با شرط‌هایی مثل ِ «موضعی بودن»، «ناوردایی ِ لورنتس» و«بازبهنجارپذیری» تعیین می‌کنند که از حوصله‌ی ِ این مقاله خارج است و خواننده‌ی ِ علاقمند باید برای ِ یادگرفتن ِ آن‌ها یک درس ِ نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی بگذراند. اما می‌شود دید که با به کار گرفتن آن‌چه که از نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی در بخش ِ قبل یاد گرفتیم و قناعت به همان توصیف ِ کیفی ِ ایده‌ی ِ ذره‌ی ِ تبادلی می‌توانیم دست ِ کم رفتار ِ $V(r) \sim r^{-1}$ پتانسیل ِ الکتریکی که در این دیدگاه باید ناشی از مبادله‌ی ِ یک فوتون باشد و یا پتانسیل ِ یوکاوا که باید ناشی از مبادله‌ی ِ یک پایون باشد را به دست آوریم.

بگذارید با پتانسیل ِ یوکاوا شروع کنیم. این پتانسیلی است که انتظار می‌رفت برهم‌کنش‌های ِ هسته‌ای را توصیف کند و شکل ِ آن به صورت زیر است:

$$V(r) \sim \frac{e^{-mr}}{r}. \tag{38}$$

m در این رابطه پارمتری است که برد ِ نیروی ِ هسته‌ای را تعیین می‌کند. چون ابعاد ِ هسته‌ها از مرتبه‌ی ِ چند فرمی است پس $m \simeq 100\text{MeV}$ که به جرم ِ پایون خیلی نزدیک است. می‌شود دید که اگر نیروی ِ هسته‌ای را ناشی از مبادله‌ی ِ یک پایون بین ِ دو نوکلئون بدانیم برهم‌کنش ِ حاصل با پتانسیل ِ (38) داده می‌شود که در آن m جرم ِ پایون باشد.

ذرات مجازی

پیش از محاسبه‌ی ِ پتانسیل به‌تر است ببینیم که ذرات ِ واسطه‌ای که در ایده‌ی ِ ذره‌ی ِ تبادلی با آن‌ها سروکار داریم صرف ِ نظر از فوتون یا پایون بودن چه ویژگی‌های ِ دینامیکی دارند. برای این کار به‌تر است برهم‌کنشی بین ِ یک ذره‌ی ِ سبک به جرم ِ m و یک ذره‌ی ِ خیلی سنگین به جرم ِ $M \to \infty$ را بررسی کنیم. سبک یا سنگین بودن در این جا اشاره به نسبت ِ جرم ِ سکون ذرات به انرژی ِ جنبشی ِ آن‌ها در دستگاه ِ مرکز ِ جرم دارد. می‌دانیم که پس از برخورد انرژی ِ جنبشی ِ ذره‌ی ِ M تغییری نمی‌کند هر چند تکانه‌اش به اندازه‌ی ِ $\Delta\vec{P} = -\Delta\vec{p}$ تغییر می‌کند که $\Delta\vec{p}$ تغییر ِ تکانه‌ی ِ ذره‌ی ِ m در اثر برخورد است. اگر ایده‌ی ِ ذره‌ی ِ تبادلی را پذیرفته باشیم

آن‌گاه این برهم‌کنش را نتیجه‌ی مبادله‌ی ذره‌ای به تکانه‌ی $\vec{q} = \Delta\vec{p}$ و انرژی $q^0 = 0$ بین m و M می‌دانیم. چنین ذره‌ای «حقیقی» نیست چرا که می‌دانیم برای همه‌ی ذرات حقیقی چهاربردار تکانه در شرط $-q^2 \geq 0$ صدق می‌کند. اما در این آزمایش خاص دیدیم که چهاربردار تکانه‌ی ذره‌ی تبادلی این شرط را برآورده نمی‌کند. از این رو چنین ذره‌ای را «مجازی» می‌نامیم. توجه کنید که فرض $M \to \infty$ برای رسیدن به این نتیجه ضروری نیست. در واقع برای هر دو ذره‌ی دل‌خواهی می‌شود با استفاده از ناوردایی $-q^2$ تحت تبدلات لورنتس مسأله را در دستگاه مختصات نسبی دو ذره حل کرد که عملاً معنی‌اش این است که جرم یکی از آن‌ها را $M \to \infty$ گرفته‌ایم.

پتانسیل یوکاوا

فرض‌کنید که ذره‌ی مبادله شده در آزمایش بالا یک پایون به جرم m_π بوده باشد که بین یک نوکلئون و یک هسته‌ی سنگین مبادله می‌شود. تابع موج دستگاه پیش از مبادله را با

$$\psi(\vec{p}, \vec{P}; x) = e^{i(\vec{p}.\vec{x} - E_p t)} e^{i(\vec{P}.\vec{x} - E_P t)}$$

که در آن $E_p = p^0$ انرژی ذره‌ی ورودی با تکانه‌ی $\vec{p}$ را نشان می‌دهد و حالت نهایی آن را با $\psi^*(\vec{p'}, \vec{P}'; x)$ نمایش می‌دهیم که $*$ مزدوج مختلط را نشان می‌دهد. برهم‌کنش نتیجه‌ی مبادله‌ی پایونی با تکانه‌ی q^μ بین دو نوکلئون است. این پایون ممکن است در نقطه‌ی $x^\mu(t, \vec{x})$ خلق شده و در $y^\mu = (t', \vec{y})$ فنا شود یا برعکس. مقادیر x^μ و y^μ معلوم نیست و ما باید در محاسبه‌ی دامنه‌ی پراکندگی همه‌ی روی‌دادهای ممکن را به حساب بیاوریم. پس دامنه‌ی پراکندگی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود،[5]

$$T(p, P; p', P') \sim \int d^4y\, d^4x\, \psi^*(\vec{p'}, \vec{P}'; y)\, \psi(\vec{p}, \vec{P}; x)\ \langle 0|\, T\phi(t', \vec{y})\phi(t, \vec{x})\, |0\rangle\,. \qquad (39)$$

نماد T به این معنی است که اگر $t < t'$ پایون از m به M و اگر $t > t'$ پایون از M به m تابیده است[6]:

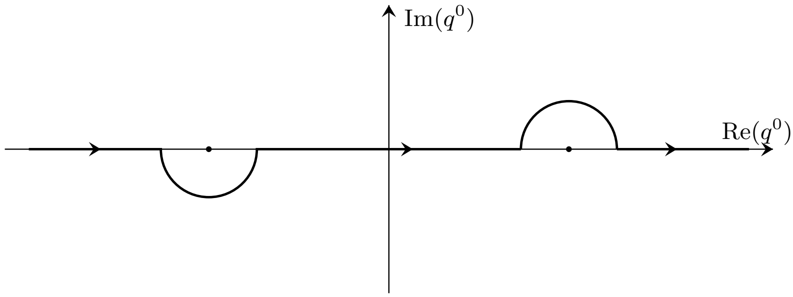
$$T\phi(t', \vec{y})\, \phi(t, \vec{x}) = \begin{cases} \phi(t', \vec{y})\phi(t, \vec{x}), & t < t', \\ \phi(t, \vec{x})\phi(t', \vec{y}), & t > t'. \end{cases} \qquad (40)$$

در نظریه‌ی میدان‌های کوانتمی $\langle 0|\, T\phi(y)\phi(x)\, |0\rangle$ را تابع دو نقطه‌ای می‌نامند. محاسبه‌ی تابع دو نقطه‌ای کار آسانی است. فرض کنید $t < t'$. آن‌گاه

$$\langle 0|\, T\phi(t', \vec{y})\phi(t, \vec{x})\, |0\rangle \;=\; \langle 0|\, \phi(t', \vec{y})\phi(t, \vec{x})\, |0\rangle$$

[5] در این رابطه چون ضرائب عددی را نادیده گرفته‌ام از نماد $\sim$ به جای نماد معمول $=$ استفاده کرده‌ام.

[6] مثلاً برای $t < t'$، با توجه به رابطه‌ی (37)، $\phi(\vec{x}, t)\, |0\rangle$ تابع موج یک پایون جای‌گزیده در نقطه‌ی $(\vec{x}, t)$ را به دست می‌دهد. این پایون توسط عمل‌گر $\phi(\vec{y}, t')$ در نقطه‌ی $(\vec{y}, t')$ نابود می‌شود.



شکل ۱: پربند ِانتگرال‌گیری روی ِ q^0. قطب‌ها در $\pm\omega(\vec{q})$ واقعند.

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\vec{q})} \, e^{-i\omega(\vec{q})(t'-t)} \, e^{-i\vec{q}.(\vec{x}-\vec{y})}, \tag{41}$$

که برای ِ به دست آوردن ِ تساوی ِ دوم از معادلات ِ (37) و (36) کمک گرفته‌ام. می‌توانید نشان دهید که به طور ِ کلی

$$\langle 0| \, T\phi(y)\phi(x) \, |0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^0}{2\pi i} \, \frac{e^{iq.(y-x)}}{(q^2+m^2)}, \tag{42}$$

که انتگرال ِ q^0 روی ِ پربند ِ نشان داده شده در شکل ِ (۱) گرفته می‌شود:

می‌بینید که با انتخاب ِ این پربند مثلاً برای ِ $t < t'$ که باید پربند را در بالا $(q^0 \to i\infty)$ بست، در انتگرال ِ (42) فقط قطب ِ $q^0 = -\omega(\vec{q})$ به حساب می‌آید که به معادله‌ی ِ (41) منجر می‌شود. برای ِ محاسبه‌ی ِ دامنه‌ی ِ گذار توجه می‌کنیم که

$$\int d^4y \, d^4x \, \psi^*(\vec{p'}, \vec{P}'; y) \, \psi(\vec{p}, \vec{P}; x) \, e^{iq.(y-x)} \; = \; \int d^4y \, d^4x \, e^{-i\Delta p.x} \, e^{-i\Delta P.y} \, e^{iq.(y-x)}$$

$$= \; (2\pi)^8 \, \delta^4(q-\Delta p) \, \delta^4(\Delta P - \Delta p), \tag{43}$$

که مثلاً $\Delta p = \; p' - p$. به شکل ِ روشنی $\delta^4(\Delta P - \Delta p)$ به قانون ِ بقای ِ انرژی و تکانه‌ی ِ خطی دلالت دارد. با جای‌گذاری در معادله‌ی ِ (39) می‌شود دید که

$$T(p, P; p', P') \sim (2\pi)^4 \, \delta^4 \, (\Delta P - \Delta p) \, \frac{1}{(p'-p)^2 + m^2}. \tag{44}$$

برای ِ محاسبه‌ی ِ دامنه‌ی ِ پراکندگی برای ِ ذره‌ی ِ m روی ِ تمام ِ حالت‌های ِ نهایی برای ِ ذره‌ی ِ M انتگرال می‌گیریم:

$$\tilde{T}(p,p') = \int \frac{d^3P'}{(2\pi)^3} T(p,P;p',P')$$

$$= 2\pi\, \delta(p^0 - p'^0) \frac{1}{\left|\vec{p} - \vec{p'}\right|^2 + m_\pi^2} \tag{45}$$

در به دست آوردن ِ تساوی ِ دوم از این فرض که $P'^0 \simeq P^0 = M$ و در نتیجه $\Delta P^0 \simeq 0$ استفاده کرده‌ام. به سادگی می‌شود دید که

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left|\vec{k}\right|^2 + m_\pi^2} \sim \frac{e^{-m_\pi |\vec{x}|}}{|\vec{x}|}. \tag{46}$$

با مقایسه‌ی ِ معادله‌ی ِ (45) با (4) معلوم می‌شود که نتیجه‌ی ِ مبادله‌ی ِ یک پایون ِ مجازی بین ِ دو نوکلئون در نظریه‌ی ِ ذره ـ تبادلی معادل ِ برهم‌کنش ِ یوکاوا بین ِ آن دو نوکلئون است.

پتانسیل کولنی

از محاسباتی که برای ِ به دست آوردن ِ پتانسیل ِ یوکاوا انجام دادیم معلوم می‌شود که اگر به جای ِ یک پایون به جرم ِ m_π یک فوتون ِ بی‌جرم بین ِ m و M مبادله شده بود آن‌گاه نتیجه معادل ِ برهم‌کنش ِ کولنی بود. به این دلیل تکرار ِ محاسبات لازم نیست. اما پیش از پایان ِ مقاله باید به یک سؤال پاسخ داده شود و آن این است که وقتی فوتون‌ها مجازی هستند چه‌گونه آزادی ِ پیمانه‌ای را روی ِ چهاربردار ِ قطبش اعمال می‌کنیم. روشی که ما برای ِ کوانتش ِ میدان ِ ماکسولی در نظر گرفتیم برای ِ فوتون‌های ِ حقیقی خوب بود که پیمانه‌ی ِ تابش را برآورده می‌کنند. اما اگر با دقت ِ بیش‌تری محاسبات ِ آن بخش را بازنگری کنیم می‌بینیم که فرض ِ $\epsilon_s^0 = 0$ در کنار ِ تعریف ِ (19) می‌گوید که

$$a^\mu(\vec{k})\ |0\rangle = 0 = a^\mu(\vec{k})^\dagger\ |0\rangle\,, \qquad \mu = 0. \tag{47}$$

این معادلات به وضوح با جبر ِ $[a^0(\vec{k}), a^0(\vec{k}')^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ در تعارض است.[7] برای ِ برطرف کردن ِ این مشکل دو کار می‌شود انجام داد. راه ِ اول که کم‌تر کسی از آن در این نظریه استفاده کرده است اصلاح ِ جبر است. در این روش به جای ِ جابه‌جاگر ِ معمولی ِ [,] از جابه‌جاگرهای ِ دیراک استفاده می‌شود. پیوست ِ ۱ را ببینید.

راه ِ دوم برای ِ رفع ِ این مشکل که خیلی سرراست‌تر است این است که به جای ِ نظریه‌ی ِ ماکسول از نظریه‌ی ِ دیگری استفاده کنیم که آزادی ِ پیمانه‌ای نداشته باشد اما مشاهده‌پذیرهایش، همان مشاهده‌پذیرهای ِ نظریه‌ی ِ ماکسول ِ کوانتمی باشد.

[7] برای ِ دیدن ِ این تعارض، کافی است چشم‌داشتی ِ خلأ ِ عمل‌گرهای ِ دوسوی ِ تساوی را حساب کنید. از معادله‌ی ِ (47) معلوم است که چشم‌داشتی ِ عمل‌گر ِ سمت ِ چپ متحد ِ با صفر است در حالی که چشم‌داشتی ِ $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ که برابر ِ با خود ِ $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$ است متحد ِ با صفر نیست.

ساده‌ترین رده از نظریه‌هایی از این دست را می‌شود با اضافه کردن ِ یک جمله به معادلات ِ ماکسول به دست آورد. برای ِ یادآوری معادله‌ی ِ ماکسول به شکل ِ کلی را می‌نویسم،

$$\left(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu\right) A^\nu = 0. \tag{48}$$

در پیمانه‌ی ِ لورنتس، $\partial_\nu A^\nu = 0$ این معادله به شکل ِ معادله‌ی ِ (5) در می‌آید. واضح است که این معادله تحت ِ تبدیل ِ پیمانه‌ای ِ $A^\nu \to A^\nu - \partial^\nu\phi$ ناوردا است که ϕ هر تابع ِ مشتق‌پذیر ِ دل‌خواهی می‌تواند باشد. حالا نظریه‌ای را فرض کنید که معادله‌ی ِ حرکتش این‌گونه باشد،

$$\left(\eta_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right) A^\nu = 0. \tag{49}$$

ξ در این جا یک پارامتر ِ دل‌خواه است. این نظریه را نظریه‌ی ِ فِرمی می‌نامم.[8] این نظریه در $\xi \to \infty$ همان نظریه‌ی ِ ماکسول خواهد بود اما مادام ِ این که $\xi^{-1} \neq 0$ آزادی ِ پیمانه‌ای ندارد. پس می‌شود بدون ِ درد ِ سر آن‌را کوانتیده کرد. نتیجه برای ِ تابع ِ دو نقطه‌ای چنین خواهد بود (پیوست ِ ۲ را ببینید)،

$$\langle 0|\, TA^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{dq^0}{2\pi i}\left[\eta^{\mu\nu} + (\xi - 1)\,\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right]\,\frac{e^{-iq.(x-y)}}{q^2}. \tag{50}$$

نکته‌ی ِ جالب این است که در محاسبه‌ی ِ دامنه‌ی ِ گذار جمله‌ی ِ ضریب ِ $\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)$ صفر می‌شود. البته اطلاعاتی که در این مقاله آمده است برای ِ دیدن ِ این سازوکار کافی نیست.[9] به هر حال به دلیل ِ این اتفاق مقدار ِ مشاهده‌پذیرها از ξ مستقل است. پس مشاهده‌پذیرهای ِ این نظریه هم‌ارز ِ مشاهده‌پذیرهای ِ نظریه‌ی ِ ماکسول هستند. غالباً برای ِ آسان شدن ِ محاسبات فرض می‌کنند $\xi = 1$ و به این انتخاب پیمانه‌ی ِ فاینمن می‌گویند.

در پیمانه‌ی ِ فاینمن تابع ِ دونقطه‌ای ِ (50) به صورت ِ زیر ساده می‌شود،

$$\langle 0|\, TA^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{dq^0}{2\pi i}\eta^{\mu\nu}\frac{e^{-iq.(x-y)}}{q^2}. \tag{51}$$

اگر برهم‌کنش ِ دو ذره‌ی ِ باردار را ناشی از مبادله‌ی ِ یک فوتون بین آن‌ها بدانیم باید این تابع ِ دو نقطه‌ای را برای ِ محاسبه‌ی ِ تابع ِ پتانسیل به کار ببریم. با مقایسه‌ی ِ (51) با (42) و با تکرار ِ محاسباتی که به معادله‌ی ِ (46) انجامید به سادگی می‌شود دید که برهم‌کنش ِ حاصل از مبادله‌ی ِ یک فوتون همان پتانسیل ِ کولونی است که با جای‌گذاری ِ $m = 0$ در پتانسیل ِ یوکاوا به دست می‌آید. البته در برهم‌کنش ِ کولنی فقط بستگی به فاصله مهم نیست و باید به ثابت ِ جفت شدگی هم دقت

[8] این روش را فِرمی پیش‌نهاد داد. به نظرم او تنها کسی است که هم در نظریه‌پردازی، هم پدیده‌شناسی و هم کار ِ آزمایش‌گاهی و تجربی عالی بوده است.

[9] این واقعیت ِ مفید نتیجه‌ی ِ برقراری ِ قانون ِ پایستگی ِ بار $\partial_\mu j^\mu = 0$ به عنوان ِ یک اتحاد ِ عمل‌گری است که به آن اتحاد ِ وارْد می‌گویند. بخش ۷.۴ مرجع [۲] را ببینید.

کرد. این را به عنوان ِ یک محاسبه‌ی ِ مفرح برای ِ خواننده‌ی ِ علاقه‌مند باقی می‌گذارم.

4 پیوست ِ ۱. جبر دیراک

در این بخش تعریف ِ جابه‌جاگرهای ِ دیراک را پس از مرور ِ کوتاه ِ نظریه‌ی ِ دست‌گاه‌های ِ مقید (البته در ساده‌ترین حالت) ارائه می‌کنم.

یک دست‌گاه با دو درجه‌ی ِ آزادی را در نظر بگیرید که لاگرانژی ِ آن به صورت ِ زیر باشد،

$$L = \frac{1}{2}\dot{y}^2 - x\dot{y} + \frac{1}{2}x^2. \tag{52}$$

برای ِ ساختن ِ همیلتونی باید ابتدا تکانه‌های ِ p_x و p_y هم‌یوغ ِ مختصات ِ x و y را به دست آورد،

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - x. \tag{53}$$

از این جا معلوم می‌شود که مسیر ِ حرکت ِ دست‌گاه در فضای ِ فاز مقید به صفحه‌ی ِ $p_x = 0$ است. اما این تنها قید ِ دست‌گاه نیست. چون این قید از تعریف ِ تکانه نتیجه شد همواره باید برقرار باشد، یعنی باید تقاضا کنیم که

$$\dot{p}_x = \{p_x, H\} = 0. \tag{54}$$

H در این جا همیلتونی است که با رابطه‌ی ِ زیر داده می‌شود،

$$H = \frac{1}{2}p_y^2 + xp_y. \tag{55}$$

و $\{\ ,\ \}$ نماد ِ کروشه‌ی ِ پواسون است. از این جا معلوم است که ما قید ِ دیگری هم داریم که با $p_y = 0$ داده می‌شود. به قید ِ $p_x = 0$ که از تعریف ِ تکانه نتیجه شد قید ِ اولیه می‌گویند و به قید ِ $p_y = 0$ که از دینامیک می‌آید قید ِ ثانویه می‌گویند. دست‌گاه ِ ما قید ِ ثانویه‌ی ِ دیگری ندارد چرا که کروشه‌ی ِ پواسون ِ p_y و همیلتونی متحد ِ با صفر است.

از آن جا که $\{p_x, p_y\} = 0$ به این دست‌گاه ِ قیدی، دست‌گاه ِ قیدی ِ نوع ِ اول می‌گویند. دست‌گاه ِ قیدی ِ نوع ِ دوم دست‌گاهی است که کروشه‌ی ِ پواسون ِ قیدهایش با یک‌دیگر ناصفر باشد. قیود ِ نوع ِ اول مولد ِ تبدیلات ِ پیمانه‌ای هستند. در واقع می‌توانید به سادگی نشان دهید که $G = \theta p_y + \dot{\theta} p_x$ مولد ِ تبدیلاتی از x و y است که لاگرانژی را ناوردا نگاه می‌دارند. θ هر تابع ِ دل‌خواه (بی‌نهایت کوچک) از زمان است. تبدیلاتی که G مولد ِ آن است از این قرار است،

$$\delta x = \{x, G\} = \dot{\theta},$$
$$\delta y = \{y, G\} = \theta. \tag{56}$$

برای ِ کوانتش رسم این است که به جای ِ کروشه‌پواسون جابه‌جاگر می‌گذاریم، مثلاً می‌نویسیم که

$$[x, p_x] = i\hbar. \tag{57}$$

اما وقتی p_x متحد ِ صفر باشد چه‌طور می‌شود چنین راهی را برای ِ کوانتش در پیش‌گرفت؟ البته دست‌گاهی که ما در نظر گرفته‌ایم خیلی ساده است و چون $p_y = 0$ در عمل $H = 0$ و دیگر شاید لازم نباشد نگران ِ دشواری‌های ِ کوانتش باشیم. اما می‌شود مسأله را کمی پیچیده کرد. مثلاً به لاگرانژی یک جمله‌ی ِ نوسان‌گر ِ هماهنگ ِ ساده بر حسب ِ مختصه‌ی ِ z اضافه کنید. در این حالت

$$H = \frac{1}{2m}p_z^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \tag{58}$$

کوانتش ِ معمولی می‌گوید که

$$[z, p_z] = i\hbar, \tag{59}$$

و مثلاً

$$[z, p_x] = 0. \tag{60}$$

این تساوی ِ آخر با قید ِ $p_x = 0$ سازگار است اما هم‌چنان باید به فکر ِ جای‌گزینی برای ِ (57) باشیم. برای ِ حل ِ این مشکل ابتدا توجه می‌کنیم که مشاهده‌پذیرهای ِ فیزیکی نمی‌توانند پیمانه‌وردا باشند. پس پیش از کوانتش لازم است تثبیت ِ پیمانه کنیم. برای ِ این کار مثلاً قیدهای ِ تثبیت ِ پیمانه‌ی ِ زیر را فرض می‌کنیم،

$$\chi_1 = x = 0, \qquad \chi_2 = y = 0. \tag{61}$$

تعریف می‌کنیم $\chi_3 = p_x$ و $\chi_4 = y$. ماتریس ِ $\Delta_{ij} = \{\chi_i, \chi_j\}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس معکوس‌پذیر است. کروشه‌ی ِ دیراک برای ِ دو تابع ِ f_1 و f_2 برحسب ِ کروشه‌ی ِ پواسون و معکوس ِ این ماتریس به روش ِ زیر تعریف می‌شود،

$$\{f_1, f_2\}_{\mathrm{Dirac}} = \{f_1, f_2\} - \{f_1, \chi_i\}\Delta_{ij}^{-1}\{\chi_j, f_2\} \tag{62}$$

واضح است که کروشه‌ی ِ دیراک ِ هر تابع ِ دل‌خواهی با هر کدام از قیدهای ِ χ_i متحد ِ با صفر است. از این رو کروشه‌ی ِ دیراک برخلاف ِ کروشه‌ی ِ پواسون با قیدهای ِ $\chi_i = 0$ سازگار است. برای ِ کوانتش، جابه‌جاگرهای ِ دیراک بر حسب ِ کروشه‌های ِ دیراک با جای‌گذاری ِ آشنای ِ

$$\{\ ,\ \}_{\mathrm{Dirac}} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]_{\mathrm{Dirac}}, \tag{63}$$

تعریف می‌شوند.

قیدهای ِ نظریه‌ی ِ ماکسول خیلی شبیه ِ قیدهایی است که ما در این مثال مطالعه کردیم. در نظریه‌ی ِ ماکسول هم فقط یک قید ِ اولیه $\Pi^0 = 0$ و یک قید ِ ثانویه‌ی ِ $\nabla.\vec{\Pi} = 0$ داریم. در این جا Π^μ تکانه‌ی ِ هم‌یوغ ِ A^μ است. پیمانه‌ی ِ تابش $A^0 = 0$ و $\nabla.\vec{A}$ هم درست همانند قیود ِ تثبیت ِ پیمانه‌ای است که این جا در نظر گرفتیم. جالب است که توجه کنید که چون $\vec{\Pi}$ همان میدان ِ الکتریکی است قید ِ ثانویه‌ی ِ $\nabla.\vec{\Pi} = 0$ عملاً قانون ِ کولن است.

همان‌طور که دیدید جابه‌جاگرهای ِ دیراک یک الگوی ِ سازگار ِ کوانتش ارائه می‌کنند. دلیل ِ آن که این روش مورد ِ توجه نیست هم‌وردا نبودن ِ آن تحت ِ تبدیلات ِ لورنتس است. با این حال می‌شود دید که مشاهده‌پذیرها در این الگوی ِ کوانتش هم‌ارز ِ مشاهده‌پذیرها در روش ِ فرمی هستند. به‌ترین راه ِ اثبات ِ هم‌ارزی ِ این دو روش و در واقع سرراست‌ترین روش ِ مطالعه‌ی ِ نظریه‌ی ِ میدان‌های ِ کوانتمی روش ِ انتگرال ِ مسیر است، به ویژه زمانی که ناچار از مطالعه‌ی ِ نظریه‌ای با تقارن ِ پیمانه‌ای ِ ناآبلی مثل ِ برهم‌کنش‌های ِ ضعیف و قوی ِ هسته‌ای باشیم.

5 پیوست ِ ۲. تابع دو نقطه‌ای در نظریه‌ی فرمی

نظریه‌ی ِ فرمی با لاگرانژی ِ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\,\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2, \tag{64}$$

داده می‌شود. با چشم‌پوشی از جملات ِ مرزی در کنش،[10] می‌شود لاگرانژی را به صورت ِ زیر بازنویسی کرد،

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^\mu\left[\eta_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu. \tag{65}$$

که در آن $\Box = \partial_t^2 - \nabla^2$. شما از این جا می‌توانید معادله‌ی ِ حرکت ِ (49) را به دست آورید.

اگر بتوانیم میدان ِ B^μ را بر حسب ِ A^μ به گونه‌ای پیدا کنیم که کنش ِ بالا را بشود به صورت ِ زیر نوشت،

[10] این کار همیشه شدنی نیست. مثلاً اگر توپولوژی ِ فضازمان بدیهی نباشد و یا این‌که با یک نظریه‌ی ِ غیر ِ آبلی مثل ِ نظریه‌ی ِ کوانتمی ِ رنگی که برای ِ توصیف ِ برهم‌کنش ِ قوی ِ هسته‌ای به کار می‌رود سروکار داشتیم به آسانی نمی‌شد جملات ِ مرزی در کنش را کنار گذاشت.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} B^\mu \left[\eta_{\mu\nu} \Box\right] B^\nu, \tag{66}$$

آن وقت هر مؤلفه‌ی ِ B^μ را می‌شود مثل ِ یک میدان اسکالر ِ مستقل در نظر گرفت و کوانتش ِ دوم را به سادگی انجام داد. خوش‌بختانه میدان ِ B^μ را می‌شود به آسانی حساب کرد،

$$B_\mu = \left[\eta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} - 1\right) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}\right] A^\nu. \tag{67}$$

عمل‌گر ِ $\frac{1}{\Box}$ با رابطه‌ی ِ زیر تعریف می‌شود،

$$\frac{1}{\Box}\phi(x) = \int d^4y G(x-y)\phi(y), \tag{68}$$

که در آن $G(x-y)$ تابع ِ گرین است،

$$\Box G(x-y) = (2\pi)^4 \delta^4(x-y). \tag{69}$$

می‌بینید که $\Box \frac{1}{\Box}\phi = \phi$.

هرچند لاگرانژی ِ (66) ظاهراً چهار میدان ِ اسکالر ِ مستقل را توصیف می‌کند اما این واقعیت که هر کدام از این میدان‌ها مؤلفه‌های ِ یک چهاربردار ِ لورنتسی است ما را با محدودیتی روبه‌رو می‌کند. برای ِ دیدن ِ این محدودیت فرض کنید که b_μ و $b_\mu^\dagger$ به ترتیب عمل‌گرهای ِ فنا و خلق ِ نظیر ِ میدان ِ B_μ در کوانتش ِ دوم باشد. طبیعی است که جبر ِ این عمل‌گرها را به صورت ِ زیر بگیریم،

$$[b_\mu(\vec{k}), b_\nu^\dagger(\vec{k'})] = \delta_{\mu\nu}\delta^3(\vec{k} - \vec{k'}), \qquad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{70}$$

که در نتیجه‌ی ِ آن یک همیلتونی ِ خوب خواهیم داشت،

$$H = \sum_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega(\vec{k}) b_\mu^\dagger(\vec{k}) b_\mu(\vec{k}). \tag{71}$$

حالا اگر با تکرار ِ محاسباتی که به معادله‌ی ِ (41) انجامید تابع ِ دو نقطه‌ای را در این جا با فرض ِ $t < t'$ حساب کنیم، خواهیم دید که

$$\langle 0| T B_\mu(t', \vec{y}) B_\nu(t, \vec{x}) |0\rangle = \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\vec{q})} e^{-i\omega(\vec{q})(t'-t)} e^{-i\vec{q}.\vec{x}}, \tag{72}$$

اما این نتیجه نمی‌تواند درست باشد. چرا که سمت ِ چپ ِ این تساوی یک تانسور ِ رتبه‌ی ِ دو است اما $\delta_{\mu\nu}$ یک تانسور ِ لورنتسی نیست.[11] راه ِ حل ِ این مشکل این است که جبر ِ (70) را به صورت ِ زیر بازنویسی کنیم،

---

[11] توجه کنید که چون تقارن ِ لورنتس تقارن ِ طبیعت ِ ما است ویژه‌حالت ِ خلأ را تحت ِ تبدیلات ِ لورنتس ناوردا می‌دانیم. هم‌چنین توجه کنید که تبدیلات ِ لورنتس ترتیب ِ زمانی را به هم نمی‌زنند.

$$[b_\mu(\vec{k}), b_\nu^\dagger(\vec{k'})] = -\eta_{\mu\nu}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \tag{73}$$

که در نتیجه‌ی آن

$$\langle 0| TB_\mu(t',\vec{y})B_\nu(t,\vec{x})|0\rangle = -\eta_{\mu\nu}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega(\vec{q})}e^{-i\omega(\vec{q})(t'-t)}e^{-i\vec{q}.\vec{x}}, \tag{74}$$

هرچند این نتیجه مطلوب است اما با این کار ما اشکال دیگری به وجود آمده است. همیلتونی دیگر خوب نیست،

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega(\vec{k})\left[\sum_{i=1}^{3} b_i^\dagger(\vec{k})b_i(\vec{k}) - b_0^\dagger(\vec{k})b_0\right], \tag{75}$$

چرا که دست‌گاهی را توصیف می‌کند که حالت‌های برانگیخته‌ترش کم‌انرژی‌تر هستند.

البته باید با دیدن لاگرانژی (66) انتظار چنین دردسری را می‌داشتیم، چرا که در آن جا جمله‌ی انرژی جنبشی برای مؤلفه‌های فضایی B_i با جمله‌ی انرژی جنبشی B_0 یک منها تفاوت دارد. از آن جا که میدان‌های B تنها به عنوان یک ابزار برای کوانتش دوم نظریه‌ی فرمی به کار ما می‌آید من بدون توجه به این اشکال به محاسبه ادامه می‌دهم اما در پایان باید متوجه باشم که این اشکال چه‌گونه به نظریه‌ی فرمی به ارث می‌رسد.

تابع دونقطه‌ای میدان فرمی را می‌شود به سادگی از تابع دو نقطه‌ای میدان B به دست آورد. در واقع از معادله‌ی (67) داریم،

$$A_\mu = \left[\eta_{\mu\nu} + \left(\sqrt{\xi}-1\right)\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}\right]B^\nu. \tag{76}$$

با جای‌گذاری مستقیم می‌شود دید که

$$\langle 0| TA_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{dq^0}{2\pi i}e^{iq.(y-x)}D_{\mu\nu}(q), \tag{77}$$

که در آن

$$D_{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{q^2}\left[\eta_{\mu\nu} + (\xi-1)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right], \tag{78}$$

انتشارگر فاینمن است. برای به دست آوردن این نتیجه کافی است پس از جای‌گذاری A_μ برحسب B_μ از روابط زیر استفاده کنید،

$$\begin{aligned}\partial_\mu e^{iqx} &= i\,q_\mu\, e^{iqx},\\ \Box e^{iqx} &= -q^2\, e^{iqx},\\ \frac{1}{\Box}e^{iqx} &= -\frac{1}{q^2}\, e^{iqx}\end{aligned} \tag{79}$$

هرچند تساویِ سوم ظاهراً نتیجه‌یِ طبیعیِ تساویِ دوم است (که هست!) اما به خواننده‌یِ علاقه‌مند پیش‌نهاد می‌کنم که با استفاده از تعریفِ (68) درستیِ آن را تحقیق کند.

با انتخابِ پیمانه‌یِ فاینمن $\xi = 1$ از انتشارگرِ فاینمن معلوم می‌شود که اشکالِ نظریه‌یِ B کاملاً به نظریه‌یِ A سرایت کرده است. دیدیم که اشکال به این برمی‌گردد که با برانگیخته‌تر شدنِ میدانِ B_0 انرژی کاهش می‌یابد. اما می‌شود نشان داد که در نظریه‌یِ ماکسول A_0 برانگیخته نمی‌شود می‌بینید که این نکته با انتخابِ پیمانه‌یِ تابش $A_0 = 0$ هم‌خوانی دارد. توضیحِ مبسوطِ این پدیده در بخشِ ۵.۵ از مرجعِ [۲] آمده است.

مراجع

[۱] فرهنگ لران، «وحدتِ چهار نیرو در ابعادِ بالا و مسأله‌یِ مقیاس‌ها»، گاما، ش ۱۳، بهار ۱۳۸۵، صص ۷ تا ۱۷.

[2] M. E. Peskin, D. V. Shroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995

[3] S. Weinberg, “The Cosmological Problem”, *Reviews of Modern Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 1-23 (1989).