تصویر ِ تمام‌ریخت ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-043 (2007/02/28)

بردارها یِ هم‌دوس ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ، و محاسبه با استفاده از این بردارها بررسی می‌شود.

1 مقدمه

یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ به جرم ِ m و بس‌آمد ِ زاویه‌ای یِ ω را در نظر بگیرید. همیلتنی یِ این نوسان‌گر

$$H = \frac{1}{2}\, p^2 + \frac{m\,\omega^2}{2}\, x^2 \tag{1}$$

است، که x مکان و p تکانه است. مکان و تکانه دو عمل‌گر ِ اِرمیتی اند با رابطه یِ جابه‌جایی یِ

$$[x, p] = \mathrm{i}\,\hbar. \tag{2}$$

استفاده از عمل‌گر ِ پایین‌بر (a)، بالابر ($a^\dagger$)، و عدد ِ برانگیخته‌گی (N) بسیار ی از محاسبات ِ متناظر با این سیستم را ساده می‌کند. این عمل‌گرها با این رابطه‌ها تعریف می‌شوند.

$$a := \sqrt{\frac{\omega\,m}{2\,\hbar}}\, x + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\,\hbar\,\omega\,m}}\, p, \tag{3}$$

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

$$a^\dagger := \sqrt{\frac{\omega\, m}{2\,\hbar}}\, x - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\,\hbar\,\omega\, m}}\, p, \tag{4}$$

$$N := a^\dagger\, a, \tag{5}$$

با استفاده از (2)، رابطه‌ها یِ جابه‌جایی یِ این عمل‌گرها با هم می‌شود

$$[a, a^\dagger] := 1, \tag{6}$$

$$[N, a] := -a, \tag{7}$$

$$[N, a^\dagger] := a^\dagger. \tag{8}$$

هم‌چنین، همیلتنی می‌شود

$$H = \hbar\,\omega \left(N + \frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

دو پایه یِ معمول برا یِ فضا یِ هیلبِرت [a] ِ این سیستم، یک ی پایه یِ مکان (ویژه‌بردارها یِ x)، و دیگری پایه یِ انرژی (ویژه‌بردارها یِ H) اند. از رابطه یِ (9) معلوم است که ویژه‌بردارها یِ H همان ویژه‌بردارها یِ N اند. ویژه‌بردار ِ عمل‌گر ِ Λ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ را با $|\Lambda = \lambda\rangle$ نشان می‌دهیم:

$$\Lambda\,|\Lambda = \lambda\rangle = \lambda\,|\Lambda = \lambda\rangle. \tag{10}$$

البته هر جا خود ِ Λ معلوم باشد می‌شود آن را حذف کرد.

عمل‌گر ِ N ناتبه‌گن، و ویژه‌مقدارها یِ آن همه یِ عددها یِ صحیح ِ نامنفی اند. ویژه‌بردارها یِ بهنجار ِ این عمل‌گر را می‌شود از اثردادن ِ $a^\dagger$ بر یک حالت ِ پایه به دست آورد:

$$|N = n\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}\,(a^\dagger)^n\,|N = 0\rangle, \tag{11}$$

یا به شکل ِ ساده‌تر،

$$|n\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}\,(a^\dagger)^n\,|0\rangle. \tag{12}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
a\,|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle,\\
a^{\dagger}\,|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

و

$$
\begin{aligned}
\langle n|\,a^{\dagger} &= \sqrt{n}\,\langle n-1|,\\
\langle n|\,a &= \sqrt{n+1}\,\langle n+1|.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

مطالب ِ این بخش را می‌شود به طور ِ مفصل در مثلاً [1] یافت.

2 بردارها یِ هم‌دوس ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ

با استفاده از رابطه یِ جابه‌جایی یِ (6) نتیجه می‌شود

$$
[a, \exp(\lambda\, a^{\dagger})] = \lambda\, \exp(\lambda\, a^{\dagger}), \tag{15}
$$

که λ یک عدد ِ مختلط ِ دل‌بخواه است. از اینجا نتیجه می‌شود

$$
a\,[\exp(\lambda\, a^{\dagger})\,|0\rangle] = \lambda\,[\exp(\lambda\, a^{\dagger})\,|0\rangle]. \tag{16}
$$

پس بردار ی که دوطرف ِ این رابطه ظاهر شده ویژه‌بردار ِ a متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ است:

$$
|a=\lambda\rangle = \exp(\lambda\, a^{\dagger})\,|0\rangle. \tag{17}
$$

به این بردارها بردارها یِ هم‌دوس می‌گویند.

این بردارها پایه نیستند، اما می‌شود بردارها یِ دیگر را بر حسب ِ آن‌ها بسط داد. اول نشان می‌دهیم این‌ها پایه نیستند و برا یِ این کار نشان می‌دهیم این‌ها یک مجموعه یِ خطی‌مستقل نیستند. برا یِ نشان‌دادن ِ این، ابتدا اثر ِ ویژه‌بردارها یِ عدد ِ برانگیخته‌گی بر این بردارها را حساب کنیم:

$$
\langle n|a=\lambda\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}\,\langle 0|\,a^{n}\,|a=\lambda\rangle,
$$

$$= \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,\langle 0|a=\lambda\rangle,$$

$$= \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,\langle 0|\,\exp(\lambda\, a^\dagger)\,|0\rangle, \tag{18}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\langle n|a=\lambda\rangle = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}. \tag{19}$$

حالا بردار ـِ $|\phi\rangle$ به این شکل را در نظر می‌گیریم.

$$|\phi\rangle := \oint_C \mathrm{d}\lambda\; f(\lambda)\,|a=\lambda\rangle, \tag{20}$$

که C یک خم ـِ بسته در صفحه یِ (λ یِ) مختلط است و f تابع ی که درون ـِ این خم تحلیلی است. از (19) نتیجه می‌شود

$$\langle n|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}\;\oint_C \mathrm{d}\lambda\; f(\lambda)\,\lambda^n. \tag{21}$$

طرف ـِ راست صفر است، چون f درون ـِ C تحلیلی است. پس

$$\langle n|\phi\rangle = 0, \tag{22}$$

و چون ویژه‌بردارها یِ عدد ـِ برانگیخته‌گی پایه اند،

$$|\phi\rangle = 0. \tag{23}$$

پس یک ترکیب ـِ خطی یِ نابدیهی از بردارها یِ هم‌دوس صفر است، که نتیجه می‌دهد مجموعه یِ این بردارها خطی‌مستقل نیست.

نشان می‌دهیم هر بردار ی را می‌شود بر حسب ـِ بردارها یِ این مجموعه بسط داد. برا یِ این کار عمل‌گر ـِ I را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$I := \int \frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\;\exp(-|\lambda|^2)\,|a=\lambda\rangle\,\langle a=\lambda|, \tag{24}$$

که ناحیه یِ انتگرال‌گیری همه یِ صفحه یِ مختلط است. نشان می‌دهیم این عمل‌گر همانی است. داریم

$$\langle m|\,I\,|n\rangle = \sqrt{\frac{1}{m!\,n!}}\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\;\exp(-|\lambda|^2)\,\lambda^n\,(\lambda^*)^m,$$

$$= \sqrt{\frac{1}{m!\,n!}}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\;\int_0^{2\,\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\pi}\;\exp(-r^2)\,r^{n+m}\;\exp[\mathrm{i}\,(n-m)\,\theta],$$

$$= 2\,\delta_{m\,n}\sqrt{\frac{1}{m!\,n!}}\int_0^\infty r\,\mathrm{d}r\;\exp(-r^2)\,r^{n+m},$$

$$= \delta_{m\,n}\,\frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{d}u\;\exp(-u)\,u^n, \tag{25}$$

که در آن (r,θ) مختصات ـِ قطبی یِ λ است. از این رابطه دیده می‌شود

$$\langle m|\,I\,|n\rangle = \delta_{m\,n}, \tag{26}$$

که نتیجه می‌دهد

$$I = 1. \tag{27}$$

به این ترتیب، برا یِ بردار ـِ دل‌بخواه ـِ $|\psi\rangle$ داریم

$$|\psi\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\;\exp(-|\lambda|^2)\,\psi_a(\lambda^*)\,|a=\lambda\rangle \tag{28}$$

که در آن

$$\psi_a(\lambda^*) := \langle a=\lambda|\psi\rangle. \tag{29}$$

پس هر بردار ی را می‌شود بر حسب ـِ بردارها یِ هم‌دوس بسط داد. علت ـِ انتخاب ـِ نماد ـِ $\psi_a(\lambda^*)$ این است که این عدد یک تابع ـِ تحلیلی از λ^* است. برا یِ دیدن ـِ این، کافی است توجه کنیم

$$\psi_a(\lambda^*) = \sum_n\frac{(\lambda^*)^n}{\sqrt{n!}}\,\langle n|\psi\rangle, \tag{30}$$

که در آن (20) به کار رفته است.

تابع ـِ ψ_a را با تابعِ‌موج ـِ متناظر با $\langle\psi|$ مقایسه کنیم. اول ی از اثر ـِ مزدوج ـِ اِرمیتی یِ ویژه‌بردارها یِ عمل‌گر ـِ پایین‌بر بر $|\psi\rangle$ به دست می‌آید و دومی از اثر ـِ مزدوج ـِ اِرمیتی یِ

ویژه‌بردارها یِ عمل‌گر ـِ مکان. اولی یک تابع ـِ مجذورانتگرال‌پذیر است و دومی یک تابع ـِ تحلیلی. به همین خاطر است که به محاسبه بر اساس ـِ ویژه‌بردارها یِ عمل‌گر ـِ پایین‌بر تصویر ـِ تمام‌ریخت (یا تحلیلی) می‌گویند، در مقابل ـِ تصویر ـِ مکان (محاسبه بر اساس ـِ ویژه‌بردارها یِ مکان).

3 ویژه‌گی‌ها یِ بردارها یِ هم‌دوس

از تعریف ـِ بردارها یِ هم‌دوس دیده می‌شود

$$a\,|a=\lambda\rangle = \lambda\,|a=\lambda\rangle,$$

$$a^\dagger\,|a=\lambda\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}|a=\lambda\rangle, \tag{31}$$

و

$$\langle a=\lambda|\,a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda^*}\,\langle a=\lambda|,$$

$$\langle a=\lambda|\,a^\dagger = \lambda^*\,\langle a=\lambda|. \tag{32}$$

داریم

$$\begin{aligned}\langle a=\mu|a=\lambda\rangle &= \langle 0|\,\exp(\mu^*\,a)\,|a=\lambda\rangle,\\ &= \exp(\mu^*\,\lambda)\,\langle 0|a=\lambda\rangle,\end{aligned} \tag{33}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\langle a=\mu|a=\lambda\rangle = \exp(\mu^*\,\lambda). \tag{34}$$

با استفاده از رابطه‌ها یِ (3) و (4) می‌شود عمل‌گرها یِ مکان و تکانه را بر حسب ـِ a و $a^\dagger$ بیان کرد:

$$x := \frac{\ell}{\sqrt{2}}\,(a + a^\dagger),$$

$$p := \frac{-\mathrm{i}\,\hbar}{\ell\,\sqrt{2}}\,(a - a^\dagger), \tag{35}$$

که

$$\ell := \sqrt{\frac{\hbar}{\omega\, m}}. \tag{36}$$

به این ترتیب،

$$x\,|a=\lambda\rangle = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\,\left(\lambda + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\,|a=\lambda\rangle,$$

$$p\,|a=\lambda\rangle = \frac{-\mathrm{i}\,\hbar}{\ell\,\sqrt{2}}\,\left(\lambda - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\,|a=\lambda\rangle, \tag{37}$$

و

$$\langle a=\lambda|\,x = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\,\left(\lambda^* + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda^*}\right)\,\langle a=\lambda|,$$

$$\langle a=\lambda|\,p = \frac{-\mathrm{i}\,\hbar}{\ell\,\sqrt{2}}\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda^*} - \lambda^*\right)\,\langle a=\lambda|. \tag{38}$$

با استفاده از این‌ها اثرِ مزدوجِ اِرمیتی یِ ویژه‌بردارها یِ مکان بر بردارها یِ هم‌دوس را حساب می‌کنیم:

$$f(s,\lambda) := \langle x=s|a=\lambda\rangle. \tag{39}$$

با محاسبه یِ $\langle x=s|\,a\,|a=\lambda\rangle$ نتیجه می‌شود

$$\lambda\,f(s,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(\frac{s}{\ell} + \ell\,\frac{\partial}{\partial s}\right)\,f(s,\lambda). \tag{40}$$

با محاسبه یِ $\langle x=s|\,x\,|a=\lambda\rangle$ هم نتیجه می‌شود

$$s\,f(s,\lambda) = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\,\left(\lambda + \frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\,f(s,\lambda). \tag{41}$$

از (40) نتیجه می‌شود

$$f(s,\lambda)=g_1(\lambda)\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\left(\frac{s}{\ell}\right)^2+\sqrt{2}\,\lambda\,\left(\frac{s}{\ell}\right)\right]. \tag{42}$$

از (41) هم نتیجه می‌شود

$$f(s,\lambda)=g_2(s)\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\lambda^2+\sqrt{2}\,\lambda\,\left(\frac{s}{\ell}\right)\right]. \tag{43}$$

از ترکیب ـِ (42) و (43) داریم

$$f(s,\lambda)=C\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\left(\frac{s}{\ell}\right)^2-\frac{1}{2}\,\lambda^2+\sqrt{2}\,\lambda\,\left(\frac{s}{\ell}\right)\right]. \tag{44}$$

سرانجام،

$$\int \mathrm{d}s\,|f(s,0)|^2=1, \tag{45}$$

که نتیجه یِ این است که $|a=0\rangle$ (که همان $|0\rangle$ است) یکه است. از (45) نتیجه می‌شود

$$|C|=\left(\frac{1}{\pi\,\ell^2}\right)^{1/4}. \tag{46}$$

C را حقیقی و مثبت می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\langle x=s|a=\lambda\rangle=\left(\frac{1}{\pi\,\ell^2}\right)^{1/4}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\left(\frac{s}{\ell}\right)^2-\frac{1}{2}\,\lambda^2+\sqrt{2}\,\lambda\,\left(\frac{s}{\ell}\right)\right]. \tag{47}$$

4 انتشارگر ـِ نوسان‌گر ـِ هم‌آهنگ

تعریف می‌کنیم

$$K(r,s;\beta):=\langle x=r|\,\exp(-\beta\,H)\,|x=s\rangle. \tag{48}$$

اگر به جا یِ β بگذاریم $(k_\mathrm{B}\,T)^{-1}$، (که T دما و k_B ثابت ـِ بُلتس‌مان [b] است) K عنصر ـِ ماتریسی یِ ماتریس ـِ چگالی است (مثلاً [2]). اگر به جا یِ β بگذاریم $(-t)\,(\mathrm{i}\,\hbar)^{-1}$ هم، K انتشارگر است (مثلاً [1]). هدف محاسبه یِ K برا یِ نوسان‌گر ـِ هم‌آهنگ است. این محاسبه را در تصویر ـِ تمام‌ریخت انجام می‌دهیم. داریم

$$\exp(-\beta\, H)\,|a=\lambda\rangle = \exp(-\beta\, H)\ \exp(\lambda\, a^\dagger)\ \exp(\beta\, H)\ \exp(-\beta\, H)\,|0\rangle,$$
$$= \exp(-\beta\, H)\ \exp(\lambda\, a^\dagger)\ \exp(\beta\, H)\ \exp(-\beta\,\hbar\,\omega/2)\,|0\rangle. \quad (49)$$

ضمناً داریم

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[\exp(-\beta\, H)\, a^\dagger\ \exp(\beta\, H)] = \exp(-\beta\, H)\,[a^\dagger, H]\ \exp(\beta\, H),$$
$$= -\hbar\,\omega\,[\exp(-\beta\, H)\, a^\dagger\ \exp(\beta\, H)], \quad (50)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\exp(-\beta\, H)\, a^\dagger\ \exp(\beta\, H) = \exp(-\beta\,\hbar\,\omega)\, a^\dagger. \quad (51)$$

با گذاشتن ِ این در (49)،

$$\exp(-\beta\, H)\,|a=\lambda\rangle = \exp(-\beta\,\hbar\,\omega/2)\,|a=\exp(-\beta\,\hbar\,\omega)\,\lambda\rangle. \quad (52)$$

از این‌جا معلوم می‌شود

$$K(r,s;\beta) = \int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\ \exp(-|\lambda|^2)\,\langle x=r|\ \exp(-\beta\, H)\,|a=\lambda\rangle\,\langle a=\lambda|x=s\rangle,$$
$$= \exp(-\beta\,\hbar\,\omega/2)\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\ \exp(-|\lambda|^2)$$
$$\times\langle x=r|a=\tilde\lambda\rangle\,\langle a=\lambda|x=s\rangle, \quad (53)$$

که

$$\tilde\lambda := \exp(-\beta\,\hbar\,\omega)\,\lambda. \quad (54)$$

به این ترتیب،

$$K(r,s;\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\ell^2}}\,\exp(-\beta\,\hbar\,\omega/2)\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\,\exp(-|\lambda|^2)$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\ell}\right)^2-\frac{1}{2}\,(\tilde{\lambda})^2+\sqrt{2}\,\tilde{\lambda}\,\left(\frac{r}{\ell}\right)\right]$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\ell}\right)^2-\frac{1}{2}\,(\lambda^*)^2+\sqrt{2}\,\lambda^*\,\left(\frac{s}{\ell}\right)\right]. \tag{55}$$

در طرف ِ چپ عبارت ی به شکل ِ

$$f(A,B) := \int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}\,\exp(\Lambda^{\mathrm{t}}\,A\,\Lambda+2\,B^{\mathrm{t}}\,\Lambda) \tag{56}$$

ظاهر شده، که A یک ماتریس ِ متقارن ِ ثابت و B یک ماتریس ِ ستونی ِ دومئلفه‌ای ِ ثابت است و

$$\Lambda := \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^*\end{pmatrix}. \tag{57}$$

انتگرال ِ طرف ِ راست ِ (56)، بر حسب ِ X و Y با

$$X := \frac{\lambda+\lambda^*}{2},$$
$$Y := \frac{\lambda-\lambda^*}{2\,\mathrm{i}} \tag{58}$$

یک انتگرال ِ گاؤسی است. یک راه ِ محاسبه یِ این انتگرال آن است که نما یِ انتگرال‌ده را مربع ِ کامل کنیم. نتیجه می‌شود

$$f(A,B) = \frac{1}{\sqrt{-4\,\det(A)}}\,\exp(-B^{\mathrm{t}}\,A^{-1}\,B). \tag{59}$$

البته این رابطه به شرط ی درست است که انتگرال وجود داشته باشد. شرط ِ وجود ِ این انتگرال آن است که جزئ ِ حقیقی یِ بخش ی از نما یِ انتگرال‌ده که نسبت به X و Y مجذوری است نامثبت باشد. این بخش می‌شود

$$\Lambda^{\mathrm{t}}\,A\,\Lambda =: \Xi^{\mathrm{t}}\,M\,\Xi, \tag{60}$$

که

$$\Xi := \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{61}$$

پس شرط ـ وجود ـ انتگرال ـ رابطه یِ (56) این است که جزئ ـ حقیقی یِ ماتریس ـ M منفی یِ شبهِمعین باشد.

در این مسئله،

$$A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} C^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{62}$$

و

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2\,\ell}\begin{pmatrix} C\,r \\ s \end{pmatrix}, \tag{63}$$

که

$$C := \exp(-\beta\,\hbar\,\omega). \tag{64}$$

از (62) نتیجه می‌شود

$$M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} C^2+3 & \mathrm{i}\,(C^2-1) \\ \mathrm{i}\,(C^2-1) & 1-C^2 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

ویژه‌مقدارها یِ جزئ ـ حقیقی یِ M باید نامثبت باشند. این ویژه‌مقدارها را μ_1 و μ_2 می‌نامیم. داریم

$$\begin{aligned} \mu_1+\mu_2 &= -2, \\ 4\,\mu_1\,\mu_2 &= [\mathrm{Re}(C^2)+3]\,[1-\mathrm{Re}(C^2)]-[\mathrm{Im}(C^2)]^2. \end{aligned} \tag{66}$$

مجموع ـ ویژه‌مقدارها منفی است. پس کافی است حاصلِ‌ضرب ـ ویژه‌مقدارها نامنفی باشد. شرط ـ این می‌شود

$$[\mathrm{Re}(C^2)+1]^2+[\mathrm{Im}(C^2)]^2 \le 4, \tag{67}$$

یعنی C^2 باید در قرص ی به شعاع ـ 2 باشد که مرکز ـ آن نقطه یِ 1 است. دیده می‌شود اگر β حقیقی و نامنفی باشد، C^2 حقیقی و رو یِ پاره‌خط ـ $[0,1]$ است. اگر β موهومی باشد، C^2 رو یِ یک دایره به مرکز ـ مبدئ و به شعاع ـ 1 است. در هردوحالت، C^2 شرط ـ (67) را بر می آورَد.

از (59) نتیجه می‌شود

$$f(A,B) = \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\,\exp\left\{-\frac{C^2\,[(r/\ell)^2+(s/\ell)^2] - 2\,C\,(r/\ell)\,(s/\ell)}{1-C^2}\right\}, \qquad (68)$$

و به این ترتیب،

$$K(r,s;\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\ell^2\,\sinh(\beta\,\hbar\,\omega)}} \times \exp\left\{-\frac{[(r/\ell)^2+(s/\ell)^2]\,\cosh(\beta\,\hbar\,\omega) - 2\,(r/\ell)\,(s/\ell)}{2\,\sinh(\beta\,\hbar\,\omega)}\right\}. \qquad (69)$$

از جمله، انتشارگر ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ می‌شود

$$\begin{aligned} G(r,s;t) :=& \;\langle x=r|\,\exp\left(\frac{t\,H}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\,|x=s\rangle, \\ =& \;\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\ell^2\,\sin(\omega\,t)}} \\ & \times\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{[(r/\ell)^2+(s/\ell)^2]\,\cos(\omega\,t) - 2\,(r/\ell)\,(s/\ell)}{2\,\sin(\omega\,t)}\right\}. \qquad (70)\end{aligned}$$

5 مرجع‌ها

[1] Jun John Sakurai; “Modern quantum mechanics”, (Addison Wesley, 1995) chapter 2

[2] P. K. Pathria; “Statistical mechanics”, (Pergamon Press, 1993) chapter 5

6 اسم‌ها يِ خاص

[a] Hilbert

[b] Boltzmann