تَله یِ پِنینگ

احمد شریعتی

در این مقاله یِ آموزشی توضیح داده می‌شود که تله ی ِ پنینگ چیست و چه گونه می‌توان با آن ذره‌ها یِ باردار (یون‌ها یا الکترون‌ها) را در نزدیکی یِ نقطه یِ خاصّ ی از فضا گیر انداخت. به برخ ی از کاربردها یِ تله یِ پنینگ نیز اشاره می‌شود.

1 مقدّمه

تله یِ پنینگ وسیله ای است که در آن ترکیب ِ یک میدان ِ الکتریکی با یک میدان ِ مغناطیسی چنان اثر ی بر حرکت ِ یک بار دارد که ذرّه در ناحیه ای محدود مقیّد می‌شود ـــ چیز ی که با اعمال ِ یک میدان ِ الکتریکی یِ تنها یا یک میدان ِ مغناطیسی یِ تنها شدنی نیست. به علاوه، حرکت ِ ذرّه در تله یِ پنینگ هم در حد ِ کلاسیک و هم در حدّ ِ کوانتومی حل‌پذیر است، و به این ترتیب رفتار ِ ذرّه (یون یا الکترون) را می‌توان به دقّت پیش‌بینی کرد.

تله ی ِ پنینگ اختراع ِ هانس گِئورگ دِملت [a] است. دِملت این وسیله را به افتخار ِ پنینگ [b]، فیزیک‌پیشه ی ِ هلندی، «تله ی ِ پنینگ» نام‌گذاری کرده است. این وسیله باعث شد فیزیک‌پیشه‌ها بتوانند یون‌ها یا الکترون‌ها را در جا یی گیر بیندازند. دِملت یک ی از سه برنده یِ جایزه یِ نُبل ِ فیزیک در سال ِ 1989 بود.

2 میدان‌ها

در تله یِ پنینگ، میدان ِ مغناطیسی بسیار ساده است ــ میدان ی ثابت در امتداد ِ محور ِ z.

$$\vec{B} = B\,\mathbf{k}. \qquad (1)$$

در چنین میدان ی یک ذرّه یِ باردار به بار ِ q و جرم ِ M حرکت ی مارپیچی دارد که بسامد ِ زاویه ایِ مؤلفه یِ دایره‌ای یِ آن همان بسامد ِ معروف به «بسامد ِ سیکلوترون» است:

$$\omega_c := \frac{|q|\,B}{M}, \qquad \nu_c := \frac{\omega_c}{2\,\pi}. \tag{2}$$

در این فرمول علامتِ قدرِمطلق را مخصوصاً وارد کرده ایم تا بسامد ی که به دست می‌آید همواره مثبت باشد ــ توجّه داریم که جهتِ گردشِ ذرّه در میدانِ مغناطیسی به علامتِ بار ِ آن بسته‌گی دارد.

برا یِ الکترون یا پوزیترون در یک میدانِ $B = 5.8\ \mathrm{T}$ خواهیم داشت:

$$\nu_c = 160\,\mathrm{GHz}. \tag{3}$$

ذرّه یِ باردارِ کلاسیک ی که با چنین بسامد ی بچرخد، امواجِ الکترومغناطیس ی با همین بسامد گسیل می‌کند. طولِ‌موجِ این امواج $\lambda_c = 1.9\ \mathrm{mm}$ است.

امّا میدانِ الکتریکی به این شکل است:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{M\,\omega_z^2}{2\,q}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2\,z\,\mathbf{k})\,, \tag{4}$$

که در این جا ω_z ثابت ی از جنسِ بسامدِ زاویه‌ای است. این میدان مشتق از پتانسیلِ الکتریکی یِ زیر است.

$$\Phi(\vec{r}) := \frac{M\,\omega_z^2}{4\,q}\left(2\,z^2 - x^2 - y^2\right). \tag{5}$$

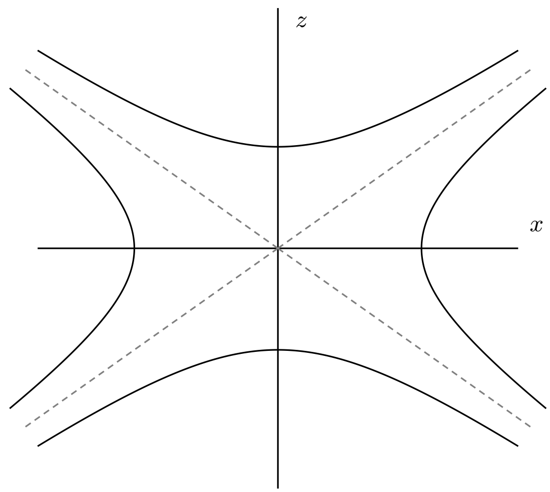
دقّت کنید که لاپلاسی یِ این تابع صفر است و در مختصّه‌ها یِ کروی به شکلِ ضریب ی از $r^2\,P_2(\cos\theta)$ است ($P_2(\cos\theta)$ چندجمله‌ای یِ لُژاندر با شاخصِ 2 است). با توجّه به شکلِ پتانسیل در مختصّه‌ها یِ دکارتی، واضح است که سطحِ هم‌پتانسیلِ 0 یک مخروط است، و باقی یِ سطوحِ هم‌پتانسیل هذلولی‌گون‌ها یی یک‌پارچه یا دوپارچه اند. مثلاً اگر q مثبت باشد، سطوحِ هم‌پتانسیل با پتانسیلِ مثبت هذلولی‌گون‌ها یِ دوپارچه، و سطوحِ هم‌پتانسیل با پتانسیلِ منفی هذلولی‌گون‌ها یِ یک‌پارچه اند.

$$\begin{cases} 2\,z^2 - x^2 - y^2 = \text{constant} \le 0 & \text{هذلولی‌گون یک‌پارچه} \\ 2\,z^2 - x^2 - y^2 = 0 & \text{مخروط} \\ 2\,z^2 - x^2 - y^2 = \text{constant} \ge 0 & \text{هذلولی‌گون دوپارچه} \end{cases} \tag{6}$$

ببینیم چه طور می‌توان چنین میدان ی فراهم کرد. ابتدا تعریف کنیم

$$\nu_z := \frac{\omega_z}{2\pi}. \tag{7}$$

فرض کنید برا یِ الکترون ($q = -1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$) می‌خواهیم $\nu_z = 64\ \mathrm{MHz}$ باشد. این یعنی



شکل ۱: هذلولی‌ها یِ $2\,z^2 - x^2 = \pm 0.435\ \mathrm{cm}^2$ که با مقیاس $\frac{4}{1}$ کشیده شده اند.

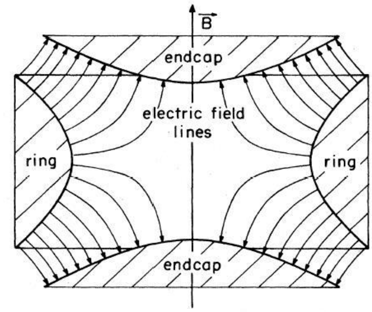
$$\frac{M\,\omega_z^2}{4\,q} = -2.30 \times 10^5\,\mathrm{V\,m^{-2}} = -23.0\,\mathrm{V\,cm^{-2}}. \tag{8}$$

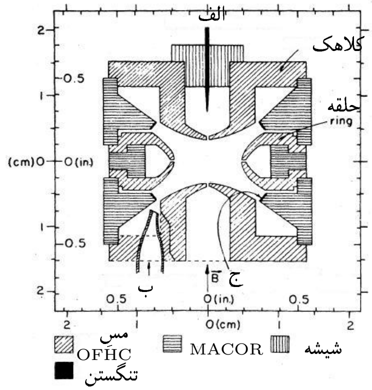
پس معادله یِ سطوحِ هم‌پتانسیلِ $\Phi_0 = \pm 10\,\mathrm{V}$ می‌شود هذلولی‌گون‌ها یِ

$$2\,z^2 - x^2 - y^2 = \frac{4\,q}{M\,\omega_z^2}\Phi_0 = \frac{\pm 10\,\mathrm{V}}{-23.0\,\mathrm{V\,m^{-2}}} = \mp 0.435\,\mathrm{cm}^2 = \mp\,(0.659\,\mathrm{cm})^2\,. \tag{9}$$

هذلولی‌ها یِ $2\,z^2 - x^2 = \mp 0.435\ \mathrm{cm}^2$ را در شکلِ ۱ کشیده ایم. اگر این هذلولی‌ها را حولِ محور ِ z بچرخانیم هذلولی‌گون‌ها یِ $2\,z^2 - x^2 - y^2 = \mp 0.435\ \mathrm{cm}^2$ به دست می‌آیند. اگر چنین هذلولی‌گون‌ها یی را با فلز بسازیم و آن‌ها را به پتانسیل‌ها یِ $\pm 10\ \mathrm{V}$ وصل کنیم، در فضا یِ بینِ هذلولی‌گون‌ها یک میدانِ الکتریکی ایجاد می‌شود. پتانسیلِ میدان ی که ایجاد می‌شود یک تابعِ هم‌آهنگ است. با توجّه به شرطِ مرزی و یک‌تا بودنِ حلِ معادله یِ لاپلاس، معلوم می‌شود که پتانسیلِ میدانِ ایجاد شده درست همان است که می‌خواهیم، یعنی (5).

الکترون ی که با بسامدِ $\nu_z = 64\ \mathrm{MHz}$ نوسان کند، امواجِ الکترومغناطیس ی با همین بسامد گسیل می‌کند که طولِ‌موجِ آن‌ها $\lambda_z = 4.7\ \mathrm{m}$ است.





الف: سوزن برا یِ اعمالِ میدانِ قوی، برا یِ گسیلِ الکترون
ب: محلِ تزریقِ میکروموج
ج: الکترود، به شکل یک نوار فلزی، برا یِ حذفِ میدان

شکل ۲: ساختمان ِ تله یِ پِنینگ. دقّت کنید که نقطه ی ِ مینیمم ِ هذلولی‌گون ِ کلاهک سوراخ است. مس ِ OFHC یعنی مس ِ بی اکسیژن و بسیار رسانا (Oxygen Free High Conductivity Copper). MACOR یک سرامیک ِ شیشه‌ای و شبیه به چینی است که نارسانا یِ بسیار خوب ی است.. شکل از مرجع ِ [1] برداشته شده است.

3 حرکت ِ کلاسیک ِ ذرّه

معادله یِ حرکت ِ کلاسیک و غیرِنسبیّتی برا یِ ذرّه ای که در تله یِ پِنینگ حرکت می‌کند چنین است:

$$M\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \;=\; \vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,M\,\omega_z^2\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2\,z\,\mathbf{k}) + \mathrm{sgn}(q)\,M\,\omega_c\,(\dot{y}\,\mathbf{i} - \dot{x}\,\mathbf{j}) \tag{10}$$

که در این جا $\mathrm{sgn}(q)$ علامت ِ بار ِ q است. برا یِ الکترون ($\mathrm{sgn}(q) = -1$) خواهیم داشت:

$$\ddot{x} + \omega_c\,\dot{y} - \frac{1}{2}\,\omega_z^2\,x = 0, \tag{11}$$

$$\ddot{y} - \omega_c\,\dot{x} - \frac{1}{2}\,\omega_z^2\,y = 0, \tag{12}$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2\,z = 0. \tag{13}$$

معادله یِ z بسیار ساده است ــ نوسان ِ هم‌آهنگ با بسامد ِ زاویه‌ای یِ ω_z ــ و از این جا ضمناً معلوم می‌شود که چرا از نماد ِ ω_z استفاده کردیم.

برا یِ حل کردنِ معادله‌ها یِ حرکتِ مؤلفه‌ها یِ x و y، که از z جدا شده اند، کافی است متغیّرِ مختلطِ ξ را تعریف کنیم.

$$\xi := x + i\, y. \tag{14}$$

به ساده‌گی دیده می‌شود که خواهیم داشت:

$$\ddot{\xi} - i\,\omega_c\,\dot{\xi} - \frac{1}{2}\,\omega_z^2\,\xi = 0. \tag{15}$$

این معادله یِ دیفرانسیل را می‌توان با جاگذاری یِ $\xi = A\, e^{i\,\omega\, t}$ به یک معادله یِ جبری یِ ساده تبدیل کرد:

$$-\,\omega^2 + \omega_c\,\omega - \frac{1}{2}\,\omega_z^2 = 0, \tag{16}$$

که دو ریشه دارد:

$$\omega_+ \;=\; \frac{1}{2}\left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\,\omega_z^2}\right) \tag{17}$$

$$\omega_- \;=\; \frac{1}{2}\left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\,\omega_z^2}\right) \tag{18}$$

خوب است به این نکته توجّه کنیم که

$$\omega_z \ll \omega_c \quad \Rightarrow \quad \omega_+ \simeq \omega_c, \quad \omega_- \simeq \frac{\omega_z^2}{2\,\omega_c}. \tag{19}$$

ω_- (در واقع $(\nu_- = \omega_-/(2\,\pi)$ را بسامدِ مَگنِترون می‌نامیم.

معادله یِ (15) خطّی است و دو حل ِ مستقل دارد که با دو ریشه یِ ω_+ و ω_- متناظر اند. پس حلِّ کلّی یِ (15) به شکلِ زیر است.

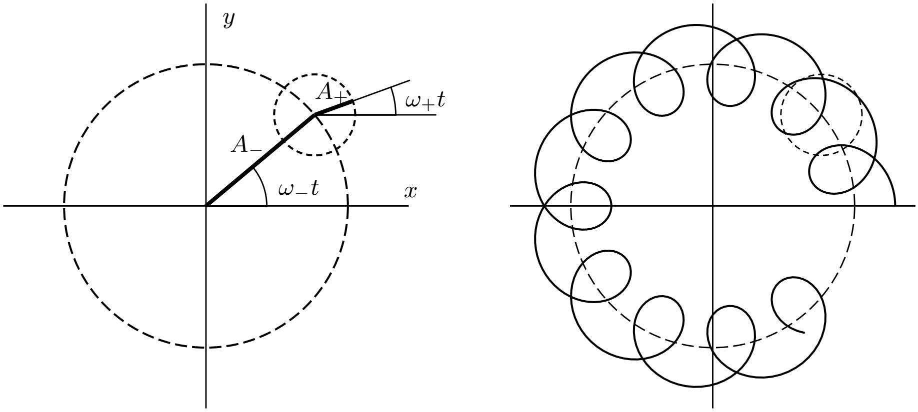
$$\xi(t) = A_-\, e^{i(\omega_-\, t + \phi_-)} + A_+\, e^{i(\omega_+\, t + \phi_+)}, \tag{20}$$

که در این جا A_- و A_+ و ϕ_- و ϕ_+ چهار ثابتِ حقیقی اند. واضح است که داریم $x = \mathrm{Re}(\xi)$ و $y = \mathrm{Im}(\xi)$، و به این ترتیب:

$$x(t) \;=\; A_-\; \cos(\omega_- t + \phi_-) + A_+\; \cos(\omega_+ t + \phi_+) \tag{21}$$

$$y(t) \;=\; A_-\; \sin(\omega_- t + \phi_-) + A_+\; \sin(\omega_+ t + \phi_+). \tag{22}$$

$$z(t) \;=\; A_z\; \cos(\omega_z t + \phi_z) \tag{23}$$



شکل ۳: تصویرِ مدار ِ حرکت ِ کلاسیک در صفحه یِ xy.

اگر A_+ و A_- صفر باشند، ذرّه رو یِ محور ِ z حرکتِ نوسانی می‌کند. اگر A_+ یا A_- صفر نباشند، باز هم حرکت توصیفِ ساده ای دارد: ذرّه با بسامدِ زاویه‌ای یِ ω_+ رو یِ دایره ای به شعاعِ A_+ حرکت می‌کند که مرکز ِ این دایره خود با بسامدِ زاویه‌ای یِ ω_- رو یِ دایره‌ای به شعاعِ A_- حرکت می‌کند. این حرکت درست مانندِ حرکتِ ماه و سیّاره‌ها در هیئتِ بطلمیوسی است — فلک‌ها یِ حامل و تدویر.

خوب است در این جا به این عددها توجّه کنیم. برا یِ $\nu_z = 64$ MHz و $\nu_c = 160$ GHz داریم

$$\nu_- = \frac{\omega_-}{2\,\pi} = 13\,\mathrm{kHz}, \tag{24}$$

$$\nu_z = 64\,\mathrm{MHz} \tag{25}$$

$$\nu_+ = \frac{\omega_+}{2\,\pi} \simeq \nu_c = 160\,\mathrm{GHz}, \tag{26}$$

$$\nu_- \ll \nu_z \ll \nu_- \simeq \nu_c. \tag{27}$$

حال اگر $A_- \gg A_+$ باشد، تصویر ِ مدار در صفحه یِ xy مثلِ شکلِ ۳ است، به این نحو که مختصّه یِ z ِ الکترون حولِ 0 با بسامدِ 64 MHz نوسان می‌کند؛ تصویر ِ مکانِ الکترون در صفحه یِ xy رو یِ دایره ای به شعاعِ A_+ (که فرض شده کوچک است) با بسامدِ 160 GHz (یعنی بسیار سریع) می‌چرخد، در حالی که مرکز ِ این دایره خود رو یِ دایره ای به شعاعِ A_- (که فرض شده بسیار بزرگ‌تر از A_+ است) با بسامد ِ 13 kHz یعنی نسبتاً بسیار آرام می‌چرخد. به این ترتیب حرکتِ کلاسیکِ الکترون چنان است که الکترون در نزدیکی یِ مبداء باقی می‌ماند (مبداء رأسِ مخروطِ پتانسیلِ 0 است). دقّت کنید که A_+ و A_- در واقعیّت نمی‌توانند خیل ی بزرگ باشند، زیرا ابعادِ کاواکِ پِنینگ،

یعنی اندازه ی ِ محفظه ای که بین ِ هذلولی‌گون‌ها ی ِ فلزّی هست متناهی است. پس اگر A_+ یا A_- از حدّ ی بزرگ‌تر باشند الکترون در واقع به هذلولی‌گون‌ها ی ِ فلزّی می‌خورد.

پیش از ادامه خوب است چند اصطلاح را معرفی کنیم. حرکت ِ کلاسیک ِ الکترون ترکیب ِ سه حرکت است: 1) نوسان در امتداد ِ محور ِ z با بسامد ِ ν_z که به آن «نوسان ِ محوری» می‌گویند. 2) حرکت ِ دایره ای حول ِ محور ِ z با بسامد ِ $\nu_+ \simeq \nu_c$ که به آن حرکت ِ «سیکلوترونی» می‌گویند. 3) حرکت ِ دایره ای حول ِ محور ِ z با بسامد ِ $\nu_- \ll \nu_c$ که به آن حرکت ِ «مگنِترونی» می‌گویند.

در شکل ِ ۲ جزئیات ِ ساختمان ِ تله یِ پِنینگ ی که دِملت و هم‌کاران ش ساخته اند رسم شده است. با اعمال ِ یک ولتاژ ِ زیاد به سوزن ِ تنگستنی (محل ِ الف در شکل ِ ۲) الکترون‌ها یِ پرانرژی ای از آن گسیل می‌شوند که در برخورد با اتم‌ها یِ گاز ِ بسیاررقیق ی که در آن اطراف هست منجر به گسیل ِ الکترون‌ها یِ کم‌سرعت می‌شوند. این الکترون‌ها یِ کم‌سرعت اند که در تله گیر می‌افتند. همان طور که دیدیم، حرکت ِ الکترون ی که گیر افتاده ترکیب ِ سه حرکت ِ نوسانی است. امّا الکترون ی که نوسان کند تابش می‌کند، و سریع‌ترین ِ نوسان ِ الکترون ی که گیر افتاده مربوط به حرکت ِ سیکلوترونی است. پس الکترون ی که گیرافتاده شروع به تابش می‌کند. با این تابش الکترون انرژی از دست می‌دهد، و به این ترتیب دامنه ی ِ حرکت ِ سیکلوترونی به سرعت کم می‌شود. البتّه باید دقّت کرد که این الکترون در یک فضا ی ِ بی‌نهایت بزرگ نیست، بل که در کاواک ی فلزّی است که ابعاد ِ آن از مرتبه ی ِ cm است (و دقّت کنید که شکل ِ کاواک مکعب نیست). به این ترتیب مطالعه ی ِ تابش ِ الکترون مشکل‌تر از مطاله ی ِ تابش ِ الکترون ی است که در فضا ی ِ خالی حرکت ِ سینکلوترونی می‌کند. خواننده ی ِ علاقه‌مند می‌تواند به مرجع ِ [1] مراجعه کند.

4 حرکت ِ کوانتمی یِ ذرّه

دیدیم که تله یِ پِنینگ می‌تواند الکترون ِ کلاسیک را گیر بیندازد. امّا الکترون‌ها یِ واقعی کوانتمی اند، به این معنی که رفتار ِ آن‌ها را تابع ِ موج ی توصیف می‌کند که حلّ ِ معادله یِ شرودینگر است. برا یِ بررسی یِ مسئله ابتدا باید همیلتونی ی ِ کوانتمی را بنویسیم. این کار کاملاً سرراست است. ابتدا باید یک پتانسیل ِ برداری برا ی ِمیدان ِ مغناطیسی انتخاب کنیم. انتخاب ِ زیر، همان طور که دیده خواهد شد، انتخاب ِ بسیار مناسب ی است.

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B\,(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})\,. \qquad (28)$$

حالا، برا ی ِ یک ذرّه ی ِ بی‌اسپین داریم

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2\,M}\left[(p_x - q\,A_x)^2 + (p_y - q\,A_y)^2 + (p_z - q\,A_z)^2\right] + q\,\Phi(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{2\,M}\left[\left(p_x + \frac{1}{2}\,q\,B\,y\right)^2 + \left(p_y - \frac{1}{2}\,q\,B\,x\right)^2 + p_z^2\right] + q\,\Phi(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{2\,M}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{q^2\,B^2}{8\,M}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{q\,B}{2\,M}\left(y\,p_x - x\,p_y\right) + q\,\Phi(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{2\,M}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{M}{8}\omega_c^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\omega_c}{2}L_z + \frac{M\,\omega_z^2}{4}\left(2\,z^2 - x^2 - y^2\right) \\
&= \underbrace{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2\,M} + \frac{M}{8}\omega_c^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\omega_c}{2}L_z - \frac{M\,\omega_z^2}{4}\left(x^2 + y^2\right)}_{H_{xy}} + \underbrace{\frac{p_z^2}{2\,M} + \frac{M\,\omega_z^2}{2}\,z^2}_{H_z} \\
H &= H_{xy} + H_z \qquad (29)
\end{aligned}
$$

$$
H_z = \frac{p_z^2}{2\,M} + \frac{1}{2}\,M\,\omega_z^2\,z^2 \qquad (30)
$$

$$
\begin{aligned}
H_{xy} &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\,M} + \frac{M}{8}\left(\omega_c^2 - 2\,\omega_z^2\right)\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\,\omega_c\,L_z \\
&= \frac{1}{2\,M}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}\,M\,\Omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\,\omega_c\,L_z \qquad (31)
\end{aligned}
$$

$$
\Omega := \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\,\omega_z^2}. \qquad (32)
$$

به این ترتیب دیده می‌شود که H مجموعِ دو عمل‌گر است، H_z که فقط تابع ی از z و p_z است، و H_{xy} که فقط تابع ی از x و y و p_x و p_y است. به وضوع H_z با H_{xy} جابه‌جا می‌شود. پس برا یِ یافتنِ ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابع‌ها یِ H کافی است مستقلاً ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابع‌ها یِ H_{xy} و H_z را بیابیم. H_z همیلتونی یِ یک نوسان‌گر ساده است با بس‌آمدِ ν_z. ویژه‌توابعِ H_z کاملاً شناخته شده اند. ویژه‌مقدارها یِ آن به شکلِ $\left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega_z$ اند، که در این جا n_z یک عددِ صحیحِ نامنفی است. خوب است توجّه کنیم که

$$
\hbar\,\omega_z = h\,\nu_z = 2.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{eV}. \qquad (33)
$$

اگر H_{xy} جمله یِ متناسب با L_z را نداشت، یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ هم‌سان‌گرد ِ دوبعدی بود. خوب است حل ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ هم‌سان‌گرد ِ دوبعدی را مرور کنیم (آن چه در زیر می‌آید در بسیار ی از کتاب‌ها یِ درسی یِ مکانیک ِ کوانتمی هست، مثلاً در [4]). همیلتونی یِ زیر را در نظر بگیریم.

$$H' = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\,M} + \frac{1}{2}\,M\,\Omega^2\left(x^2 + y^2\right). \tag{34}$$

از حل ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ یک‌بعدی می‌دانیم که ویژه‌مقدارها یِ H' به شکل ِ $E_{n_x,n_y} = \hbar\,\Omega\left(n_x + \frac{1}{2} + n_y + \frac{1}{2}\right)$ اند، که در این جا n_x و n_y دو عدد ِ صحیح ِ نامنفی اند که ویژه‌مقدارها یِ عمل‌گرها یِ N_x و N_y اند:

$$N_x = a_x^\dagger\,a_x \tag{35}$$

$$N_y = a_y^\dagger\,a_y \tag{36}$$

که در این جا

$$a_x = \sqrt{\frac{M\,\Omega}{2\,\hbar}}\,x + \frac{i\,p_x}{\sqrt{2\,\hbar\,M\,\Omega}} \tag{37}$$

$$a_y = \sqrt{\frac{M\,\Omega}{2\,\hbar}}\,y + \frac{i\,p_y}{\sqrt{2\,\hbar\,M\,\Omega}} \tag{38}$$

این مطلب هم به خوبی دانسته است که اگر تعریف کنیم

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x + i\,a_y) \tag{39}$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x - i\,a_y), \tag{40}$$

آن وقت داریم

$$N_+ + N_- = a_+^\dagger\,a_+ + a_-^\dagger\,a_- = a_x^\dagger\,a_x + a_y^\dagger\,a_y = N_x + N_y \tag{41}$$

و ضمناً $a_\pm$ و $a_\pm^\dagger$ همان جبر ِ a و $a^\dagger$ را برآورده می‌کنند. بنا بر این ویژه‌مقدارها یِ $N_\pm$ هم عددها یِ صحیح ِ نامنفی است. به این ترتیب دیده می‌شود که طیف ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ هم‌سان‌گرد ِ دوبعدی را می‌توان به شکل ِ $\hbar\,\Omega\,(n_+ + n_- + 1)$ هم نوشت. ویژه‌حالت‌ها یِ متناظر را با Ψ_{n_+,n_-} نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که که این تابع‌ها ویژه‌حالت ِ L_z اند و داریم

$$L_z\,\Psi_{n_+,n_-} = \hbar\,(n_+ - n_-)\,\Psi_{n_+,n_-}. \tag{42}$$

چون انرژی فقط به $(n_+ + n_-)$ و مؤلفه یِ z ِ تکانه یِ زاویه‌ای فقط به $(n_+ - n_-)$ بسته‌گی دارد، خوب است تعریف کنیم:

$$n := n_+ + n_-, \tag{43}$$

$$m := n_+ - n_-, \tag{44}$$

و تابع ِ حالت را با $\Phi_{n,m}$ نشان دهیم ($\Phi_{n,m} = \Psi_{n_+,n_-}$). می‌توان نشان داد که در مختصّه‌ها یِ قطبی (ρ,φ)

$$\Phi_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{i\,m\,\varphi}\,P_{n,m}\left(\frac{\rho}{d}\right) \tag{45}$$

$$d := \sqrt{\frac{\hbar}{M\,\Omega}} \tag{46}$$

$$P_{n,m}(x) = (-1)^{\frac{n-|m|}{2}}\sqrt{2\,\frac{\left(\frac{n-|m|}{2}\right)!}{\left(\frac{n+|m|}{2}\right)!}}\;x^{|m|}\;L^{(|m|)}_{\frac{1}{2}(n-|m|)}\left(x^2\right)\;e^{-\frac{1}{2}\,x^2} \tag{47}$$

در این جا $L_n^{(\alpha)}(x)$ چندجمله‌ای یِ لاگِر است با تعریف ِ

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &:= \frac{1}{n!}\,x^{-\alpha}\,\left(\frac{d}{dx}-1\right)^n\,x^{n+\alpha} && (48)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!\,(k+\alpha)!}\,\frac{x^k}{k!}. && (49)\end{aligned}$$

اکنون به (31) نگاه کنیم. واضح است که $\Phi_{n,m}$ ویژه‌تابع ِ این همیلتونی است، زیرا:

$$H_{xy}\,\Phi_{n,m} = \left\{\hbar\,\Omega(n+1) + \frac{1}{2}\,m\,\hbar\,\omega_c\right\}\,\Phi_{n,m}. \tag{50}$$

حالا ویژه‌مقدار را بر حسب ِ n_+ و n_- بازنویسی کنیم.

$$\begin{aligned} \Omega(n+1) + \frac{1}{2}\,m\,\omega_c &= \Omega(n_+ + n_- + 1) + \frac{1}{2}\,\omega_c(n_+ - n_-) && (51)\\ &= \left(\Omega + \frac{1}{2}\,\omega_c\right)\,n_+ + \left(\Omega - \frac{1}{2}\,\omega_c\right)\,n_- + \Omega && (52)\end{aligned}$$

تعریف کنیم

$$\omega_+ \;=\; \Omega + \frac{1}{2}\,\omega_c, \tag{53}$$

$$\omega_- \;=\; \frac{1}{2}\,\omega_c - \Omega. \tag{54}$$

این‌ها درست همان $\omega_\pm$ ی هستند که از بحثِ کلاسیک به دست آمد. به ساده‌گی دیده می‌شود که $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)$، و به این ترتیب داریم

$$E_{n_+,n_-} = \hbar\,\omega_+ \,\left(n_+ + \frac{1}{2}\right) - \hbar\,\omega_- \,\left(n_- + \frac{1}{2}\right). \tag{55}$$

تا این جا تابعِ موجِ ذرّه ای را به دست آورده ایم که اسپینِ آن صفر است. اگر اسپینِ ذرّه $\frac{1}{2}\,\hbar\vec{\sigma}$، بار ِ آن q، و جرمِ آن M باشد، جمله یِ زیر به همیلتونی اضافه می‌شود.

$$E_{\rm spin} = -\left(\frac{g}{2}\,\frac{q}{M}\,\frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right). \tag{56}$$

برا یِ الکترون $\frac{g}{2} = 1.00116$، و $q = -e$ است. بنا بر این برا یِ الکترون داریم

$$E^{\rm electron}_{\rm spin} = \hbar\,\left(\frac{g}{2}\,\omega_c\right)\frac{1}{2}\,\sigma_z \tag{57}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\omega_s := \frac{g}{2}\,\omega_c \qquad \nu_s := \frac{\omega_s}{2\,\pi}. \tag{58}$$

دقّت کنید که ω_s و ω_c و ω_+ با هم فرق دارند، و البتّه بسیار نزدیک به هم اند. بسامدِ ناهنجار ِ ω_a (در واقع ν_a) را تعریف می‌کنیم

$$\omega_a := \omega_s - \omega_+ \qquad \nu_a = \frac{\omega_a}{2\,\pi}. \tag{59}$$

حالا می‌توانیم انرژی یِ کلِ یک الکترون در تله یِ پِنینگ را بنویسیم.

$$E = \hbar\,\omega_+\left(n_+ + \frac{1}{2}\right) - \hbar\,\omega_-\left(n_- + \frac{1}{2}\right) + \hbar\,\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right) + \hbar\,\omega_s\,\frac{1}{2}\,s \tag{60}$$

در فرمولِ بالا s یا 1 است یا -1، که نشان دهنده یِ بالا یا پایین بودنِ اسپینِ الکترون است.

5 اتم ـِ ژِئونیوم

ذرّه یِ باردار ی که در یک تله ی ـِ پنینگ گیر اُفتاده باشد مثل ـِ یک اتم است ــ تابع ـِ موج اش در اطراف ـِ یک نقطه متمرکز است، طیف ـِ گسسته ای دارد، و ویژه‌حالت‌ها یش کاملاً دانسته اند. به این نکته توجّه کنید که جرم ی که در همیلتونی، بسامدها، و انرژی‌ها ظاهر می‌شود خود ـِ جرم ـِ ذرّه است و نه جرم ـِ کاهش‌یافته.

دِمِلت به این سیستم نام ـِ اتم ـِ «ژِئونیوم» Geonium داده است [1 تا 3]. این نام از ژِئو به معنی یِ زمین می‌آید ـ نشان‌گر ـِ این که ذرّه یِ باردار را نه میدان ـِ یک هسته، بل که میدان ی که نسبت به زمین ثابت است مقیّد کرده است.

ترازها یِ ژِئونیوم با چهارتایی‌ها یِ (n_+, n_z, n_-, s) مشخّص می‌شوند. برا یِ الکترون

$$E_{n_+,n_z,n_-,s} = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_+ + \frac{1}{2}\,s\,\hbar\omega_s + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z - \left(n_- + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_- \qquad (61)$$

برا یِ مثال ی که بالاتر در نظر گرفتیم ($B = 5.8\ \mathrm{T}$ و $2\,z^2 - \rho^2 = \mp 0.435\ \mathrm{cm}^2$) داریم:

$$\hbar\omega_+ = 5.6\times 10^{-4}\,\mathrm{eV}, \qquad (62)$$

$$\omega_s \simeq \omega_c \simeq \omega_+ \qquad (63)$$

$$\hbar\omega_z = 2.7\times 10^{-7}\,\mathrm{eV}, \qquad (64)$$

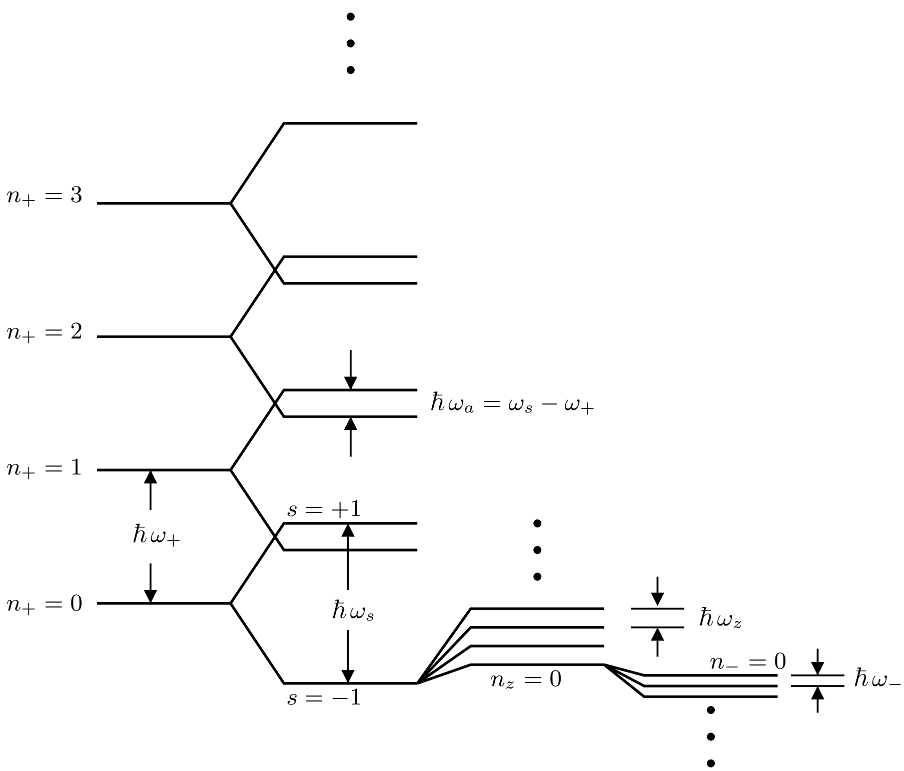
$$\hbar\omega_- = 5.4\times 10^{-11}\,\mathrm{eV}. \qquad (65)$$

اتم ـِ ژِئونیوم تراز ـِ پایه، به معنی ی ـِ دقیق ـِ آن ندارد ــ زیرا $\lim_{n_-\to\infty} E_{n_+,n_z,n_-,s} = -\infty$ است. با نگاه کردن به حل ـِ کلاسیک (معادله‌ها ی ـِ (21) تا (23)) می‌توان قانع شد که برا ی ـِ n_- ها یِ بزرگ، مدار ـِ ذرّه هذلولی‌گون‌ها ی ـِ کاواک ـِ پنینگ را قطع می‌کند. با دقّت کردن در شکل ـِ تابع ـِ موج هم می‌توان این را دید. مثلاً برا یِ $n_+ = 0$ و $n_- = k$، دیده می‌شود که تابع ـِ موج هست

$$\Psi_{0,k} = \Phi_{k,-k} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-i\,k\,\varphi}\sqrt{\frac{2}{k!}}\,\left(\frac{\rho}{d}\right)^k\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{d^2}}, \qquad (66)$$

که دامنه یِ آن در $\rho = \sqrt{k}\,d$ بیشینه است، یعنی احتمال ـِ حظور ـِ الکترون در شعاع ـِ $\sqrt{k}\,d$ بیشینه است، و این شعاع با افزایش ـِ k زیاد می‌شود.

امّا فرض کنید $n_- = 0$ باشد. در این صورت حالت ـِ پایه با $(n_+, n_z, s) = (0, 0, -1)$ داده می‌شود. اگر n_+ به اندازه یِ 1 زیاد شود، انرژی به اندازه یِ $\hbar\omega_+ \simeq 0.6\ \mathrm{meV}$ زیاد می‌شود. اگر $s = 1$ بشود، انرژی به اندازه ی ـِ $\hbar\omega_s$ زیاد می‌شود که تقریباً برابر است با $\hbar\omega_c$، ولی البتّه با آن اختلاف دارد، و این



شکل ۴: ترازها ی ِژئونیوم. دقّت کنید مقیاس ِاین شکل درست نیست. فاصله یِ خطوط ِ متناظر با n_+ تقریباً باید 2000 برابر ِفاصله یِ خطوط ِمتناظر با n_z باشد. وقت ی n_- زیاد شود، خط‌ها باز هم از هم تفکیک می‌شوند که فاصله ی ِ بین ِ آن‌ها 50,000 برابر کوچک‌تر از فاصله ی ِ خط‌ها ی ِ متناظر با n_z است.

اختلاف به علّت ِ آن است که g برا یِ الکترون دقیقاً 2 نیست. اگر n_z به اندازه ی ِ 1 زیاد شود، انرژی به اندازه یِ $0.3\,\mu$ eV زیاد می‌شود. پس ترازها ی ِ انرژی شبیه به شکل ِ ۴ اند.

6 چند کاربرد

برا ی ِ ذرّه ای به جرم ِ M و بار ِ $Z\,e$، بسامد ِ سیکلوترون $\nu_c = \frac{Z\,e\,B}{2\,\pi\,M}$ است. اگر چنین ذرّه ای را در یک تله یِ پِنینگ گیر بیندازیم، با مطالعه ی ِ طیف ِ آن می‌توان ν_c را سنجید. پس اگر B و Z معلوم

باشند می‌توان M را به دقّت سنجید. سنجشِ دقیقِ B چندان ساده نیست. می‌توان یک ذرّه یِ خاص را به عنوانِ سنجه یِ استاندارد انتخاب کرد ـــ مثلاً $^{12}\mathrm{C}$ را. به این ترتیب با سنجشِ ν_c برا یِ این ذرّه یِ استاندارد و برا یِ یک ذرّه یِ دیگر (مثلاً x)، خواهیم داشت:

$$M_x = \frac{Z_x}{Z_{\mathrm{ref}}} \frac{\nu_{\mathrm{c,ref}}}{\nu_{c,x}} M_{\mathrm{ref}} \tag{67}$$

این دقیق‌ترین روش ی است که تا کنون برا یِ سنجشِ جرمِ ایزوتوپ‌ها یِ مختلف ابداع شده است. یک ی از آزمایش‌گاه‌ها یی که به این منظور ساخته شده SMILTRAP است. SMILETRAP [c] حاصلِ هم‌کاری یِ آزمایش‌گاهِ مانه سیگبام [d] در دانش‌گاهِ استُکهُلم [e] و بخشِ فیزیکِ دانش‌گاهِ یوهانِس گوتِنبرگِ مِینتس [f] است و از اوایلِ دهه یِ 1990 راه افتاده. این آزمایش‌گاه می‌تواند جرمِ ایزوتوپ‌ها را با دقّتِ 10^{-9} تعیین کند.

سنجیدنِ نسبتِ ژیرومغناطیسی یِ ذرّه (g) بسیار مهم است. این کار با مطالعه یِ طیفِ ژئونیوم ممکن است، زیرا $\omega_s = \frac{g}{2}\,\omega_c$ است. بسیار ی از دقیق‌ترین سنجش‌ها یی که از نسبتِ ژیرومغناطیسی یِ ذرّه‌ها داریم با استفاده از همین مطالعه یِ طیفِ ژئونیوم بوده است.

7 مراجع

[1.] Lowell S. Brown, Gerald Gabrielse, “Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap”, *Reviews of Modern Physics*, vol. 58 (1986), pp. 233-311.

[2.] Hans G. Dehmelt, “Experiments with an isolated subatomic particle at rest”, Nobel Lecture, 8 Dec 1989.

[3.] Hans Dehmelt, “Less is more: Experiments with and individual atomic particle at rest in free space”, *American Journal of Physics*, vol. 58, no. 1 (Jan 1990), pp. 18–27.

[4.] Julian Schwinger, *Quantum Mechanics, Symbolism of Atomic Measurements*, Springer, 2001, pp. 288–299.

8 نام‌ها یِ خاص

[a] Hans Georg Dehmelt;

[b] Frans Michel Penning;

[c] Stockholm-Mainz Ion LEvitation TRAP;

[d] Manne Siegbahn;

[e] Johannes Gutenberg University, Maniz;

[f] Stockholm University;

هانس گئورگ دِمِلت در 1923 در آلمان متولد شد. در در سال ِ 1933، سال ِ به قدرت رسیدن ِ هیتلر، در حال ی که ده سال بیش‌تر نداشت از پس ِ آزمون ِ ورودی ی ِ قدیمی‌ترین دبیرستان ِ لاتین ِ برلین [g] بر آمد و وارد ِ این دبیرستان شد. پدر و مادر ش به انحاء ِ مختلف اسباب ِ پیش‌رفت ِ علمی یِ او را فراهم می‌گردند. خود ش هم با علاقه به تعمیر و ساخت ِ رادیوها ی ِ لامپی می‌پرداخت. در بهار ِ 1940 از دبیرستان فارغ‌التحصیل شد. این زمان مقارن بود با حمله ی ِ آلمان به فرانسه. دِمِلت به خدمت ِ سربازی فرا خوانده شد. داوطلب ِ خدمت در واحد ِ پدافند ِ هوایی شد. واحد ش که برا ی ِ کمک به نیروها ی ِ آلمان به استالین‌گراد اعزام شده بود جزو ِ معدود واحدها ی ِ خوش‌شانس ی بود که از محاصره ی ِ نیروها ی ِ شوروی گریخت. در 1943 به دستور ِ مقامات ِ بالاتر به دانش‌گاه ِ بِرِسلاو [h] رفت تا فیزیک بخواند. یک سال بعد که اوضاع ِ جنگ بدتر شده بود به جبهه ی ِ غرب در بلژیک فرستاده شد. در آن جا اسیر ِ نیروها ی ِ آمریکایی شد. در 1946، پس از یک سال اسارت آزاد شد. در حالی که با تعمیر ِ رادیو زنده‌گی می‌گذراند وارد ِ دانش‌گاه ِ گُتینگِن [i] شد. در این جا اشخاص ی مثل ِ هایزنبرگ [j]، و فُن لائه [k]، درس می‌دادند. در 1948 فوقِ‌لیسانس ش را گرفت. در 1949 جزو ِ گروه ی بود که تشدید ِ چهارقطبی ی ِ هسته‌ای [l] را کشف کردند. این کار در رساله ی ِ دکترا ی ِ دِمِلت چاپ شد و باعث شد دانش‌گاه ِ دوک [m] به او پیش‌نهاد ِ یک موقعیّت ِ پسادکتری بدهد. به این ترتیب به آمریکا رفت.

زنده‌گی‌نامه یِ خودنوشت ِ او را می‌توانید در منزل‌گاه ِ بنیاد ِ نُبِل بیابید.

http://nobelprize.org

[g] Gymnasium zum Grauen Kloster, Berlin; [h] Universität Bereslau;

[i] Universität Göttingen; [j] Heinsenberg; [k] M. von Laue;

[l] Nuclear Quadrupole Resonance; [m] Duke University,