تقارن‌ها یِ فضایی یِ میدان ـ مغناطیسی[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-037 (2006/04/27)

تقارن‌ها یِ فضایی یِ معادلات ـ حاکم بر میدان ـ مغناطیسی بررسی، و با استفاده از آن در چند مثال میدان ـ مغناطیسی محاسبه می‌شود.

1 حرکت‌ها یِ اقلیدسی

به نگاشت‌ها یی از فضا (یِ $\mathbb{R}^n$) به فضا که طول را حفظ می‌کنند (ایزومتری‌ها یِ $\mathbb{R}^n$) حرکات ـ اقلیدسی می‌گویند. ثابت می‌شود این نگاشت‌ها عبارت اند از مجموعه یِ انتقال‌ها، دوران‌ها، انعکاس‌ها، و ترکیب‌ها یِ آن‌ها. (در [1] حکم ـ مشابه ی برا یِ فضازمان ـ مینکُفسکی [a] ثابت شده است. اثبات برا یِ فضا یِ اقلیدسی هم کاملاً مشابه است.) به این ترتیب، حرکت ـ اقلیدسی یِ $\mathbf{f}$ با یک نگاشت ـ خطی (O) و یک بردار ـ ثابت ـ ($\mathbf{a}$) مشخص می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = O\,\mathbf{r} + \mathbf{a}, \tag{1}$$

که ماتریس ـ O متعامد است:

$$\delta_{i\,j}\,O^i{}_k\,O^j{}_l = \delta_{k\,l}. \tag{2}$$

در فضا یِ سه‌بُعدی،

$$\varepsilon_{i\,j\,k}\,O^i{}_l\,O^j{}_m\,O^k{}_n = \det(O)\,\varepsilon_{l\,m\,n}, \tag{3}$$

و از آن،

$$\varepsilon^i{}_{j\,k}\,O^j{}_m\,O^k{}_n = \det(O)\,O^i{}_l\,\varepsilon^l{}_{m\,n}, \tag{4}$$

[1] این مقاله، با اجازه یِ نویسنده، از منزل‌گاه ـ نویسنده برداشته شده است، و همه یِ حقوق ـ آن برا یِ نویسنده محفوظ است.

http://www.mamwad.org/x1/X1-037.pdf

که ε تانسور ِ لِوی‌ـ چیویتا [b] است. از (2) ضمناً نتیجه می‌شود

$$\det(O) = \pm 1. \tag{5}$$

O ها یی که دترمینان ِشان یک است دوران، و O ها یی که دترمینان ِشان منفی یِ یک است ترکیب ِ یک دوران و یک انعکاس اند. به نگاشت‌ها یی که دترمینان ِ یاکبی ِشان مثبت است راست‌گرد، و به آن‌ها یی که دترمینان ِ یاکبی ِشان منفی است چپ‌گرد می‌گوییم. توجه داریم که در مورد ِ حرکت‌ها یِ اقلیدسی، این دترمینان در واقع ِ دترمینان ِ ماتریس ِ متعامد ِ O است.

میدان ِ اسکالر ِ h و میدان ِ بردار یِ $\mathbf{F}$ را در نظر بگیرید. اثر ِ نگاشت ِ $\mathbf{f}$ رو یِ این میدان‌ها را با به ترتیب $\mathbf{f}_*(h)$ و $\mathbf{f}_*(\mathbf{F})$ نمایش می‌دهیم:

$$[\mathbf{f}_*(h)](\mathbf{r}) := h[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})], \tag{6}$$

و

$$[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})](\mathbf{r}) := \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}\,\mathbf{F}\right)[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})], \tag{7}$$

که $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{r}$ ماتریس ِ مشتق ِ $\mathbf{f}$ است. اگر $\mathbf{f}$ از نوع ِ (1) (اقلیدسی) باشد، داریم

$$[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})](\mathbf{r}) := (O\,\mathbf{F})\,[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})], \tag{8}$$

از این‌جا به‌ساده‌گی دیده می‌شود متناظر با حرکت ِ اقلیدسی یِ $\mathbf{f}$،

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_*(\nabla\cdot\mathbf{F}) &= \nabla\cdot[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})],\\
\mathbf{f}_*(\nabla\times\mathbf{F}) &= \det(O)\,\nabla\times[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})],\\
\mathbf{f}_*(\nabla h) &= \nabla[\mathbf{f}_*(h)].
\end{aligned} \tag{9}$$

(روشن است که رابطه یِ دوم فقط در $\mathbb{R}^3$ درست است.) هم‌چنین، اگر $\mathbf{G}$ یک میدان ِ برداری یِ دیگر باشد،

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_*(\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}) &= [\mathbf{f}_*(\mathbf{G})]\cdot[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})],\\
\mathbf{f}_*(\mathbf{G}\times\mathbf{F}) &= \det(O)\,[\mathbf{f}_*(\mathbf{G})]\times[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})],\\
\mathbf{f}_*(h\,\mathbf{F}) &= [\mathbf{f}_*(h)]\,[\mathbf{f}_*(\mathbf{F})],
\end{aligned} \tag{10}$$

(که باز هم رابطه یِ دوم فقط در $\mathbb{R}^3$ درست است.)

2 تقارن‌ها يِ فضايی يِ معادلات ـِ مَکسوِل

معادلات ـِ مَکسوِل [c] برا يِ ميدان ـِ الکترمغناطيسی عبارت اند

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;=\; 0, \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \;=\; 0, \tag{12}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \;=\; \mathbf{J}, \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \;=\; \varrho. \tag{14}$$

$\mathbf{E}$ ميدان ـِ الکتريکی، $\mathbf{B}$ ميدان ـِ مغناطيسی، $\mathbf{H}$ چگالی يِ گردش ـِ مغناطيسی، و $\mathbf{D}$ چگالی يِ شار ـِ الکتريکی است. اين معادلات ميدان‌ها يِ الکترومغناطيسی در حضور ـِ ماده را توصيف می‌کنند و در آن‌ها $\mathbf{J}$ چگالی‌يِ‌جريان ـِ آزاد و ϱ چگالی‌يِ‌بار ـِ آزاد است. يک نتيجه يِ اين معادلات، معادله يِ پی‌وسته‌گی يِ بار است:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{15}$$

با استفاده از رابطه‌ها يِ (9) ديده می‌شود اگر $\mathbf{E}$، $\mathbf{D}$، $\mathbf{H}$، و $\mathbf{B}$ جواب ـِ معادلات ـِ مَکسوِل [c] برا يِ چشمه‌ها يِ $\mathbf{J}$ و ϱ باشند، و $\mathbf{f}$ يک حرکت ـِ اقليدسی باشد، آن‌گاه $\mathbf{f}_*(\mathbf{E})$، $\mathbf{f}_*(\mathbf{D})$، $\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{H})$، و $\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{B})$ هم جواب ـِ معادلات ـِ مَکسوِل [c] برا يِ چشمه‌ها يِ $\mathbf{f}_*(\mathbf{J})$ و $\mathbf{f}_*(\varrho)$ (و البته ماده ای که با تبديل ـِ $\mathbf{f}$ جابه‌جا شده) اند. به ويژه، اگر

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_*(\mathbf{J}) \;&=\; \lambda\,\mathbf{J},\\ \mathbf{f}_*(\varrho) \;&=\; \lambda\,\varrho,\end{aligned} \tag{16}$$

و جواب ـِ معادلات ـِ مَکسوِل يک‌تا باشد، آن‌گاه،

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_*(\mathbf{E}) \;&=\; \lambda\,\mathbf{E},\\ \mathbf{f}_*(\mathbf{D}) \;&=\; \lambda\,\mathbf{D},\\ \det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{H}) \;&=\; \lambda\,\mathbf{H},\end{aligned}$$

$$\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{B}) \,=\, \lambda\,\mathbf{B}. \tag{17}$$

(البته به‌شرط ی که عبارت‌ها یِ طرف ِ چپ شرایط ِ مرزی و اولیه را هم بر آورند.)

اثر ِ تبدیل‌ها یِ اقلیدسی بر پتانسیل‌ها یِ اسکالر و برداری هم به‌ساده‌گی به دست می‌آید. پتانسیل‌ها یِ اسکالر و برداری یِ ϕ و $\mathbf{A}$ چنان اند که

$$\mathbf{E} \,=\, -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} \,=\, \nabla\times\mathbf{A}. \tag{18}$$

از (9) به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر ϕ و $\mathbf{A}$ معادلات ِ (18) با $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را بر آورند، آن‌گاه $\mathbf{f}_*(\phi)$ و $\mathbf{f}_*(\mathbf{A})$ هم معادلات ِ (18) با $\mathbf{f}_*(\mathbf{E})$ و $\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{B})$ را بر می آورند.

در حالت ِ خاص ی که میدان‌ها و چشمه‌ها (و ماده) مستقل از زمان اند، معادلات ِ میدان‌ها یِ الکتریکی و مغناطیسی از هم جدا می‌شوند. در این وضعیت اگر $\mathbf{H}$ و $\mathbf{B}$ میدان‌ها یِ متناظر با $\mathbf{J}$ باشند، آن‌گاه $\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{H})$ و $\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{B})$ هم میدان‌ها یِ متناظر با $\mathbf{f}_*(\mathbf{J})$ (و ماده ای که با تبدیل ِ $\mathbf{f}$ جابه‌جا شده) اند. در حالت ِ خاص ی که ماده نداریم (یا کل ِ فضا با ماده ای با تراوایی یِ مغناطیسی یِ μ پر شده) و میدان ِ مغناطیسی را می‌شود از رابطه یِ انتگرالی یِ بیُ‌ـ سَوَر [d]

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\,\pi}\int \mathrm{d}V'\,\frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}')]\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{19}$$

به دست آورد، مستقیماً هم می‌شود میدان‌ها یِ متناظر با $\mathbf{f}_*(\mathbf{J})$ را حساب کرد. داریم

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\{[\mathbf{f}_*(\mathbf{J})](\mathbf{r}')\}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} &= \int \mathrm{d}V'\,\frac{\{O\,\mathbf{J}[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r}')]\}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},\\ &= \int \mathrm{d}V''\,\frac{[O\,\mathbf{J}(\mathbf{r}'')]\times[\mathbf{r}-\mathbf{f}(\mathbf{r}'')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{f}(\mathbf{r}'')|^3},\\ &= \int \mathrm{d}V''\,\frac{[O\,\mathbf{J}(\mathbf{r}'')]\times\{O\,[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})-\mathbf{r}'']\}}{|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})-\mathbf{r}''|^3},\\ &= \det(O)\,O\int \mathrm{d}V''\,\frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}'')]\times[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})-\mathbf{r}'']\}}{|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{r})-\mathbf{r}''|^3}.\end{aligned} \tag{20}$$

در این رابطه‌ها از این استفاده شده که قدرِمطلق ِ دترمینان ِ یاکبی یِ تبدیل ِ $\mathbf{f}$ یک است:

$$\left|\det\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}}\right)\right| = 1. \tag{21}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود میدان ِ متناظر با $\mathbf{f}_*(\mathbf{J})$ همان $\det(O)\,\mathbf{f}_*(\mathbf{H})$ است.

3 مثال‌ها

3.1

جریان ی در جهت ِ محور ِ x در نظر بگیرید، که تحت ِ انعکاس نسبت به صفحه‌ها یِ $y = \text{const}$ و $z = 0$ عوض نمی‌شود. (x, y, z) مختصات ِ دِکَرتی اند. $\Pi(y, y_0)$ را انعکاس نسبت به صفحه یِ $y = y_0$ بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}
[\Pi(y, y_0)](x, y, z) &= (x, 2\,y_0 - y, z),\\
[\Pi(y, y_0)]_*(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{\mathbf{x}},\\
[\Pi(y, y_0)]_*(\hat{\mathbf{y}}) &= -\hat{\mathbf{y}},\\
[\Pi(y, y_0)]_*(\hat{\mathbf{z}}) &= \hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

به این ترتیب، برا یِ یک میدان ِ برداری یِ دل‌بخواه ِ $\mathbf{F}$ داریم

$$\begin{aligned}
\{[\Pi(y, y_0)]_*(\mathbf{F})\}(x, y, z) = \;& \hat{\mathbf{x}}\, F_x((x, 2\,y_0 - y, z) - \hat{\mathbf{y}}\, F_y((x, 2\,y_0 - y, z)\\
& + \hat{\mathbf{z}}\, F_z((x, 2\,y_0 - y, z),
\end{aligned} \tag{23}$$

که از آن نتیجه می‌شود جریان مستقل از y است (چون y_0 دل‌بخواه است و جریان هم فقط مئلفه یِ x دارد). از این که جریان فقط مئلفه یِ x دارد و دیورژانس ِ آن هم صفر است، نتیجه می‌شود $\mathbf{J}$ به x هم بسته‌گی ندارد. پس،

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}}\, J_x(z). \tag{24}$$

$\Pi(z, 0)$ را انعکاس نسبت به صفحه یِ $z = 0$ بگیرید. داریم

$$\{[\Pi(z, 0)]_*(\mathbf{F})\}(x, y, z) = \hat{\mathbf{x}}\, F_x((x, y, -z) + \hat{\mathbf{y}}\, F_y((x, y, -z) - \hat{\mathbf{z}}\, F_z((x, y, -z), \tag{25}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$J_x(-z) = J_x(z). \tag{26}$$

$\Pi(y, y_0)$ یک حرکت ِ اقلیدسی ِ چپ‌گرد است که جریان را عوض نمی‌کند، پس میدان ِ مغناطیسی را منفی می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} H_x(x, y_0, z) &= -H_x(x, y_0, z), \\ H_z(x, y_0, z) &= -H_z(x, y_0, z), \end{aligned} \tag{27}$$

که نتیجه می‌دهد مئلفه‌ها ی ِ x و z ِ میدان ِ مغناطیسی صفر اند. $\Pi(z, 0)$ هم جریان را عوض نمی‌کند، پس میدان ِ مغناطیسی را منفی می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$H_y(x, y, -z) = -H_y(x, y, z). \tag{28}$$

حالا با استفاده از قانون ِ آمپر [e] برا ی ِ مدار ی به شکل ِ مستطیل ی متقارن نسبت به صفحه ی ِ $z = 0$ داریم

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}}\,\frac{-J_{\mathrm{s}}(z)}{2}, \tag{29}$$

که

$$J_{\mathrm{s}}(z) := \int_{-z}^{z} \mathrm{d}z'\; J_x(z'). \tag{30}$$

یک حالت ِ خاص ِ این مثال، یک جریان ِ سطحی ی ِ یک‌نواخت است که از یک صفحه می‌گذرد. در این حالت،

$$J_{\mathrm{s}}(z) = J_{\mathrm{s}}\,\mathrm{sgn}(z), \tag{31}$$

که J_{s} چگالی ی ِ جریان ِ سطحی، و sgn تابع ِ علامت است.

3.2

جریان ی را در نظر بگیرید که تحت ِ دوران حول ِ یک محور و انعکاس نسبت به صفحه‌ها ی گذرنده از آن محور عوض نمی‌شود. این محور را محور ِ z می‌گیریم. (ρ, φ, z) مختصات ِ استوانه‌ای اند. $\Pi'(\varphi, \varphi_0)$ را انعکاس نسبت به نیم‌صفحه ی ِ $\varphi = \varphi_0$ بگیرید. داریم

$$
\begin{aligned}
[\Pi'(\varphi,\varphi_0)](\rho,\varphi,z) &= (\rho, 2\,\varphi_0-\varphi, z),\\
[\Pi'(\varphi,\varphi_0)]_*(\hat{\boldsymbol{\rho}}) &= \hat{\boldsymbol{\rho}},\\
[\Pi'(\varphi,\varphi_0)]_*(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}},\\
[\Pi'(\varphi,\varphi_0)]_*(\hat{\mathbf{z}}) &= \hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

و از آن‌جا،

$$
\begin{aligned}
\{[\Pi'(\varphi,\varphi_0)]_*(\mathbf{F})\}(\rho,\varphi,z) = \;& \hat{\boldsymbol{\rho}}\,F_\rho(\rho,2\,\varphi_0-\varphi,z)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,F_\varphi(\rho,2\,\varphi_0-\varphi,z)\\
&+\hat{\mathbf{z}}\,F_z(\rho,2\,\varphi_0-\varphi,z).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

از این نتیجه می‌شود

$$
\mathbf{J}(\mathbf{r})=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,J_\rho(\rho,z)+\hat{\mathbf{z}}\,J_z(\rho,z). \tag{34}
$$

ظاهراً از این استفاده نشد که جریان تحت ِ دوران حول ِ محور ِ z عوض نمی‌شود. اما از این استفاده شد که جریان تحت ِ انعکاس نسبت به همه یِ صفحه‌ها یِ گذرنده از محور ِ z بی‌تغییر می‌ماند. خود ِ این نتیجه می‌دهد جریان تحت ِ دوران حول ِ محور ِ z هم عوض نمی‌شود، چون ترکیب ِ انعکاس نسبت به دو صفحه یِ گذرنده از محور ِ z یک دوران حول ِ محور ِ z است.

$\Pi'(\varphi,\varphi_0)$ یک حرکت ِ اقلیدسی یِ چپ‌گرد است که جریان را عوض نمی‌کند. پس تحت ِ این حرکت میدان ِ مغناطیسی منفی می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود

$$
\mathbf{H}(\mathbf{r})=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,H_\varphi(\rho,z). \tag{35}
$$

حالا با استفاده از قانون ِ آمپِر [e] برا یِ مدار ی در ρ و z ِ ثابت، نتیجه می‌شود

$$
\mathbf{H}(\mathbf{r})=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\frac{I(\rho,z)}{2\,\pi\,\rho}, \tag{36}
$$

که

$$
I(\rho,z):=\int_{\mathrm{D}(\rho,z)}\mathrm{d}S'\;J_z(\mathbf{r}'). \tag{37}
$$

$\mathrm{D}(\rho,z_0)$ قرص ی در صفحه یِ $z=z_0$ است که مرکز َش رو یِ محور ِ z و شعاع َش ρ است.

یک حالت ِ خاص سیم یِ بلند ی است که از آن جریان ِ I می‌گذرد. محور ِ z را این سیم می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$I(\rho, z) = I. \tag{38}$$

یک حالت ِ خاص ِ دیگر جریان ِ چنبره‌ای ِ یک‌نواخت است. چنبره شکل ی است که از دوران ِ یک خم ِ مسطح ِ بسته (یِ نامتقاطع) حول ِ محور ی در صفحه یِ آن خم به دست می‌آید، که خم را قطع نمی‌کند. این محور را محور ِ z می‌گیریم. فرض کنید از چنبره یک جریان ِ سطحی می‌گذرد که تحت ِ دوران حول ِ محور ِ z عوض نمی‌شود. در این صورت میدان ِ مغناطیسی به شکل ِ (36) است و داریم

$$I(\rho, z) = \begin{cases} I, & \text{درون ِ چنبره} \\ 0, & \text{بیرون ِ چنبره} \end{cases}, \tag{39}$$

که I جریان ِ کل ِ چنبره است، با این قرارداد که در نزدیک‌ترین نقطه یِ چنبره نسبت به محور ِ z، جهت ِ قراردادی یِ جریان جهت ِ مثبت ِ z است.

3.3

جریان ی را در نظر بگیرید که تحت ِ انتقال در راستا یِ یک محور و انعکاس نسبت به صفحه‌ها یِ عمود بر آن محور عوض نمی‌شود. این محور را محور ِ z می‌گیریم. چنین‌جریان ی به این شکل است

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}}\, J_x(x, y) + \hat{\mathbf{y}}\, J_y(x, y), \tag{40}$$

$\Pi(z, z_0)$ یک حرکت ِ اقلیدسی یِ چپ‌گرد است که جریان را عوض نمی‌کند. پس میدان ِ مغناطیسی را منفی می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}\, H_z(x, y). \tag{41}$$

این‌جا هم ظاهراً از تقارن تحت ِ انتقال در راستا یِ z استفاده نشد. علت آن است که هر انتقال در راستا یِ z ترکیب ِ دو انعکاس نسبت به صفحه‌ها یی عمود بر محور ِ z است. مدار ِ L را شامل ِ چهار بخش بگیرید: یک بخش خم ِ C در صفحه یِ $z = 0$، که از $(x_1, y_1, 0)$ شروع و به $(x_2, y_2, 0)$ ختم می‌شود، یک بخش انتقال‌یافته یِ این خم به اندازه یِ a در راستا یِ محور ِ z، دو بخش ِ دیگر هم پاره‌خط‌ها یی به طول ِ a در راستا یِ محور ِ z که سرها یِ متناظر ِ آن خم‌ها را به هم وصل می‌کنند. با استفاده از قانون ِ آمپر [e] برا یِ این مدار نتیجه می‌شود

$$H_z(x_1,y_1)-H_z(x_2,y_2)=\int_{\mathrm{C}}\mathrm{d}l'\ \hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}(x',y'), \tag{42}$$

که $\hat{\mathbf{n}}'$ بردار ِ یکه یِ عمود بر خم است، در جهت یِ که بردار ِ مماس بر خم، $\hat{\mathbf{n}}'$، و $\hat{\mathbf{z}}$ یک کنج ِ راست‌گرد می‌سازند. با میل‌دادن ِ (x_2,y_2) به بی‌نهایت (و با فرض ِ این که در این حالت $H(x_2,y_2)$ به صفر می‌گراید)، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\hat{\mathbf{z}}\,J_{\mathrm{s}}(x,y), \tag{43}$$

که

$$J_{\mathrm{s}}(x,y):=\int_{\mathrm{C}(x,y)}\mathrm{d}l'\ \hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'), \tag{44}$$

و $\mathrm{C}(x,y)$ خم ی در صفحه یِ $z=0$ است که از نقطه یِ (x,y) شروع می‌شود و تا بی‌نهایت می‌رود.

یک حالت ِ خاص ِ این مثال استوانه یِ بلند ی است که یک جریان ِ سطحی یِ یک‌نواخت ِ سمتی با چگالی یِ J_{s} از آن می‌گذرد. مقطع ِ استوانه دل‌بخواه است. محور ِ استوانه را محور ِ z می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$J_{\mathrm{s}}(x,y)=\begin{cases}J_{\mathrm{s}}, & \text{درون ِ استوانه}\\ 0, & \text{بیرون ِ استوانه}\end{cases}. \tag{45}$$

4 مرجع

[1] Steven Weinberg; “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity”, (John Wiley &Sons, 1972) section 1 chapter 2

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Minkowski

[b] Levi-Civita

[c] Maxwell

[d] Biot-Savart

[e] Ampère