نفوذ ِ گاز از یک روزنه یِ ریز[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-033 (2005/09/03)

ظرف ی شامل ِ یک گاز ِ کامل ِ کلاسیک بررسی می‌شود، که روزنه یِ ریز ی دارد. گاز از این روزنه بیرون می‌رود، اما روزنه آن‌قدر ریز است که گاز ِ درون ِ ظرف یک‌نواخت می‌ماند. چگالی و دما یِ گاز ِ درون ِ ظرف بر حسب ِ زمان به دست می‌آید.

0 مقدمه

اگر در یک ظرف ِ شامل ِ گاز روزنه ای درست شود، گاز از این روزنه بیرون می‌رود. برا یِ یک گاز ِ کامل، آهنگ ِ خروج ِ گاز با میان‌گین ِ اندازه یِ سرعت ِ ملکول‌ها یِ گاز، چگالی یِ گاز (تعداد ِ ملکول‌ها یِ گاز بر حجم)، و مساحت ِ روزنه متناسب است [1]. چون ملکول‌ها یِ با سرعت ِ بیش‌تر سریع‌تر از ظرف بیرون می‌روند، میان‌گین ِ انرژی یِ ملکول‌ها یِ بیرون‌رفته بیش از میان‌گین ِ انرژی یِ ملکول‌ها یی است که در ظرف مانده اند. پس با گذشت ِ زمان میان‌گین ِ انرژی یِ ملکول‌ها یی که در ظرف مانده اند، و در نتیجه دما یِ گاز ِ درون ِ ظرف، و میان‌گین ِ اندازه یِ سرعت ِ ملکول‌ها یِ گاز کم می‌شود. پس معادله یِ دیفرانسیل ِ تعداد ِ ملکول‌ها یِ گاز بر حسب ِ زمان، به یک متغیر ِ دیگر ِ وابسته به زمان (دما) جفت شده است.

ممکن است تصور شود اگر روزنه خیل ی ریز باشد (چنان که آهنگ ِ خروج ِ گاز خیل ی کوچک باشد) می‌شود از تغییر ِ دما چشم پوشید. اما چنان که خواهیم دید، حتا اگر روزنه خیل ی ریز باشد

[1] این مقاله، با اجازه ی ِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه ی ِ حقوق ِ آن برا ی ِ نویسنده محفوظ است.

http://www.mamwad.org/x1/X1-033.pdf

وقت ی مقدار ـِ چشم‌گیر ی از گاز بیرون رفته باشد، تغییر ـِ دما قابل ـِ چشم‌پوشی نیست، و در واقع دما بر حسب ـِ کسر ـِ ملکول‌ها یِ مانده در ظرف، اصولاً به اندازه یِ روزنه بسته‌گی ندارد.

در کل ـِ این متن، گاز را کامل می‌گیریم. ضمناً فرض می‌کنیم روزنه آن‌قدر ریز است که گاز ـِ درون ـِ ظرف را همیشه می‌شود در تعادل ـِ ترمودینامیکی گرفت.

1 تعداد ـِ ملکول‌ها، و انرژی یِ کل ـِ درون ـِ ظرف

آهنگ ـِ خروج ـِ گاز از ظرف، برا یِ ملکول‌ها یی که سرعت ـِشان در ناحیه یِ d^3v است

$$R(v)\,d^3v = \left[\int dX\;v_z\,H(v_z)\,N\,F(r_0,v,X)\,A\right]\,d^3v \tag{1}$$

است، که $R\,\mathrm{d}^3v$ تعداد ـِ ملکول‌ها یِ خارج‌شده بر زمان، H تابع ـِ پله یِ واحد، N تعداد ـِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف، A مساحت ـِ روزنه، $\mathbf{r}_0$ بردار ـِ مکان ـِ روزنه، $\mathbf{v}$ سرعت، X نماینده یِ درجه‌ها یِ آزادی یِ درونی یِ ملکول، و F چگالی یِ احتمال برا یِ ملکول‌ها یِ با مکان، سرعت، و درجه‌ها یِ آزادی یِ درونی یِ معین است. (x,y,z) مختصات ـِ دِکَرتی اند، چنان که جهت ـِ z عمود بر روزنه و به طرف ـِ بیرون است.

از این پس فرض می‌کنیم تابع ـِ چگالی نسبت به مکان یک‌نواخت است. به این ترتیب،

$$F(r,v,X) = \frac{1}{V}\,f(v,X), \tag{2}$$

که V حجم ـِ ظرف است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= -\int d^3v\;R(v),\\ &= -\langle v_z\,H(v_z)\rangle\,\frac{N}{V}\,A,\end{aligned} \tag{3}$$

که $\langle Q\rangle$ میان‌گین ـِ کمیت ـِ Q، و t زمان است.

توزیع ـِ سرعت ـِ ملکول‌ها یِ بیرون ـِ ظرف، با توزیع ـِ سرعت ـِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف فرق دارد، چون ملکول‌ها یی که سرعت ـِشان بیش‌تر است سریع‌تر بیرون می‌روند. در واقع از رابطه یِ (1) دیده می‌شود اگر f چگالی یِ احتمال برا یِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف باشد، f_o (چگالی یِ احتمال برا یِ ملکول‌ها یِ بیرون ـِ ظرف) می‌شود

$$f_o(v,X) = \mathcal{N}\,v_z\,H(v_z)\,f(v,X), \tag{4}$$

که $\mathcal{N}$ یک ثابت ِ بهنجارش است. به این ترتیب، میان‌گین ِ کمیت ِ Q برا ی ِ ملکول‌ها ی ِ بیرون ِ ظرف ($\langle Q\rangle_\mathrm{o}$) با میان‌گین ِ همین کمیت برا ی ِ ملکول‌ها ی ِ درون ِ ظرف ($\langle Q\rangle$) فرق دارد.

انرژی ی ِ درونی ی ِ ظرف بر تعداد ِ ملکول‌ها را با u نشان می‌دهیم. این کمیت در واقع میان‌گین ِ انرژی ی ِ یک ملکول ِ گاز ($\langle E\rangle$) است. داریم

$$\frac{d(N\,u)}{dt}=\langle E\rangle_o\,\frac{dN}{dt},\tag{5}$$

و از آن‌جا

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{N}\,(\langle E\rangle_o-u)\,\frac{dN}{dt}.\tag{6}$$

دیده می‌شود u به شرط ی ثابت است که $\langle E\rangle_\mathrm{o}$ و $\langle E\rangle$ برابر باشند. ضمناً در معادله ی ِ بالا می‌شود زمان را حذف کرد:

$$N\,\frac{du}{dN}=\langle E\rangle_o-u.\tag{7}$$

برا ی ِ یک گاز ِ کامل ِ کلاسیک، u دما ی ِ سیستم و در نتیجه توزیع ِ سرعت را تعیین می‌کند. توزیع ِ سرعت ِ ملکول‌ها ی ِ درون ِ ظرف هم توزیع ِ سرعت ِ ملکول‌ها ی ِ بیرون را تعیین می‌کند. پس $\langle E\rangle_\mathrm{o}$ هم با دانستن ِ u معلوم است. از این‌جا دیده می‌شود u تابع ِ فقط کسر ِ ملکول‌ها یی است که در ظرف مانده اند، و با دانستن ِ این کسر، به حجم ِ ظرف و مساحت ِ روزنه بسته‌گی ندارد. این نتیجه برا ی ِ هر گاز ِ کامل ی (حتا نسبیتی) درست است. به این ترتیب،

$$\langle E\rangle_o=g(u),\tag{8}$$

و از آن‌جا،

$$\int_{u_0}^{u}\frac{du'}{g(u')-u'}=\ln\left(\frac{N}{N_0}\right).\tag{9}$$

برا ی ِ این که جلوتر برویم، لازم است تابع ِ g را بشناسیم.

2 گاز ِ کامل ِ غیرِنسبیتی

برا ی ِ یک گاز ِ کامل ِ غیرِنسبیتی، داریم

$$f(v,X)=f_1(v_z)\,f_2(v_x,v_y)\,f_3(X),\tag{10}$$

و

$$E = \frac{m}{2}\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + E_i(X), \tag{11}$$

که m جرم ِ ملکول و $E_{\rm i}$ بخش ی از انرژی است که تابع ِ فقط درجه‌ها یِ آزادی یِ درونی است. از (4) و (10) و (11) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\langle[m\,(v_x^2 + v_y^2)/2]\rangle_o \;&=\; \langle[m\,(v_x^2 + v_y^2)/2]\rangle,\\ \langle E_i\rangle_o \;&=\; \langle E_i\rangle.\end{aligned} \tag{12}$$

به این ترتیب،

$$\langle E\rangle_o = u + \langle(m\,v_z^2/2)\rangle_o - \langle(m\,v_z^2/2)\rangle. \tag{13}$$

داریم

$$f_1(v_z) = \mathcal{N}'\ \exp\left(-\frac{m\,v_z^2}{2\,k_B\,T}\right), \tag{14}$$

که $k_{\rm B}$ ثابت ِ بُلتس‌مان [a]، T دما، و $\mathcal{N}'$ یک ثابت ِ بهنجارش است. از این‌جا،

$$\langle(m\,v_z^2/2)\rangle_o = k_B\,T, \tag{15}$$

و

$$\langle(m\,v_z^2/2)\rangle = \frac{1}{2}\,k_B\,T. \tag{16}$$

پس

$$\langle E\rangle_o - u = \frac{1}{2}\,k_B\,T. \tag{17}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ِ g باید بسته‌گی یِ T به u را بدانیم. داریم

$$u = \frac{\alpha}{2}\,k_B\,T, \tag{18}$$

که α تعداد ِ درجه‌ها یِ آزادی یِ (مجذوری یِ مئثر ِ) هر ملکول است. خود ِ α تابع ِ T (یا u) است، اما در ناحیه‌ها یِ بزرگ ی از T (یا u) ثابت است. با جاگذاری یِ (17) و (18) در (8) و (9)،

$$\int_{u_0}^{u} du'\ \frac{\alpha(u')}{u'} = \ln\left(\frac{N}{N_0}\right). \tag{19}$$

اگر α ثابت باشد،

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1/\alpha}. \tag{20}$$

دیده می‌شود هر چه α بزرگ‌تر باشد، تغییرات ِ نسبی ي ِ میان‌گین ِ انرژی ي ِ ملکول‌ها ي ِ گاز کم‌تر است.

3 آهنگ ِ خروج ِ ملکول‌ها

تغییر ِ N با زمان از (3) به دست می‌آید. با فرض ِ این که توزیع ِ سرعت کروی‌متقارن است (یعنی به جهت ِ سرعت بسته‌گی ندارد)، طرف ِ راست ِ (3) را می‌شود بر حسب ِ میان‌گین ِ اندازه ي ِ سرعت نوشت:

$$\begin{aligned} \langle v_z\, H(v_z)\rangle &= \langle v\, \{\cos(\theta)\, H[\cos(\theta)]\}\rangle, \\ &= \langle v\rangle\, \langle \cos(\theta)\, H[\cos(\theta)]\rangle, \\ &= \frac{1}{4}\, \langle v\rangle. \end{aligned} \tag{21}$$

به این ترتیب (3) و (6) به‌ترتیب می‌شوند

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{A}{V}\, \frac{\langle v\rangle}{4}\, N, \tag{22}$$

و

$$\frac{du}{dt} = -\frac{A}{V}\, \frac{\langle v\rangle}{4}\, (\langle E\rangle_o - u). \tag{23}$$

این نتایج برا ي ِ گازها ي ِ کامل ِ نسبیتی هم درست اند. برا ي ِ گازها ي ِ کامل ِ غیرِنسبیتی،

$$f(v,X) = \mathcal{N}''\, \exp\left(-\frac{m\, v^2}{2\, k_B\, T}\right)\, f_3(X), \tag{24}$$

که $\mathcal{N}''$ یک ثابت ِ بهنجارش است. از این‌جا

$$\langle v\rangle = \left(\frac{8\, k_B\, T}{\pi\, m}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

با جاگذاری ي ِ این رابطه و رابطه‌ها ي ِ (17) و (18) در (23)، نتیجه می‌شود

$$\frac{du}{dt} = -\frac{A}{V}\, \frac{1}{\sqrt{\pi\, m}}\, \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{3/2}, \tag{26}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_{u_0}^{u} du' \; \left[\frac{\alpha(u')}{u'}\right]^{3/2} = -\frac{A}{V}\,\frac{1}{\sqrt{\pi\, m}}\, t. \tag{27}$$

اگر α ثابت باشد،

$$u = u_0\; \left[1 + \frac{A}{V}\; \left(\frac{u_0}{4\,\pi\, m\,\alpha^3}\right)^{1/2}\; t\right]^{-2}. \tag{28}$$

این رابطه را می‌شود بر حسب ِ دما نوشت:

$$T = T_0\; \left[1 + \frac{A}{V}\; \left(\frac{k_B\, T_0}{8\,\pi\, m\,\alpha^2}\right)^{1/2}\; t\right]^{-2}. \tag{29}$$

باز دیده می‌شود هر چه α بزرگ‌تر باشد تغییر ِ نسبی ي دما کوچک‌تر است.

رابطه‌ها يِ (19) و (27) بسته‌گی يِ N به t را می‌دهند. اگر α ثابت باشد، این بسته‌گی را می‌شود صریح‌تر نوشت:

$$N = N_0\; \left[1 + \frac{A}{V}\; \left(\frac{k_B\, T_0}{8\,\pi\, m\,\alpha^2}\right)^{1/2}\; t\right]^{-2\,\alpha}. \tag{30}$$

اگر α بسیار بزرگ باشد (عبارت ِ درون ِ کروشه تقریباً یک باشد)، رابطه يِ بالا می‌شود

$$N = N_0\, \exp\left[-\frac{A}{V}\; \left(\frac{k_B\, T_0}{2\,\pi\, m}\right)^{1/2}\; t\right]. \tag{31}$$

این همان نتیجه ای است که با فرض ِ ثابت‌بودن ِ دما از رابطه يِ (22) به دست می‌آید.

4 مرجع

[1] P. K. Pathria; “Statistical mechanics”, (Pergamon Press, 1972) chapter 6.

5 اسم ِ خاص

[a] Boltzmann